Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. Métivier

Ondes soniques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 17, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A17_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ONDES SONIQUES

G. METIVIER

Exposé n° XVII

22 MARS 1988

ONDES SONIQUES

1. Introduction

Dans tout cet exposé, on considère un système quasilinéaire du premier ordre :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} A_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = F(u)$$

où les matrices A_j et la fonction F sont réelles et dépendent de façon C^∞ de $u \in \mathbb{R}^N$. Typiquement, on peut penser que (1) est un système de lois de conservation. On supposera toujours que ce système est hyperbolique symétrisable au sens de Friedrichs.

Le premier phénomène auquel on va s'intéresser est celui des « ondes de gradient » , c'est-à-dire que l'on veut étudier les solutions de (1) régulières de part et d'autre d'une surface Σ, continues sur Σ, mais dont le gradient présente (ou peut présenter) un saut. Par exemple, pour le système d'Euler de la dynamique des gaz qui possède trois valeurs propres, disons v et $v \pm c$, v étant une vitesse de déplacement du fluide et c la vitesse de son, les fronts Σ des ondes de gradient associées aux valeurs propres $v \pm c$ se déplacent effectivement par rapport au fluide à la vitesse c; ces ondes sont répertoriées dans Courant - Friedrichs sous le nom d'« ondes soniques » ; d'où le titre de l'exposé.

Plusieurs motivations sont à la base de ce travail :

□ D'abord le travail de S. Alinhac [A 1] [A 2], où sont étudiées la propagation puis l'interaction d'ondes conormales $H_\Sigma^{s,k}$ avec s assez grand ($s > s_o$ avec s_o valant au moins $\frac{1}{2}(n+1) + 2$). Ces solutions sont donc toujours à dérivées secondes bornées, et pour k assez grand, elles sont en fait de classe C^{s-1} ; ce cadre de singularités "faibles" ne permet donc pas l'étude des ondes de gradient. Le premier but poursuivi est donc d'étendre aux discontinuités du gradient le travail d' Alinhac [A 1], dans le même esprit que ce qui a été fait dans la cadre semi-linéaire dans [Me 1] [Me 2], où l'on a étendu aux discontinuités de la solution des résultats antérieurs de J.M. Bony [B 1] [B 2].

□ D'autre part, S. Alinhac a construit dans [A 3] [A 4] des ondes de raréfaction , en résolvant, sous des hypothèses appropriées, le problème de Cauchy à partir d'une donnée initiale discontinue le long d'une surface. Pour $t > 0$, ces solutions sont continues mais leur gradient présente un saut le long de deux surfaces caractéristiques issues de la surface de discontinuité initiale. S.Alinhac a montré l'existence de telles solutions pour des temps petits ; un autre but du travail présenté ici, est d'étudier l'évolution ultérieure des ondes de gradient ainsi crées.

□ Enfin, l'étude des chocs faibles conduit naturellement à une étude préliminaire des ondes de gradient. En effet, la condition de stabilité uniforme des chocs introduite par A. Majda ([Ma 1] [Ma 2]) repose de manière fondamentale sur le fait que le front d'une onde de choc est une surface non-caractéristique. Or, quand l'amplitude du choc tend vers 0, la normale au front tend vers une direction caractéristique, ce qui entraine que les estimations a-priori fournies par le travail de Majda explosent et que les solutions sont construites sur des intervalles de temps qui tendent vers 0. Il est tout-à-fait intuitif que les chocs faibles ne peuvent tendre que vers une onde de gradient (une onde sonique dans le cas des équations d'Euler, cas dans lequel Courant - Friedrichs affirment effectivement la convergence). Il est alors raisonnable d'étudier préalablement le problème limite, par exemple pour savoir quelles sont les estimations valables uniformément par rapport à l'amplitude du choc.

En fait, nous allons nous intéresser non seulement à des solutions singulières sur une surface, mais aussi à des solutions singulières par rapport à une famille (feuilletage) de surfaces caractéristiques. Deux raisons conduisent à ce choix : d'une part, une raison technique, qui est que le second problème est par certains côtés plus simple, et qu'il servira d'étape préliminaire dans l'étude du premier problème ; d'autre part, une raison de fond, qui est que dans le cas semi-linéaire, l'étude de ces solutions "stratifiées" (J. Rauch - M. Reed [R-R]) a servi de cadre pour l'étude des solutions oscillantes (J.L. Joly - J. Rauch [J-R]) et il n'est pas interdit d'espérer que cela sera encore le cas pour les systèmes quasilinéaires.

2. Résultats

2.1 Les équations : on considère un système :

(2.1.1) $$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(c,u)\,\partial_j u = F(c,u)$$

où $u=(u_1,\ldots,u_N)$ est l'inconnue et où $c=(c_1,\ldots,c_M)$ est une fonction donnée. Les matrices A_j et la fonction F sont réelles et dépendent de façon C^∞ de leurs arguments. On suppose le système hyperbolique symétrique, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $S(c,u)$ symétrique et définie positive, C^∞ de ses arguments, et telle que les matrices $S A_j$ soient symétriques.

On suppose que pour tout $(c,u,\xi)\in \mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^n\backslash 0)$, $\lambda(c,u,\xi)$ est une valeur propre simple de la matrice $\sum \xi_j\, A_j\,(c,u)$. Le feuilletage caractéristique associé à la valeur propre λ est constitué des surfaces $\{\psi = \mathit{constante}\}$ où ψ est solution de :

(2.1.2) $$\partial_t\psi(t,x) = \lambda(\,c(t,x)\,,u(t,x)\,,\partial_x\psi(t,x))$$

En supposant les variables numérotées de sorte que (localement) $\partial_n\psi\neq 0$, on transporte les équations (2.1.1) (2.1.2) par le changement de variables :

(2.1.3) $$(t,x)\;\to\;(t,x_1,\ldots,x_{n-1},\,\tilde{x}_n=\psi(t,x))$$

Le changement inverse est donné par $x_n=\phi(t,x_1,\ldots,\tilde{x}_n)$, et en appelant $\tilde{c}$ et $\tilde{u}$ les fonctions déduites de c et u, les équations s'écrivent :

(2.1.4) $$\partial_t\tilde{u} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(\tilde{c},\tilde{u})\;\partial_j\tilde{u} \;+ A_n\,(\tilde{c},\tilde{u}\,,\partial_y\phi)\,\frac{\partial_n\tilde{u}}{\partial_n\,\phi} = F(\tilde{c}\,\tilde{u})$$

(2.1.5) $$\partial_t\phi = \mu(\tilde{c},\tilde{u},\partial'_y\,\phi)$$

où l'on convient que $t=x_o$, $y=(x_o,..,x_{n-1})$, $\partial'_y=(\partial_1,..,\partial_{n-1})$, $\partial_y=(\partial_t , \partial'_y)$ et, pour $\theta=(\theta_o , \theta')=(\theta_o , \theta_1 , . . . , \theta_{n-1})$, que :

(2.1.6) $$A_n(c,u,\theta) = A_n(c,u) - \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j A_j(c,u) - \theta_o Id$$

(2.1.7) $$\mu(c,u,\theta') = \lambda(c,u,(\theta_1,..,\theta_{n-1},-1))$$

En fait, localement au voisinage d'unpoint, u et ψ sont solutions lipschitziennes de (2.1.1) (2.1.2) avec $|\partial_n \psi| \geq \delta>0$, si et seulement si $\tilde{u}$ et ϕ sont solutions lipschitziennes de (2.1.3) (2.1.4) avec $|\partial_n \phi| \geq \delta'>0$. Dans la suite, nous n'étudierons plus que le système (2.1.3) (2.1.4) , et nous oublions définitivement les $\tilde{}$.

2.2 Les espaces : des espaces naturels mesurant la régularité tangentielle sont les espaces $H^{o,s}$, qui pour s entier ≥ 0, sont les espaces des u dont les dérivées $\partial_y^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq s$ sont dans L^2. On définit aussi les espaces à poids E_γ^s des u tels que $e^{-\gamma t} u \in H^{o,s}$; ces espaces sont munis des normes :

(2.2.1) $$|u|_{s,\gamma}^2 = \sum_{|\alpha|\leq s} \gamma^{2(s-|\alpha|)} \| e^{-\gamma t} \partial_y^\alpha u \|_{L^2}^2$$

La définition de ces espaces s'étend comme d'habitude à s réel.

Les solutions que nous voulons étudier vont être une fois dérivable en x_n , et puisque les surfaces $\{x_n = \textit{constante}\}$ sont caractéristiques, il est naturel d'introduire les espaces $E_\gamma^{s,1}$ des $u \in E_\gamma^s$ tels que $\partial_n u \in E_\gamma^{s-2}$, qu'on munit des normes :

(2.2.2) $$|u|_{s,\gamma}^* = |u|_{s,\gamma} + |\partial_n u|_{s-2,\gamma}$$

Lorsqu'on ne veut considérer qu'une seule surface, disons $\{x_n = 0\}$, on remplace les espaces $H^{o,s}$ par les espaces conormaux $H_\Sigma^{o,s}$ obtenus en ajoutant aux dérivations ∂_y la dérivation $\rho(x_n)\partial_n$ où ρ est une fonction croissante, qui vaut x_n au voisinage de 0, et constante en module pour $|x_n|$ grand. On définit alors de manière similaire les espaces $F_\gamma^s = e^{\gamma t} H_\Sigma^{o,s}$ et $F_\gamma^{s,1}$ munis de normes analogues à (2.2.1) (2.2.2).

Par ailleurs on introduit les espaces Λ^μ des $u \in L^\infty$ tels que pour $|\alpha| \leq \mu$, $\partial_y^\alpha u \in L^\infty$; on note $\|u\|_\mu$ la norme (évidente) de Λ^μ. L'espace Λ_Σ^μ se définit en ajoutant $\rho(x_n)\partial_n$ aux ∂_y . Pour finir, $\Lambda^{\mu,1}$ [resp $\Lambda_\Sigma^{\mu,1}$] est l'espace des $u \in \Lambda^\mu$ [resp Λ_Σ^μ] tels que $\partial_n u \in \Lambda^{\mu-2}$ [resp $\Lambda_\Sigma^{\mu-2}$], muni de la norme :

(2.2.3) $$\|u\|_\mu^* = \|u\|_\mu + \|\partial_n u\|_{\mu-2}$$

Dans toute la suite on se donne T_o et pour $T>T_o$ on note Ω_T la bande $\{T_o<t<T\}$ et $|.|_{s,\gamma,T}$, $\|.\|_{\mu,T}$ ... la norme de $E^s_\gamma(\Omega_T)$, $\Lambda_\mu(\Omega_T)$ ...

<u>2.3 Prolongement des solutions</u> : pour ne pas alourdir l'exposé, on se contentera ici d'énoncer des résutats globaux en x, sans expliciter les énoncés locaux qui s'en déduisent. On fait alors l' hypothèse technique suivante :

(2.3.1) $\qquad F(0,0)=0$

On note σ le réel $\mu(0,0,0)$ et $\phi_o(t,x)$ la fonction $x_n+\sigma t$.

On se donne $T_o<0<T_1$ et sur Ω_{T_1} une fonction $c\in\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_{T_1})$ où s est un entier $s>s_o=\frac{1}{2}(n+1)+5$. On suppose connue une solution (u,ϕ) de (2.1.4) (2.1.5) sur Ω_0 telle que $u\in\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_0)$ et $\phi-\phi_o\in\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_0)$. On suppose aussi qu'il existe $\delta>0$ tel que :

(2.3.2) $\qquad \forall\,(t,x)\in\Omega_0 \quad \partial_n\phi(t,x)\geq\delta$

<u>exemple</u> : si $F(c,0)=0$ pour $t<0$, et si c est à support compact, on peut prendre $u=0$ et déterminer ϕ par l'équation (2.1.5) et une donnée de Cauchy sur $t=T_o$ telle que $\phi(T_o,x_n)-(x_n+\sigma T_o)$ soit à support compact et vérifie (2.3.2). En effet, au moins si T_o est assez petit, ϕ sera définie sur Ω_0, vérifiera (2.3.2) et $\phi-\phi_o\in\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_0)$.

<u>Théorème 2.3.1</u> : sous les hypothèses ci-dessus, il existe un $T>0$, tel que (u,ϕ) se prolonge en une unique solution de (2.1.4) (2.1.5) *dans* $\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_T)$.

De plus, si on note T^* la borne supérieure des $T\in\,]0,T_1]$ tels que (u,ϕ) se prolonge en solution dans $\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_T)$, alors, ou bien $T^*=T_1$, ou bien

(2.3.3) $\qquad \|u\|^*_{3,T}+\|\phi-\phi_o\|^*_{3,T}\to+\infty \quad$ lorsque $\quad T\to T^*$

<u>Théorème 2.3.2</u> : on se place sous les hypothèses du théorème précédent, et on suppose en outre que $c\in\Lambda^{4,1}_\Sigma\cap F^{s,1}(\Omega_{T^*})$ avec $s>s_o+1$, et que u et $\phi-\phi_o$ sont dans $\Lambda^{4,1}_\Sigma\cap F^{s,1}$ sur Ω_0 ; alors pour tout $T<T^*$ u et $\phi-\phi_o$ sont dans $\Lambda^{4,1}_\Sigma\cap F^{s,1}$ sur Ω_T.

<u>Remarque</u> : le fait de demander dans le théorème 2.3.2 une régularité $\Lambda^{4,1}$ au lieu de $\Lambda^{3,1}$ comme dans le théorème 2.3.2, est technique et artificiel. Par ailleurs, la régularité $\Lambda^{2,1}$ semble nécessaire à cause de l'équation complètement non linéaire (2.1.5), mais il n'est pas clair qu'une régularité $\Lambda^{2,1}$ soit suffisante et qu'on puise remplacer dans (2.3.3) les normes $\|.\|^*_3$ par $\|.\|^*_2$

2.4 Problème de Cauchy : lorsque qu'on pose le problème de Cauchy pour (2.1.1), avec une donnée initiale h singulière sur une hypersurface Σ_o , on s'attend à ce que la solution soit singulière sur les N surfaces caractéristiques issue de Σ_o . Néanmoins, on peut expliciter des conditions de compatibilités portant sur h et Σ_o , qui garantissent l'existence d'une solution singulière sur une seule surface. Esquissons la forme de ces conditions pour le système (2.1.4) (2.1.5) et, pour simplifier, dans le cas où il n'y a pas de fonction c. On se donne une donnée initiale pour u, $h(x)$ qui est dans l'espace de Sobolev H^s sur chaque demi-espace $\{\pm x_n > 0\}$; on se donne de même $\psi(x)$ donnée initiale pour ϕ, telle que $\psi(x) - x_n$ soit aussi dans l'espace de Sobolev H^s sur chaque demi-espace $\{\pm x_n > 0\}$. On note [.] le saut d'une fonction le long de $\{ x_n = 0 \}$, et, puisqu'on cherche des ondes de gradient, on suppose que $[h]=0$ et $[\psi]=0$.

Les dérivées $\partial_t^j u(0,x) = h_j$, $\partial_t^j \phi(0,x) = \psi_j$ et $z_j = \partial_t^j \{ (\partial_n\phi)^{-1} \partial_n u \}(0,x)$ sont déterminées (en dehors de $x_n=0$) à partir de (2.1.4) (2.1.5) par des relations de récurrence :

(2.4.1) $$h_{j+1} = \mathscr{H}_j(h_o,..,h_j;\psi_o,..,\psi_j)$$

(2.4.2) $$\psi_{j+1} = \mathscr{F}_j(h_o,..,h_j;\psi_o,..,\psi_j)$$

(2.4.3) $$z_j = (\partial_n\psi_o)^{-1}(\partial_n h_j) + \mathscr{Z}_j(\partial_n h_o,..,\partial_n h_{j-1};\partial_n\psi_o,..,\partial_n\psi_j)$$

et on vérifie aisément que les fonctions h_{j+1} , z_j et ψ_{j+1} si $j>0$ ou $\psi_1-\sigma$ si $j=0$, définies par ces formules sont dans H^{s-j-1} sur $\{\pm x_n > 0\}$ (pour $s-j-1\geq 0$, et à condition que $s > \frac{1}{2}n + 1$). Les conditions de compatibilité à l'ordre k consistent à exprimer que :

(2.4.4) $$[h_j] = 0 \quad \text{pour } j = 0,..,k$$

et ces conditions impliquent que :

(2.4.5) $$[\psi_j] = 0 \quad \text{pour } j = 0,..,k$$

puisque la fonctionnelle $\mathscr{F}_j$ de (2.4.2) ne fait intervenir que des dérivées tangentielles de ses arguments.

Notons $R(u,\theta')$ un vecteur du noyau de la matrice $A_n(u,\theta)$ définie en (2.1.6). Alors, pour toute dérivation ∂ on a :

(2.4.6) $$\partial^k R(u,\theta') = \sum_{j=0}^{k} R_j(u,\partial u,..,\partial^j u;\theta',..,\partial^j\theta')$$

pour certaines fonctions R_j. En dérivant la relation $A_n R=0$, on vérifie que si l'on désigne par $\theta'_j = \partial'_y \psi_j$, les conditions de compatibilité à l'ordre k sont équivalentes à l'existence de fonctions $\zeta_o(y') \dots \zeta_{k-1}(y')$ telles que pour $0\leq j\leq k-1$:

$$(2.4.7) \qquad [z_j] = \sum_{l=0}^{j} \zeta_{j-l}\, R_l(h_o,..,h_l;\theta_o',..,\theta_l')$$

A partir de (2.4.1) (2.4.2) (2.4.5), on voit que

$$(2.4.8) \qquad z_j = (\partial_n\psi_o)^{-j}\,\{A_n(h_o,\theta_o)\}^j\,\partial_n^{j+1} h_o + Q_j(h_o,\psi_o)$$

où Q_j est une expression qui fait intervenir les dérivées d'ordre $\leq j+1$ de u_o et ψ_o à l'exception de $\partial_n^{j+1} u_o$. La condition (2.4.7) s'ecrit donc : il existe une fonction ζ_j telle que :

$$(2.4.9) \qquad \{A_n(h_o,\theta_o)\}^j\,[\,(\partial_n\psi_o)^{-j}\,\partial_n^{j+1} h_o\,] - \zeta_j\, R(h_o,\theta_o) = H_j$$

où H_j est une expression qui fait intervenir $\zeta_o,..,\zeta_{j-1}$ et les dérivées d'ordre $\leq$ $j+1$ de h_o et ψ_o à l'exception de $\partial_n^{j+1} h_o$. La relation (2.4.9) détermine ζ_j et le saut de $(\partial_n\psi_o)^{-j}\,\partial_n^{j+1} h_o$ à un terme de la forme $\alpha R(h_o,\theta_o)$ près. La manière de construire des données compatibles est maintenant claire.

Supposons donc que h et $\psi - x_n$ sont dans H^s sur $\{x_n \neq 0\}$ et vérifient les compatibilitées (2.4.3) à l'ordre $s-1$. Alors on peut trouver une fonction u dans $H^s\{x_n \neq 0\}$ telle que $[u]=0$, et $\partial_t^j u(0,x) = h_j(x)$ pour $0 \leq j \leq s-1$. Soit ϕ solution pour $t \in [-T_o, T_o]$ de $\partial_t\phi = \mu(u, \partial_y'\phi)$ avec $\phi(0,x) = \psi(x)$. Alors $\partial_t^j\phi(0,x) = \psi_j(x)$ et $\phi - (x_n + \sigma t) \in H^s\{x_n \neq 0\}$. La fonction f qui vaut 0 pour $t>0$ et $\partial_t u + \Sigma A_j(u)\,\partial_j u + (\partial_n\phi)^{-1} A_n(u, \partial_y\phi)\,\partial_n u - F(u)$ pour $t<0$, est dans $H^{s-1}\{x_n \neq 0\}$ et il résulte des relations (2.4.7) que $[f]=0$. On considère alors le problème :

$$(2.4.10) \qquad \partial_t v + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(v)\,\partial_j v + A_n(v,\partial_y\chi)\frac{\partial_n v}{\partial_n\chi} = F(v) + f$$

$$(2.4.11) \qquad \partial_t\chi = \mu(v, \partial_y'\chi)$$

qui admet la solution (u,ϕ) pour $t<0$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.3.1 pour obtenir une solution de (2.1.4) (2.1.5) sur $0 \leq t \leq T$, qui prolonge (u,ϕ) et donc qui a (h,ϕ) pour données de Cauchy.

2.5 Estimations a-priori : l'idée essentielle de ce travail est d'obtenir des estimations a-priori pour le problème linéarisé :

$$(2.5.1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(a)\,\partial_j u + A_n(a,\partial_y\phi)\frac{\partial_n u}{\partial_n\phi} = f$$

où l'on suppose que ϕ est solution de :

$$(2.5.2) \qquad \partial_t\phi = \mu(a, \partial_y'\phi)$$

Théorème 2.5.1 : soit $T_o < 0$, s entier $> \frac{1}{2}(n+1) + 5$ et $M \geq 0$; alors il existe une constante C telle que : pour tout $T \geq 0$, pour toute famille (a, u, f, ϕ) solution C^∞ de (2.5.1) (2.5.2) sur $\overline{\Omega}_T$,avec $u=f=0$ pour t voisin de T_o,et vérifiant :

(2.5.3) $$\|a\|^*_{3,T} + \|\phi - \phi_o\|^*_{3,T} + \|(\partial_n \phi)^{-1}\|_{o,T} \leq M$$

on a, pour tout $\gamma \geq 1$, les estimations :

(2.5.4) $$\gamma\, |u|^*_{s,\gamma,T} \leq C\ \{ |u|^*_{s,\gamma,T} + |f|^*_{s,\gamma,T} + K(|a|^*_{s,\gamma,T} + \gamma\, |\phi'|^*_{s,\gamma,T}) \}$$

(2.5.5) $$\gamma\, |\phi'|^*_{s,\gamma,T} \leq C\ \{ |a|^*_{s,\gamma,T} + |\phi'|^*_{s,\gamma,T} + \gamma |\phi'|^*_{s,\gamma,0} \}$$

où $\phi' = \phi - \phi_o$ et :

(2.5.6) $$K = \|u\|^*_{3,T} + \|f\|^*_{3,T}$$

L'estimation (2.5.5) qui ne concerne que l'équation (2.5.2) se démontre de façon indépendante et classique. Par contre, l'estimation (2.5.4) se démontre en deux temps : la partie la plus difficile est de prouver la majoration suivante :

(2.5.7) $$\gamma\, |u|_{s,\gamma,T} \leq C\ \{ |u|^*_{s,\gamma,T} + |f|_{s,\gamma,T} + K(|a|_{s,\gamma,T} + \gamma\, |\phi'|^*_{s,\gamma,T}) \}$$

En effet, la mise en œuvre des méthodes "classiques" supposerait que l'on dispose pour ϕ, d'un cran de dérivabilité de plus, ce qui n'est pas compatible avec la régularité du problème (2.5.2). Cette difficulté sera contournée à l'aide du calcul paradifférentiel. La seconde étape dans la preuve de (2.5.5), consiste à estimer la dérivée normale de u en revenant à l'équation, ce qui se fait à nouveau par l'utilisation des méthodes classiques, et fournit la majoration :

(2.5.8) $$\gamma^2\, |\partial_n u|_{s-2,\gamma,T} \leq C\{ \gamma |u|_{s,\gamma,T} + |u|^*_{s,\gamma,T} + |f|^*_{s,\gamma,T} + K(|a|^*_{s,\gamma,T} + \gamma\, |\phi'|^*_{s,\gamma,T}) \}$$

Pour compléter l'étude, il faut obtenir des estimations " L^∞ " qui permettrons de mettre en œuvre un schéma itératif dans les espaces $\Lambda^{3,1} \cap E^{s,1}_\gamma$.

Proposition 2.5.2 : soit $T_o < 0$, s entier $> \frac{1}{2}(n+1) + 5$ et $M \geq 0$; alors il existe T_1 et une constante C tels que : pour tout $T \in [0, T_1]$, pour toute famille (a, u, f, ϕ) solution C^∞ de (2.5.1) sur $\overline{\Omega}_T$, vérifiant (2.5.3), on a ,pour $\gamma \geq 1$ et $\gamma T \leq 1$, les estimations suivantes :

(2.5.9) $$\|u\|_{3,T} \leq \|u\|_{3,0} + T\, C\, |u|^*_{s,\gamma,T}$$

(2.5.10) $$\|\partial_n u\|_{1,T} \leq (1 + TC)\, \|\partial_n u\|_{1,0} + T\, C\, \{ \|u\|_{3,T} + \|f\|^*_{3,T} \}$$

La première de ces majorations résulte d'une injection d'espaces de $E^{s,1}_\gamma$ dans Λ^4 avec une norme indépendante de γ pour $\gamma T \leq 1$ et T borné. La seconde s'obtient en revenant à l'équation.

Pour ce qui concerne l'équation (2.5.2), on a :

Lemme 2.5.3 : soit $T_o < 0$, δ, M et H des réels > 0. Alors il existe $T_1 > 0$ et C tels que : pour tout $T \in [0, T_1]$, pour tout $a \in \Lambda^{3,1}(\Omega_T)$ et pour toute fonction ϕ solution de (2.5.2) sur Ω_T vérifiant :

(2.5.11) $$\|a\|^*_{3,T} \leq M \quad ; \qquad \|\phi - \phi_o\|^*_{3,T} \leq H \qquad \text{et} \quad \partial_n \phi \geq \delta$$

il existe un prolongement de ϕ en solution de (2.5.2) sur Ω_T qui vérifie :

(2.5.13) $$\|\phi - \phi_o\|^*_{3,T} \leq H + 10 \qquad \partial_n \phi \geq \tfrac{1}{2}\delta$$

2.6 Comparaison de solutions : on se donne comme précédemment $T_o < 0$, et $T > 0$, et on considère deux familles (u, f, a, ϕ) et (v, g, b, ψ) solutions de (2.5.1) (2.5.2) sur Ω_T vérifiant tous les deux (2.5.3), (2.3.2) et :

(2.6.1) $$\|\partial_n u\|_{o,T} + \|\partial_n f\|_{o,T} + \|\partial_n v\|_{o,T} + \|\partial_n g\|_{o,T} \leq M'$$

Lemme 2.6.1 : sous les hypothèses précédentes, il existe C ,ne dépendant que de M et M', telle que :

(2.6.2) $$\gamma |u-v|_{o,\gamma,T} \leq C\{ |u-v|_{o,\gamma,T} + |f-g|_{o,\gamma,T} + |a-b|_{o,\gamma,T} + \gamma |\phi-\psi|_{o,\gamma,T} + \gamma |u-v|_{o,\gamma,0} \}$$

(2.6.3) $$\gamma |\phi-\psi|_{o,\gamma,T} \leq C\{ |\phi-\psi|_{o,\gamma,T} + |a-b|_{o,\gamma,T} + \gamma |\phi-\psi|_{o,\gamma,0} \}$$

La preuve de de (2.6.3) est immédiate par différence des deux équations (2.5.2). Pour obtenir (2.6.2), le plus simple est de revenir aux "variables initiales", c'est-à dire de définir $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ par les formules :

(2.6.4) $$\tilde{u}(y, \phi(y, x_n)) = u(y, x_n) \qquad \tilde{v}(y, \psi(y, x_n)) = v(y, x_n)$$

et $\tilde{a}, \tilde{f}$ d'une part, et $\tilde{b}, \tilde{g}$ d'autre part, par des formules analogues. On a :

(2.6.5) $$\partial_t \tilde{u} + \sum_{j=1}^{n} A_j(\tilde{a})\, \partial_j \tilde{u} = \tilde{f} \qquad \partial_t \tilde{v} + \sum_{j=1}^{n} A_j(\tilde{b})\, \partial_j \tilde{v} = \tilde{g}$$

Les fonctions $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont à gradient borné sur Ω_T de même que $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, et en comparant ces deux équations, on voit que :

(2.6.6) $$\gamma |\tilde{u}-\tilde{v}|_{o,\gamma,T} \leq C\{ |\tilde{u}-\tilde{v}|_{o,\gamma,T} + |\tilde{a}-\tilde{b}|_{o,\gamma,T} + |\tilde{f}-\tilde{g}|_{o,\gamma,T} + \gamma |\tilde{u}-\tilde{v}|_{o,\gamma,0} \}$$

On conclut en utilisant des majorations du style suivant :

(2.6.7) $$|u-v|_{o,\gamma,T} \leq C\{ |\tilde{u}-\tilde{v}|_{o,\gamma,T} + |\phi-\psi|_{o,\gamma,T} \}$$

qui se déduisent immédiatement de (2.6.4) et des bornes (2.6.1) ou (2.5.3).

3. Paralinéarisation

3.1 Le paraproduit T : on introduit d'abord le paraproduit tangentiel à poids ; pour cela on se donne $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, à support dans la boule de rayon 2 et valant 1 sur la boule de rayon 1. Pour $j \geq 0$ on note $S_j = \varphi(2^{-j} D_y)$ et, en convenant que $S_{-1}=0$, $\Delta_j = S_j - S_{j-1}$. Pour $j \geq 3$, on définit :

(3.1.1) $$T_a^j u = S_{j-3} a \,.\, S_j u + \sum_{k>j} S_{k-3} a \,.\, \Delta_k u$$

(3.1.2) $$Y_a^j u = \sum_{k \geq j-2} S_{k-3} a \,.\, \Delta_k u$$

(3.1.3) $$R^j(a,u) = \sum_{k \geq j-2} \sum_{|l-k| \leq 2} \Delta_k a \,.\, \Delta_l u$$

de sorte que :

(3.1.4) $$a\,u = T_a^j u + Y_u^j a + R^j(a,u)$$

Dans la suite, il faut comprendre que 2^j représente l'ordre de grandeur de γ; pour rendre la dépendance en γ régulière, on introduit une fonction $\zeta \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]\frac{1}{4}, 1[$ et telle que $\sum \zeta_j(\gamma) = 1$ pour $\gamma \geq 1$, si $\zeta_j(\gamma) = \zeta(2^{3-j}\gamma)$. Pour $\gamma \geq 1$, on a $j \geq 3$ quand $\zeta_j \neq 0$, et on pose $T^\gamma = \sum \zeta_j(\gamma)\ T^j$.

On introduit aussi une fonction $h \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ nulle pour $|\eta| \leq 2^6$ et valant 1 pour $|\eta| \geq 2^7$, et on note h_γ l'opérateur $h(\frac{1}{\gamma} D_y)$. Avec ces notations, on a :

(3.1.5) $$a\,u = T_a^\gamma u + T_u^\gamma h_\gamma a + R_\gamma(a,u)$$

avec :

(3.1.6) $$R_\gamma(a,u) = \sum_j \zeta_j(\gamma) \left\{ Y_u^j a + \sum_{k=j-2}^{j+4} S_{k-3} u \,.\, \Delta_k (a - h_\gamma a) \right\}$$

Ce paraproduit T^γ opère dans les espaces $H_\gamma^{o,s}$ et jouit d'un calcul symbolique similaire à celui de J.M.Bony [B 3] (voir aussi [Mo] [Me 3]).

3.2 Le paraproduit P : on veut maintenant définir un paracalcul dans les espaces E_γ^s . Le plus simple est de le définir à partir des T^γ par conjugaison :

(3.2.1) $$P_a^\gamma u = e^{\gamma t}\, T_a^\gamma (e^{-\gamma t} u)$$

L'opérance dans les espaces E_γ^s et le calcul symbolique se déduisent immédiatement des propriétés de T^γ . Par contre, la formule de paralinéarisation (3.1.5) n'est pas directement exploitable : elle permet seulement d'écrire :

(3.2.2) $\qquad a\,u = P^{\gamma}_{a} u + e^{\gamma t} T^{\gamma}_{v} h_{\gamma} a + e^{\gamma t} R_{\gamma}(a, v) \qquad$ avec $\quad v = e^{-\gamma t} u$

et on a alors besoin de comparer $e^{\gamma t} T^{\gamma}_{v} h_{\gamma} a$ à $P^{\gamma}_{u} a$. Néanmoins, on a :

Lemme 3.2.1 : étant donnés $s>0$, μ et ν entiers ≥ 0, il existe C telle que pour $\gamma\geq 1$, $a \in \Lambda^{\mu} \cap E^{s-\nu}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ et $u \in \Lambda^{\nu} \cap E^{s-\mu}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

(3.2.3) $\qquad a\,u = P^{\gamma}_{a} u + P^{\gamma}_{u} a + R^{\gamma}(a, u)$

avec :

(3.2.4) $\qquad \left|R^{\gamma}(a, u)\right|_{s,\gamma} \leq C\,\{\, \|a\|_{\mu} \left|u\right|_{s-\mu} + (\|u\|_{\nu} + \gamma^{\nu} \|u\|_{o}) \left|a\right|_{s-\nu} \}$

Remarque : la formule (3.2.4) n'est pas symétrique en a et u (pas plus que (3.1.5) ou (3.2.2)) ; il est essentiel pour nous d'avoir $\|a\|_{\mu}$ et non pas $\|a\|_{\mu} + \gamma^{\mu}\|a\|_{o}$. En partant de (3.2.2), on établit d'abord une formule du type de (3.2.3) avec $P^{\gamma}_{u} a$ remplacé par $P^{\gamma}_{u}\{\, e^{\gamma t}\, h_{\gamma}\, e^{-\gamma t}\, a \,\}$, et avec un reste qui vérifie (3.2.4), le terme $\gamma^{\nu} \|u\|_{o} \left|a\right|_{s-\nu}$ étant déjà présent. Il ne coûte rien alors de simplifier cette formule en y intoduisant $P^{\gamma}_{u} a$.

3.3 Paraproduits localisés : on se fixe $T_{o} < T_{1}$ et pour $T \geq T_{1}$ on rappelle que Ω_{T} désigne la bande $\{T_{o} < t < T\}$. On se fixe un entier m (très grand) et on note π_{T} un opérateur de prolongement par réflexion, de $\Lambda^{\mu}(\Omega_{T})$ dans $\Lambda^{\mu}(\mathbb{R}^{n+1})$ pour $0 \leq \mu \leq 2m$, de norme majorée indépendemment de T. On peut faire en sorte que l'opérateur $\pi'_{\gamma,T}\, u = \chi_{\gamma}(t)\, \pi_{T} u$ soit borné de $E^{s}_{\gamma}(\Omega_{T})$ dans $E^{s}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ pour $|s| \leq 2m$, de norme majorée indépendemment de $\gamma \geq 1$ et $T \geq T_{1}$, $\chi_{\gamma}(t)$ étant une fonction de la forme $\chi(\gamma\,(t - T_{o}))$ où $\chi(t)$ vaut 1 pour $t \geq 0$ et 0 pour $t \leq -1$.

On définit alors les paraproduits :

(3.3.1) $\qquad P^{\gamma,T}_{a} u = P^{\gamma}_{\pi_{T} a}\, (\pi'_{\gamma,T}\, u)\big|_{\Omega_{T}}$

Cette définition est justifiée par le fait suivant :

Lemme 3.3.1 : soit μ entier, $0 \leq \mu \leq m$, et soit $s \in [-\mu\ ,\ m]$. Alors il;existe une constante C telle que : si $a \in \Lambda^{\mu}(\Omega_{T})$, $b \in \Lambda^{\mu}(\mathbb{R}^{n+1})$, $u \in E^{s}_{\gamma}(\Omega_{T})$ et $v \in E^{s}_{\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ vérifient $b = a$ et $v = u$ sur Ω_{T} , alors la différence w entre $P^{\gamma,T}_{a} u$ et la restriction à Ω_{T} de $P^{\gamma}_{b} v$ est dans $E^{s+\mu}_{\gamma}(\Omega_{T})$ et :

(3.3.2) $\qquad \left|w\right|_{s+\mu,\gamma,T} \leq C\,\{ \|\pi_{T} a - b\|_{\mu} \left|u\right|_{s,\gamma,T} + \|a\|_{\mu,T} \left|\pi'_{\gamma,T} u - v\right|_{s,\gamma} \}$

On peut résumer les principales propriétés du paraproduit $P^{\gamma,T}$ dans l'énoncé suivant :

Théorème 3.3.2 : *i)* pour $a \in \Lambda^o(\Omega_T)$ et $|s| \leq m$, $P_a^{\gamma,T}$ opère de $E_\gamma^s(\Omega_T)$ dans lui même et :

$$|P_a^{\gamma,T} u|_{s,\gamma,T} \leq C \, \|a\|_{o,T} \tag{3.3.3}$$

ii) pour $a \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ et $b \in \Lambda^\mu(\Omega_T)$ avec $0 \leq \mu \leq m$, $P_a^{\gamma,T} \circ P_b^{\gamma,T} - P_{a\,b}^{\gamma,T}$ opère de $E_\gamma^{s-\mu}(\Omega_T)$ dans $E_\gamma^s(\Omega_T)$ pour $0 \leq s \leq m$ et :

$$| P_a^{\gamma,T} \circ P_b^{\gamma,T} - P_{a\,b}^{\gamma,T} |_{s,\gamma,T} \leq C\{\|a\|_{\mu,T} \|b\|_{o,T} + \|a\|_{o,T} \|b\|_{\mu,T}\} \, |u|_{s-\mu,\gamma;T} \tag{3.3.4}$$

iii) pour $a \in \Lambda^1(\Omega_T)$, $s \in [0, m]$ et $|\alpha| \leq s+1$, le commutateur $[\partial_y^\alpha, P_a^{\gamma,T}]$ opère de $E_\gamma^s(\Omega_T)$ dans $E_\gamma^{s-|\alpha|+1}(\Omega_T)$ et :

$$| [\partial_y^\alpha, P_a^{\gamma,T}] \, u |_{s-|\alpha|+1,\gamma,T} \leq C \, \|a\|_{1,T} \, |u|_{s,\gamma,T} \tag{3.3.5}$$

iv) pour $a \in L^\infty(\Omega_T)$ tel que $b = \partial_n a \in L^\infty(\Omega_T)$, $[\partial_n , P_a^{\gamma,T}] = P_b^{\gamma,T}$.

v) pour $a \in \Lambda^\mu \cap E_\gamma^{s-\nu}(\Omega_T)$ et $u \in \Lambda^\nu \cap E_\gamma^{s-\mu}(\Omega_T)$ avec $0 < s \leq m$, μ et ν entiers $\in [0,m]$, $w = a\,u - P_a^\gamma u + P_u^\gamma a \in E_\gamma^s(\Omega_T)$ et :

$$|w|_{s,\gamma,T} \leq C\{ \|a\|_{\mu,T} \, |u|_{s-\mu,\gamma,T} + (\|u\|_{\nu,T} + \gamma^\nu \, \|u\|_{o,T}) \, |a|_{s-\nu,\gamma,T} \} \tag{3.3.6}$$

vi) pour $a \in \Lambda^1(\Omega_T)$, $u \in E_\gamma^o(\Omega_T)$ et $0 \leq j < n$, $a \partial_j u - P_a^{\gamma,T} \partial_j u \in E_\gamma^o(\Omega_T)$ et

$$| a \partial_j u - P_a^{\gamma,T} \partial_j u |_{o,\gamma,T} \leq C \, \|a\|_{1,T} \, |u|_{o,\gamma,T} \tag{3.3.7}$$

Les différentes constantes C ci-dessus sont indépendentes de $\gamma \geq 1$ et $T \geq T_1$.

3.4 Paralinéarisation : nous utilisons les résultats précédents pour paralinéariser le système (2.5.1). Introduisons d'abord quelques notations. La matrice $A_n(a,\theta)$ a été définie en (2.1.6), et par hypothèse, pour $\theta_o = \mu(a, \theta')$, elle a un noyau de dimension 1. On notera $A'_n(a, \theta')$ la matrice $A_n(a,\theta)$ prise pour la valeur de $\theta_o = \mu(a, \theta')$. Il existe des matrices $V(a, \theta')$ et $W(a,\theta')$ telles que :

$$W A'_n V^{-1} = J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.4.1}$$

On se donne maintenant $T_o < T_1$, $T \geq T_1$, $M > 0$ et (a,u,f,ϕ) C^∞ sur $\overline{\Omega}_T$ solution de (2.1.4) (2.1.5). On note $\theta = \partial_y \phi$, $A_j = A_j(a)$, $A_n = A_n(a,\theta)$, $V = V(a,\theta')$ etc. Pour $0 \leq j < n$, on définit $B_j = (\partial_n \phi) W A_j V^{-1}$ (en convenant que $A_o = Id$), et on introduit l'opérateur :

$$L^{\gamma,T} = J \partial_n + \sum_{j=0}^{n-1} P_{B_j}^{\gamma,T} \partial_j \tag{3.4.2}$$

Enfin on note :

(3.4.3) $$z = \frac{\partial_n u}{\partial_n \phi} \quad ; \quad \zeta = Vz \quad ; \quad \phi' = \phi - \phi_o \quad ; \quad u' = P_V^{\gamma,T} u \ - \ P_\zeta^{\gamma,T} \phi'$$

Théorème 3.4.1 : il existe C, indépendante de $\gamma \geq 1$ et $T \geq T_1$, telle que si (a, ϕ) vérifie (2.5.3), alors $f' = L^{\gamma,T} u'$ vérifie :

(3.4.4) $$|f'|_{s,\gamma,T} \leq C\{\ |u|^*_{s,\gamma,T} + |f|_{s,\gamma,T} + K(|a|_{s,\gamma,T} + \gamma|\phi'|^*_{s,\gamma,T})\}$$

où

(3.4.5) $$K = \|u\|^*_{3,T} + \|f\|^*_{2,T}$$

Remarque : ce théorème s'appuie sur la remarque fondamentale de S.Alinhac [A 3] [A 4], suivant laquelle le linéarisé de (2.1.4) s'exprime à l'aide de l'inconnue $u - z\phi$. Quand on "para"-linéarise (2.1.4) ou (2.5.1), on voit donc apparaitre la fonction $u - P_z\phi$, et la fonction u' définie en (3.4.3) apparait naturellement après multiplication par P_V.

4. Schémas des preuves

4.1 Estimations d'energie : on se place sous les hypothèses du théorème 2.5.1 et avec les notations du paragraphe 3.4, on introduit l'opérateur :

(4.1.1) $$L = J\partial_n + \sum_{j=0}^{n-1} B_j \partial_j$$

Cet opérateur est hyperbolique symétrique et si v s'annule pour t voisin de T_o, on a :

(4.1.2) $$\gamma |v|_{o,\gamma,T} \leq C\ |Lv|_{o,\gamma,T}$$

où C ne dépend que de M (pour lequel on a (2.5.3))

Le théorème 3.3.2 permet de comparer Lv à $L^{\gamma,T}v$ et on en déduit que l'estimation (4.1.2) est encore vraie, avec une nouvelle constante C, pour l'opérateur $L^{\gamma,T}$. Pour s entier, en commutant cet opérateur aux dérivations ∂_y^α pour $|\alpha| \leq s$ grâce au théorème 3.3.2, on en déduit une estimation du type :

(4.1.3) $$\gamma\ |v|_{s,\gamma,T} \leq C\{\ |v|_{s,\gamma,T} + |L^{\gamma,T}v|_{s,\gamma,T}\}$$

4.2 Preuve de (2.5.7) : il suffit d'utiliser le théorème de paralinéarisation 3.4.1, d'appliquer (4.1.3) à la fonction u', et d'employer l'estimation suivante qui résulte des règles de calcul énoncées au théorème 3.3.2 :

(4.2.1) $$\gamma|u|_{s,\gamma,T} \leq C\{\gamma|u'|_{s,\gamma,T} + |u|_{s,\gamma,T} + \gamma\ \|\partial_n u\|_{0,T} |\phi'|_{s,\gamma,T}\}$$

4.3 Estimation de la dérivée normale : notons ζ_1 la première composante de ζ (défini en (3.4.3)), et posons $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$. Si on note W' la matrice constituée des $N-1$ dernières lignes de W, on a :

$$\zeta' = W'\{f - \partial_t u - \sum_{j=1}^{n-1} A_j \partial_j u\} \tag{4.3.1}$$

alors que ζ_1 est solution d'une équation de transport :

$$\partial_t \zeta_1 + \sum_{j=1}^{n-1} q_j\, \partial_j \zeta_1 + e\, \zeta_1 = H \tag{4.3.2}$$

où les q_j sont des fonctions de $(a, \partial_y \phi)$, e une fonction de $(a, \partial_y a, \partial_y \phi, \partial_y^2 \phi)$ et H une expression qui fair intervenir $(a, \partial_y a, \partial_n a, \partial_y \phi, \partial_y^2 \phi)$ et aussi $(\partial_n f, \partial_y u, \zeta', \partial_y \zeta')$.

Avec des inégalités de type "Gagliardo - Nirenberg", (4.3.1) fournit directement l'estimation :

$$\gamma |\zeta'|_{s-2,\gamma,T} \leq |\zeta'|_{s-1,\gamma,T} \leq C\{|f|_{s-1,\gamma,T} + |u|_{s,\gamma,T} + K|(a, \partial_y \phi)|_{s-1,\gamma,T}\} \tag{4.3.3}$$

On a aussi :

$$|H|_{s-2,\gamma,T} \leq C\{|\partial_n f|_{s-2,\gamma,T} + |u|_{s-1,\gamma,T} + |\zeta'|_{s-1,\gamma,T} + K(|(a, \partial_y \phi)|_{s-1,\gamma,T} + |\partial_n a|_{s-2,\gamma,T})\} \tag{4.3.4}$$

En commutant (4.3.2) au dérivations tangentielles, on obtient (en supposant toujours que u est nul pour t voisin de T_o) :

$$\gamma\, |\zeta_1|_{s-2,\gamma,T} \leq C\{|\zeta_1|_{s-2,\gamma,T} + |H|_{s-2,\gamma,T} + K\,|(a, \partial_y \phi)|_{s-1,\gamma,T}\} \tag{4.3.5}$$

En regroupant ces estimations, on aboutit finalement à (2.5.8), ce qui termine la démonstration du théorème 2.5.1.

La preuve de la proposition 2.5.2 se fait de manière similaire à partir de la relation (4.3.1) et de l'équation de transport (4.3.2).

4.4 Prolongement des solutions : notons (u, ϕ) une solution de (2.1.4) (2.1.5) sur Ω_0 avec u et $\phi - \phi_o$ appartenant à $\Lambda^{3,1} \cap E^{s,1}(\Omega_0)$ et vérifiant (2.3.2). On choisit un prolongement v_o de u et on considère le schéma itératif :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_\nu = \mu(c, v_\nu, \partial'_y \psi_\nu) \\ \psi_\nu \,|_{t<0} = \phi \end{cases} \tag{4.4.1}$$

$$\begin{cases} \partial_t v_{\nu+1} + \sum\limits_{1 \leq j < n} A_j(c, v_\nu)\, \partial_j v_{\nu+1} + A_n(c, v_\nu, \partial_y \psi_\nu) \dfrac{\partial_n v_{\nu+1}}{\partial_n \psi_\nu} = F(c, v_\nu) \\ v_{\nu+1} \,|_{t<0} = u \end{cases} \tag{4.4.2}$$

Le point fondamental consiste à montrer, à l'aide des résultats du paragraphe 2.5, qu'il existe $T>0$, tel que la suite $(v_\nu\,,\,\psi_\nu - \phi_o)$ soit bornée dans $\Lambda^{3,1}\cap E^{s,1}(\Omega_T)$. La convergence dans $L^2(\Omega_T)$ résulte du lemme 2.6.1. On en déduit la convergence dans E^σ pour $\sigma < s$, puis la convergence des dérivées normales grâce à (4.3.1) (4.3.2). Le première partie du théorème 2.3.1 est donc démontrée.

La seconde partie de ce théorème en résulte alors de manière classique, en utilisant à nouveau les estimations a-priori du théorème 2.5.1

4.5 Régularité conormale :

□ Un résultat analogue à la proposition 2.5.2, montre que, pour $s > s_o+1$, $u \in \Lambda^4(\Omega_T)$ et que la régularité Λ^2 de $\partial_n u$ se propage.

□ On introduit $u_1 = \rho(x_n)\,\{\partial_n\,\phi\}^{-1}\,\partial_n u$ qui est solution d'une équation de la forme :

(4.5.1) $$L(a, \partial_y\,\phi)\,u_1 = f_1$$

où $a = (c, u)$, $L(a, \partial_y\,\phi)$ est l'opérateur intervenant en (2.5.1), et f_1 vérifie :

(4.5.2) $$|f_1|^*_{s-1,\gamma,T} \leq C\,|u_1|^*_{s-1,\gamma,T} + H$$

H ne dépendant que de quantités déjà estimées. Reprenant la paralinéarisation et les estimations d'énergie, on montre alors que :

(4.5.3) $$u_1 \in \Lambda^{3,1} \cap E^{s-1,1}\,(\Omega_T)$$

□ De même, $u_2 = \rho(x_n)\,\{\partial_n\,\phi\}^{-1}\,\partial_n u_1$ est solution d'une équation de la forme $L(a, \partial_y\,\phi)\,u_2 = f_2$, et on montre que :

(4.5.4) $$u_2 \in \Lambda^{2,1} \cap E^{s-2,1}\,(\Omega_T)$$

□ Enfin, on introduit $u_3 = \rho(x_n)\,\{\partial_n\,\phi\}^{-1}\,\partial_n u_2$ qui est, lui aussi, solution d'une équation de la forme $L(a, \partial_y\,\phi)\,u_3 = f_3$. Si on note $\dagger\,.\,\dagger_{s,\gamma}$ la norme de $F^{s,1}_\gamma$, alors on a une estimation de la forme :

(4.5.5) $$\dagger f_3 \dagger_{s-3,\gamma,T} \leq C\,\dagger u_3 \dagger_{s-3,\gamma,T} + H$$

où H ne dépend que de quantités déjà estimées. Le décalage de régularité entre les coefficients de $L(a, \partial_y \phi)$ et u_3 est maintenant suffisant pour appliquer une méthode directe d'estimation, et on conclut que $u_3 \in F^{s-3,1}(\Omega_T)$.

□ On transporte les informations concernant les u_j, $j=1,2,3$, aux $(\rho\partial_n)^j u$, et le théorème 2.3.2 en résulte.

Bibliographie

[A 1] S.Alinhac : Evolution d'une onde simple pour des équations non linéaires générales ; actes des journées E.D.P. Saint Jean de Monts (1985).

[A 2] S.Alinhac : Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires ; Ann. Sc. de l'E.N.S., àparaître.

[A 3] S.Alinhac : Existence d'ondes de raréfaction pour des écoulements isentropiques ; Séminaire Ecole Polytechnique 86-87.

[A 4] S.Alinhac : Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels ; preprint.

[B 1] J.M.Bony : Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, Ecole Polytechnique, 79-80

[B 2] J.M.Bony : Propagation et interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Proc. Int. Cong. math., Warszawa, (1983) pp. 1133-1147.

[B 3] J.M.Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Ann. Sc. E.N.S., 14 (1981) pp. 209-246.

[J.R] J.L.Joly - J.Rauch : High frequency semi-linear oscillations ; Congrès pour le 60 ème anniversaire de P.D.Lax, Berkeley (1986).

[Ma 1] A.Majda : The stability of multidimensional shock fronts ; Mem. Amer. Math. Soc., n° 275 (1983).

[Ma 2] A.Majda : The existence of multidimensional shock fronts ; Mem. Amer. Math. Soc., n° 281 (1983).

[Mé 1] G.Métivier : the Cauchy problem for semi-linear hyperbolic systems with discontinuous data ; Duke Math. J., 53 (1986) pp. 983-1011.

[Mé 2] G.Métivier : Propagation, interaction and reflection of discontinuous progressing waves for semi-linear systems ; Amer. J. of Math., à paraître.

[Mé 3] G.Métivier : Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation en dimension deux d'espace ; Trans. Amer. Math. Soc., 296 (1986) pp.431-479.

[Mo] A.Mokrane : Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires ; Thèse 3ème cycle Rennes (1987).

[R.R] J.Rauch - M.Reed : Bounded stratified and striated solutions of hyperbolic systems ; in Nonlinear Partial Differential Equations and their applications ; Séminaire Collège de France , H.Bezis - J.L.Lions Eds, Pittman Publishers.

I R M A R
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex