Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Laubin

Paramétrix 2-microlocales de la diffraction

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 16, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A16_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PARAMETRIX 2-MICROLOCALES DE LA DIFFRACTION

P. LAUBIN

Exposé n°XVI

19 AVRIL 1988

1.Introduction

1.1. Le problème

Nous étudions la structure 2-microlocale de la paramétrix du problème de Dirichlet pour un opérateur du second ordre, au voisinage des points diffractifs (ou glissant). Le problème modèle qui est étudié est le problème de Dirichlet pour l'opérateur des ondes à l'extérieur (ou l'intérieur) d'un ouvert strictement convexe.

Soit M une variété réelle à bord analytique de dimension n et P un opérateur du second ordre à coefficients analytiques sur M. On suppose que le bord ∂M n'est pas caractéristique pour P et que le symbole principal de P est réel. Soit $x_o \in \partial M$. Quitte à multiplier et à conjuguer P par des fonctions qui ne s'annulent pas en x_o, on peut trouver des coordonnées analytiques réelles au voisinage de x_o telles que M soit donné par $x_n \geq 0$, ∂M par $x_n = 0$ et

$$P(x,D) = D^2_{x_n} + R(x,D_{x'}) \quad , \quad x = (x',x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

L'opérateur R est du second ordre et à coefficients analytiques dans $U' \times]-a,a[$ où U' est un voisinage ouvert de $x'_o \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $a > 0$. On pose $\Omega = U' \times]0,a[$ et $\partial\Omega = U' \times \{0\}$. Désignons par

$$p(x,\xi) = \xi_n^2 + r(x,\xi')$$

le symbole principal de P.

On suppose que l'opérateur tangentiel $R(x',0,D_{x'})$ est de type principal réel. Plus précisément, on suppose que

$$\partial_{\xi'} r_o \neq 0 \quad \text{si} \quad r_o = 0$$

où $r_o(x',\xi') = r(x',0,\xi')$.

Nous considérons des solutions $u \in D'(\Omega)$ du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dans l'espace cotangent au bord de Ω, les régions elliptique, hyperbolique et glancing sont définies par

$$\left\{\begin{matrix}\mathcal{E}\\ \mathcal{H}\\ \mathcal{G}\end{matrix}\right\} = \{(x',\xi') \in \dot{T}^*(\partial\Omega) : r_o(x',\xi') \left\{\begin{matrix}>\\ <\\ =\end{matrix}\right\} 0\} .$$

Nous considérons la région diffractive

$$\mathcal{G}_+ = \{(x',\xi') \in \mathcal{G} : \partial_{x_n} r(x',0,\xi') < 0\}$$

et la région glissante

$$\mathcal{G}_- = \{(x',\xi') \in \mathcal{G} : \partial_{x_n} r(x',0,\xi') > 0\}.$$

Dans le cadre analytique, les résultats de propagation des singularités microlocales au points de $\mathcal{G}_\pm$ ont été obtenus par Sjöstrand, [14]. Ces résultats prouvent que les singularités analytiques se propagent dans l'ombre contrairement aux singularités C_∞, [4,12,13]. Lebeau, [10], a montré dans la cas général que la transition a lieu pour les singularités Gevrey 3. Le point de vue 2-microlocal que nous considérons ici permet des constructions complètes et explicites de paramétrix contrairement au point de vue microlocal. De plus, grâce aux relations liant premier et second front, on peut déduire les théorèmes de propagation du premier front à partir des résultats 2-microlocaux obtenus.

1.2. Description des résultats

Les ensembles $\mathcal{G}_+$ et $\mathcal{G}_-$ sont des variétés involutives de codimension 1. Nous pouvons donc étudier le second front d'onde de la dérivée normale des solutions sur $V_o = \mathcal{G}_+$ ou $\mathcal{G}_-$. Si u est une solution du problème de Dirichlet, on peut définir

$$WF^{(2)}_{a,V_o}(u) = WF^{(2)}_{a,V_o}(D_{x_n}u_{|x_n=0}) \subset T_{V_o}(T^*\partial\Omega).$$

Le second front d'onde est étudié dans [9,10], [7] et nous en rappelons la définition dans la section 3. Nous décrivons la construction de paramétrix 2-microlocales du problème de Dirichlet en tout point de $\mathcal{G}_+$ ou de $\mathcal{G}_-$ et nous en déduisons les théorèmes de propagation du premier et du second front d'onde analytique.

Puisque V_o est de codimension 1 et que le second front d'onde est conique, on peut distinguer en tout point ρ'_o de V_o deux directions normales. On définit la direction normale ν elliptique (resp. hyperbolique) à V_o en ρ'_o par la condition $dr_o(\rho'_o).\nu > 0$ (resp. < 0).

Dans le cas diffractif, on peut encore introduire la variété

$$V = \{\exp(sH_p)(x',0,\xi',0) \, : \, (x',\xi') \in V_o \, , \, s > 0\} \subset T^*(\Omega).$$

Le flot hamiltonien de p définit une transformation symplectique pour tout s, donc V est une sous-variété involutive de $T^*(\Omega)$ de codimension 2. Nous pouvons donc aussi définir le second front d'onde analytique de u

$$WF^{(2)}_{a, V_o}(u) \subset T_V(T^*\Omega)$$

sur V. Puisque Pu = 0, on a

$$WF^{(2)}_{a, V}(u) \subset T_V(\Sigma)$$

où

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*(\Omega) : p(x,\xi) = 0\}$$

en vertu du théorème de Sato-Hörmander 2-microlocal. Ainsi, en tout point de V, seules deux directions normales à V peuvent appartenir à $WF^{(2)}_{a, V_o}(u)$ car V est de codimension 1 dans Σ. La définition des normales elliptique et hyperbolique s'étend par continuité dans $T_V(\Sigma)$ au voisinage de $x_n = 0$. De plus, les normales elliptique et hyperbolique se propagent dans Ω le long des courbes bicaractéristiques de p en vertu des théorèmes de propagation du second frond d'onde dans Ω.

Dans le cas glissant, il n'y a pas d'analogue à la variété V car les courbes bicaractéristiques issues de $\mathcal{G}_-$ quittent $U\times[\,0,a[$.

Dans le cas diffractif, le résultat principal de propagation des singularités que nous démontrons est le suivant.

Théorème 1.1. *On suppose que* u *est une distribution dans* Ω *solution du problème de Dirichlet et que* $\rho'_o = (x'_o, \xi'_o) \in \mathcal{G}_+$. *Alors, pour tout* $s \neq 0$ *assez petit, la direction normale hyperbolique (resp. elliptique) à* V_o *en* ρ'_o *appartient à* $WF^{(2)}_{a, V_o}(u)$ *si et seulement si la direction normale hyperbolique (resp. elliptique) à* V *dans* Σ *en*

$$\exp(sH_p)(x'_o,0,\xi'_o,0)$$

appartient à $WF^{(2)}_{a, V}(u)$.

Ce théorème exprime que le second front d'onde analytique ne se propage pas dans l'ombre contrairement au premier front. En ce qui concerne la propagation, il n'y a pas ici de différence entre les directions normales hyperboliques et elliptiques. La différence entre les deux cas réside dans les fonctions poids qui estiment la solution asymptotique dans $x_n > 0$. Dans le cas elliptique, le poids est diminué par un terme de l'ordre de μ^3 dès que $x_n > 0$.

Comme corollaire, le théorème 1.1 fournit une version unifiée des théorèmes de propagation dans l'ombre du premier front d'onde, Sjöstrand [14].

Corollaire 1.2. *On suppose que* u *est une distribution dans* Ω *solution du problème de Dirichlet et que* $\rho'_o = (x'_o, \xi'_o) \in \mathcal{G}_+$. *S'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\rho'_o \in WF_a(\partial_{x_n} u_{|x_n=o}) \text{ et } \exp(sH_p)(x'_o, 0, \xi'_o, 0) \notin WF_a u \text{ si } 0 < s < \varepsilon,$$

alors il existe $\eta > 0$ *tel que*

$$\exp(sH_{r_o})(\rho'_o) \in WF_a(\partial_{x_n} u_{|x_n=o}) \quad \text{si } |s| < \eta.$$

Dans le cas glissant, nous prouvons le résultat de propagation suivant.

Théorème 1.3. *On suppose que* u *est une solution du problème de Dirichlet et que* $\rho'_o \in \mathcal{G}_-$. *Alors*

(i) *la direction normale elliptique à* V_o *en* ρ'_o *n'appartient pas au second front d'onde analytique de* u *le long de* V_o,

(ii) *si la direction normale hyperbolique à* V_o *appartient à* $WF^{(2)}_{a,V_o}(u)$ *en* ρ'_o, *alors il existe* $\varepsilon > 0$ *telle qu'elle appartienne à* $WF^{(2)}_{a,V_o}(u)$ *en* $\exp(sH_{r_o})(\rho'_o)$ *pour tout* s *tel que* $|s| < \varepsilon$.

Le second front d'onde analytique côté hyperbolique se propage donc le long du rayon glissant contrairement au côté elliptique. Comme corollaire, on obtient la propagation du premier front d'onde.

Corollaire 1.4. *On suppose que* u *est une solution du problème de Dirichlet* (1.1) *et que* $\rho'_o \in \mathcal{G}_-$. *Alors si*

$$\rho'_o \in WF_a(\partial_{x_n} u_{|x_n=o})$$

il existe $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\exp(sH_{r_o})(\rho'_o) \in WF_a(\partial_{x_n} u_{|x_n=o}) \quad \text{si } |s| < \varepsilon.$$

2.Phases de Fourier-Bros-Iagolnitzer de seconde espèce

2.1. Phases de F.B.I. adaptées à une variété involutive

Les phases de Fourier-Bros-Iagolnitzer (F.B.I.) sont des fonctions holomorphes qui permettent de caractériser les singularités microlocales des distributions. Le formalisme de ces phases a été introduit par Sjöstrand [15]. Nous décrivons ici une classe de phases qui dépendent d'un petit paramètre supplémentaire et caractérisent les singularités 2-microlocales sur le modèle des phases de première espèce. Cette classe est suffisamment large pour fournir des solutions 2-microlocales des équations de l'eiconal rencontrées dans les constructions de solutions asymptotiques. Nous pouvons ainsi dans la section 3 décrire la géométrie 2-microlocale de la diffraction par des fonctions phases. Comme souvent dans l'étude des équations aux dérivées partielles, cette description est une des clés de la construction des paramétrices.

Une phase de F.B.I. de première espèce près d'un point (y_o,η_o) de $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ est une fonction holomorphe φ dans un voisinage de $(z_o,y_o)\in \mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n$ telle que

$$\partial_y\varphi(z_o,y_o)=-\eta_o\,,\quad \mathcal{J}\partial_y^2\varphi(z_o,y_o)>0\quad \text{et}\quad \mathrm{dtm}\,\partial_z\partial_y\varphi(z_o,y_o)\neq 0.$$

Si φ est une phase de F.B.I. et z est assez proche de z_o, il existe un point réel unique y(z) au voisinage de y_o tel que

$$\mathcal{J}(\partial_y\varphi)(z,y(z))=0.$$

On pose

$$\eta(z)=-\partial_y\varphi(z,y(z))\quad \text{et}\quad \rho(z)=(y(z),\eta(z)).$$

On introduit encore la fonction poids

$$\Phi(z)=-\mathcal{J}\varphi(z,y(z))$$

qui est strictement plurisousharmonique au voisinage de z_o. On vérifie qu'il existe $c>0$ tel que

$$-\mathcal{J}\varphi(z,y)\leq\Phi(z)-c|y-y(z)|^2$$

si y est réel. De plus, la fonction $\mathbb{C}^n\ni z\to\rho(z)\in T^*\mathbb{R}^n$ est une transformation symplectique au voisinage de z_o si $\mathbb{C}^n$ est muni de la 2-forme $\frac{2}{i}\overline{\partial}\partial\Phi(z)$ et $T^*\mathbb{R}^n$ de la forme symplectique usuelle.

Soit χ une transformation symplectique de $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ au voisinage d'un point (y_0, η_0) telle que $\chi(y_0, \eta_0) = (x_0, \xi_0)$ et ψ un phasage de χ. Le graphe de χ au voisinage de $(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0)$ est donc donné par

$$\{((x,\partial_x \varphi(x,y,\theta)), (y, -\partial_y \varphi(x,y,\theta))) : x,y,\theta \text{ réels}, \partial_\theta \varphi(x,y,\theta) = 0\}.$$

Alors, la fonction

$$\varphi(z,y) = \underset{(x,\theta)}{vc} \{\tfrac{i}{2}(z-x)^2 + \psi(x,y,\theta)\}$$

est une phase de F.B.I. au voisinage de (z_0, y_0), $z_0 = x_0 - i\xi_0$, telle que $\rho(z_0) = (y_0, \eta_0)$, $\Phi(z) = \frac{1}{2} |\mathcal{J} z|^2$ et $\{((\mathcal{R}z, -\mathcal{J}z), (y(z),\eta(z))) : z \text{ voisin de } z_0\}$ est le graphe de χ au voisinage de $((x_0, \xi_0),(y_0, \eta_0))$.

Considèrons une sous-variété involutive V de $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ de codimension k et ρ_0 un point de V. Le résultat ci-dessus permet de construire des phases de F.B.I. adaptées à V au sens suivant.

Définition 2.1. Soit V une sous-variété involutive de $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ de codimension k et ρ_0 un point de V. On écrit $z = (z',z'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Une phase φ de F.B.I. en (z_0, y_0) telle que $\rho(z_0) = \rho_0$ est *adaptée à* V *en* ρ_0 si $\mathcal{J} z'_0 = 0$ et $\rho(z) \in V$ si $\mathcal{J} z' = 0$. Pour des raisons de commodité nous imposerons également que $\Phi(z) = \frac{1}{2} |\mathcal{J} z|^2$. Puisque l'application $z \to \rho(z)$ est un changement de variables, $(\mathcal{R}z',z'') \to \rho(\mathcal{R}z',z'')$ est un paramétrage de V au voisinage de ρ_0.

La phase φ fournit donc un paramétrage de V au moyen de la sous-variété involutive de $\mathbb{C}^n$ formée des points $(\mathcal{R}z',z'')$. Comme le montre le lemme suivant, le rang de la projection des feuilles bicaractéristiques de V sur la base $\mathbb{R}^n$ se lit sur la partie imaginaire du hessien de φ par rapport à z.

Lemme 2.2. *Soit* V *une sous-variété involutive de codimension* k *de* $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$, $\rho_0 = (y_0, \eta_0)$ *un point de* V *et* φ *une phase de* F.B.I. *en* $(z_0, y_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$ *adaptée à* V, *de fonction poids* $|\mathcal{J} z|^2/2$ *et telle que* $\rho(z_0) = \rho_0$. *Alors, au voisinage de* z_0, *on a*

$$\mathcal{J}(\partial_z^2 \varphi)(z,y(z)) \geq 0$$

et

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{J}(\partial_{z'}^2 \varphi)(z,y(z))) = \mathrm{rg}(\pi_{F^*\rho(z)})$$

si $\mathcal{J} z' = 0$, F *est la feuille bicaractéristique de* V *qui contient* $\rho(z)$ *et* π_F *est la projection de* F *sur* $\mathbb{R}^n$.

Soit φ une phase de F.B.I. dans un voisinage de $(z_o, y_o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$ et u est une distribution au voisinage de y_o. Suivant Sjöstrand [15], on introduit pour tout $\lambda > 0$ la fonction holomorphe

$$(Tu)(z, \lambda) = \int \chi(y)\, e^{i\lambda\varphi(z,y)}\, a(z, y, \lambda)\, dy$$

où $\chi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une fonction troncature égale à 1 au voisinage de y_o et a est un symbole analytique elliptique en (z_o, y_o). Il existe des constantes $M, m, r > 0$ telles que

$$|(Tu)(z,\lambda)| \leq \lambda^m e^{\lambda\Phi(z)} \quad \text{si} \quad \lambda > M \quad \text{et} \quad |z-z_o| < r.$$

Dans ces conditions, pour tout z_1 assez voisin de z_o, on a $\rho(z_1) \notin WF_a u$ si et seulement s'il existe des constantes $\varepsilon, r, M > 0$ telles que

$$|(Tu)(z,\lambda)| \leq e^{\lambda(\Phi(z)-\varepsilon)} \quad \text{si} \quad \lambda > M \quad \text{et} \quad |z-z_o| < r.$$

2.2. Phases de seconde espèce

Supposons que φ soit adaptée à une sous-variété involutive V de $\dot{T}^*\mathbb{R}^n$ de codimension k en $\rho_o = \rho(z_o)$. On utilise la décomposition $z = (z', z'')$ comme dans la définition 2.1. Suivant Lebeau [9] et Sjöstrand [15], introduisons la transformation de seconde espèce

$$(T^{(2)} u)(z,\mu,\lambda) = \int_{|y'-\mathcal{R}z'_o|<r} e^{-\lambda\mu^2(z'-y')^2/2(1-\mu^2)}\, Tu(y',z'',\lambda)dy'$$

où r, μ sont strictement positifs. Soit $\alpha' \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ égal à 1 au voisinage de $\{y' : |y'-\mathcal{R}z'_o| \leq r/2\}$ et égal à 0 dans $\{y' : |y'-\mathcal{R}z'_o| \geq r\}$. En effectuant le glissement complexe $y' \rightarrow y' + i\mu^2\alpha(y')\mathcal{J}z'$ dans l'intégrale, on voit que pour tout $C > 0$, il existe des constantes λ_o, $\mu_o > 0$ telles que

$$|(T^{(2)}u)(z,\mu,\lambda)| \leq \lambda^m e^{\lambda\mu^2|\mathcal{J}z'|^2/2 + \lambda|\mathcal{J}z|^2/2}$$

si

$$|\mathcal{R}z' - \mathcal{R}z'_o| < r/2,\ |z''-z''_o| < r,\ |\mathcal{J}z'| < C \ \text{ et } \ 0 < \mu < \mu_o,\ \lambda > \lambda_o.$$

Par définition des phases de F.B.I. adaptées à V, on a $\rho(z_1) \in V$ si z_1 est assez voisin de

z_o et $\mathcal{J} z'_1 = 0$. De plus le vecteur $\tau(z_1, \sigma'_1) = \partial_s \rho(z'_1 - is\sigma'_1, z''_1)_{|s=o}$ définit un élément non nul du fibré normal à V, $T_V(T^*\mathbb{R}^n)_{\rho(z_1)}$, pour tout $\sigma'_o \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Le second front d'onde analytique d'une distribution sur une sous-variété involutive est défini à partir des propriétés de décroissance de sa transformée de F.B.I. de seconde espèce.

Définition 2.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V une sous-variété involutive de $\dot{T}^*(\Omega)$. Si u est une distribution dans Ω, le *second front d'onde analytique de* u *sur* V est le sous-ensemble $WF^{(2)}_{a,V}(u)$ de $T_V(T^*\Omega)$ défini par la condition $\tau(z_1, \sigma'_1) \notin WF^{(2)}_{a,V}(u)$ s'il existe des constantes $\varepsilon, s, \mu_o > 0$ et une fonction décroissante f dans $]0, \mu_o[$ telles que

$$|(T^{(2)}u)(z,\mu,\lambda)| \leq \lambda^m e^{\lambda\mu^2 |\mathcal{J} z'|^2/2 + \lambda |\mathcal{J} z|^2/2}$$

si

$$|z' - (z'_1 - i\sigma'_1)| < s, \; |z'' - z''_1| < s, \; 0 < \mu < \mu_o \text{ et } \lambda > f(\mu).$$

On montre, en utilisant les opérateurs 2-microdifférentiels, que cette définition est indépendante de la phase et de l'amplitude qui interviennent dans la transformation de F.B.I. Par définition, le second front d'onde analytique de u sur V est un sous-ensemble fermé du fibré normal à V privé de la section nulle. Il est conique par rapport aux directions normales de V. Si V est conique, il est également conique par rapport aux variables de fibres deV. Sa projection sur V est incluse dans le front d'onde analytique de u, $\pi_V(WF^{(2)}_{a,V}\, u) \subset V \cap WF_a\, u$. En général, cette inclusion est stricte.

Considérons le cas où la projection π_F de la feuille qui contient ρ_o est de rang k. Dans ce cas la fonction

$$x' \rightarrow \frac{i\mu^2}{2(1-\mu^2)} (z' - x')^2 + \varphi(x', z'', y)$$

possède le point critique $x' = z'_o$ lorsque $(z, y) = (z_o, y_o)$ et $\mu = 0$. Ce point cririque est non dégénéré en vertu du lemme 2.2. Par le théorème de la phase stationnaire, on a

$$(T^{(2)} u)(z,\mu,\lambda) = \int \chi(y)\, e^{i\lambda\varphi_\mu(z,y)}\, a(z, y, \lambda, \mu)\, u(y)\, dy$$

où a est un symbole analytique paramétrique en μ. Dans le cas considéré, il est donc possible de caractériser le second front d'onde sans l'intervention d'une intégrale suplémentaire. Cette caractérisation est associée à une phase de première espèce et valable pour toutes les directions 2-microlocales.

Introduisons les phases de F.B.I. de seconde espèce adaptées à V. Elles ne caractérisent le second front qu'au voisinage d'une direction normale à V mais fournissent un outil moins rigide. Désignons par F_o la feuille bicaractéristique de V qui contient ρ_o. Nous supposons que le rang de la projection de F_o sur $\mathbb{R}^n$ en ρ_o est maximum donc égal à k. Cette hypothèse n'est pas une restriction importante et présente l'avantage d'éviter des fonctions phases singulières en $\mu = 0$. Dans les applications, elle exclut uniquement les cas où la propagation a lieu dans les variables ξ sans déplacement spatial.

Définition 2.4. Soit $\mu_o > 0$ et φ_μ une famille de fonctions holomorphes définies dans un voisinage fixe d'un point $(z_o, y_o) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$ pour tout $\mu \in]0, \mu_o[$. On dit que φ_μ est une *phase de* F.B.I. *de seconde espèce adaptée à* V *en un point*

$$\tau_o \in T_V(T^*\mathbb{R}^n)_{\rho_o}, \ \rho_o = (y_o, \eta_o),$$

si

(i) les fonctions φ_μ admettent le développement

$$\varphi_\mu(z,y) = \varphi_o(z'',y) + \mu^2\varphi_2(z,y) + \mu^3\varphi_3(z,y,\mu)$$

où les fonctions $\varphi_o, \varphi_2, \varphi_3$ sont holomorphes par rapport à z,y et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\varphi_3(z,y,\mu)| \leq C \quad \text{si} \quad 0 < \mu < \mu_o;$$

(ii) $\partial_y \varphi_o(z_o'', y_o) = -\eta_o$ et, pour z" proche de z_o'',

$$N_{z''} = \{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{J}(\partial_y\varphi_o)(z'',y) = 0\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k près de y_o, $\mathcal{J}\varphi_o$ est transversalement positif sur $N_{z''}$;

(iii) $V = \{(y, -\partial_y\varphi_o(z'',y)) : y \in N_{z''}, z'' \in \mathbb{C}^{n-k}\}$ au voisinage de ρ_o;

(iv) la fonction

$$N_{z_o''} \ni y \to \mathcal{J}\varphi_2(z_o, y)$$

possède un point critique non dégénéré en y_o de signature (k,0) et τ_o est la classe de

$$(0, -\mathcal{R}(\partial_y\varphi_2)(z_o, y_o)) \quad \text{dans} \quad T_V(T^*\mathbb{R}^n)_{\rho_o};$$

(v) $\mathrm{dtm}(\partial_{z'}\partial_y\varphi_2, \partial_{z''}\partial_y\varphi_o)_{(z_o, y_o)} \neq 0.$

Pour définir et étudier les propriétés du second front d'onde analytique sur une variété involutive, on peut se limiter aux phases du F.B.I. de seconde espèce qui sont des fonctions holomorphes de z, y et μ^2. Le cas plus général considéré dans la définition 2.4 est nécessaire dans la suite. On démontre que ces phases caractérisent encore $WF^{(2)}_{a,V}\,u$.

Examinons les conséquences de (i) - (v). La fonction $y \to \mathcal{I}\varphi_\mu(z,y)$ possède un point critique réel unique $y_\mu(z)$ si z est voisin de z_o et $0 < \mu < \mu_o$. Ce point critique est de signature (n,0), est une fonction continue de μ dans $[0, \mu_o[$ et on a $y_o(z_o) = y_o$. Par analogie avec le cas des transformations de première espèce, on pose

$$\eta_\mu(z) = -\partial_y\varphi_\mu(z,y_\mu(z)) \quad , \quad \rho_\mu(z) = (y_\mu(z), \eta_\mu(z))$$

et

$$\Phi_\mu(z) = -\mathcal{I}\varphi_\mu(z,y_\mu(z)).$$

On a $y_o(z) \in N_{z''}$ donc $\rho_o(z) \in V$ en vertu de (iii). La fonction $z \to \rho_o(z)$ est de rang 2n-k donc un paramétrage de V. De plus, ρ_o est indépendant de φ_3. Les feuilles bicaractéristiques de V sont données localement par

$$F_{z''} = \{(y, -\partial_y\varphi_o(z'',y)) : y \in N_{z''}\} \quad , \quad z'' \in \mathbb{C}^{n-k}.$$

Pour tout z voisin de z_o, $y_o(z)$ est le point critique de la fonction $N_{z''} \ni y \to \mathcal{I}\varphi_2(z,y)$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ assez proche de z_o, la fonction φ_μ définit une phase de F.B.I. de seconde espèce adaptée à V au point $\tau \in T_V(T^*\mathbb{R}^n)_{\rho_o(z)}$ si τ est la classe de

$$(0, -\mathcal{R}(\partial_y\varphi_2)(z,y_o(z)).$$

Par définition de la fonction poids, on a $-2i\partial_z\Phi_\mu(z) = (\partial_z\varphi_\mu)(z,y_\mu(z))$. En utilisant (i) on trouve $-2i\partial_{z'}\Phi_o(z) = 0$ donc Φ_o est une fonction de z'' uniquement.

Si φ_μ est une fonction holomorphe de z, y et μ^2 alors

$$\partial_{\mu^2}\rho_\mu(z)|_{\mu=0} = (0, -\mathcal{R}(\partial_y\varphi_2)(z,y_o(z)) \quad \text{dans} \quad T_V(T^*\mathbb{R}^n)_{\rho_o(z)}.$$

Dans ce cas la direction normale τ est donc définie par $\partial_{\mu^2}\rho_\mu(z)|_{\mu=0}$. Dans le cas général ce n'est pas toujours le cas.

Si φ est une phase de première espèce en (z_o, y_o) adaptée à V et φ_μ est la valeur critique de

$$x' \to \frac{i\mu^2}{2(1-\mu^2)} (z' - x')^2 + \varphi(x', z'', y)$$

alors φ_μ est une phase de seconde espèce adaptée à V en tout point (w_o, y_o) tel que $w_o'' = z_o''$ et $w_o' = z_o' - i\sigma_o'$, $\sigma_o' \neq 0$. On a ici

$$\rho_\mu(z) = \rho(\mathcal{R}z' + i\mu^2 \mathcal{J}z', z'')$$

et

$$\Phi_\mu(z) = \frac{\mu^2}{2} |\mathcal{J}z'|^2 + \frac{1}{2} |\mathcal{J}z''|^2.$$

Lorsque la projection des feuilles n'est pas de rang maximum, il est encore possible d'appliquer le théorème de la phase stationnaire pour tout μ srtictement positif fixé. Cependant la valeur critique obtenue est singulière en $\mu = 0$. Par exemple, dans le cas de la variété lagrangienne $V_o = \{(x', 0, 0, \xi'') : x' \in \mathbb{R}^k, \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}\}$, on peut prendre

$$\varphi(z, y) = \frac{i}{2} ((z' - y')^2 + y''^2) + z''.y''$$

et on trouve

$$\varphi_\mu(z, y) = \frac{i\mu^2}{2} (z' - y')^2 + \frac{i}{2\mu^2} y''^2 + z''.y''.$$

On a ici

$$- \mathcal{J}\varphi_\mu(z, y) = \frac{\mu^2}{2} |\mathcal{J}z|^2 - \frac{\mu^2}{2} |y' - \mathcal{R}z'|^2 - \frac{1}{2\mu^2} |y'' + \mu\mathcal{J}z''|^2.$$

3. Phases 2-microlocales de la diffraction

3.1. <u>Phases associés à l'hypersurface glancing</u>

Soit $\rho_o' = (x_o', \xi_o')$ un point de l'hypersurface $V_o = \{(x', \xi') \in \dot{T}^*(U) : r(x', 0, \xi') = 0\}$. On suppose que $\rho_o' \in \mathcal{G}_+ \cup \mathcal{G}_-$. Puisque $\partial_{x_n} r \neq 0$, il existe des fonctions S et h telles que

$$r(x, \xi') = -S(x, \xi')(x_n + h(x', \xi'))$$

au voisinage de $(x_o', 0, \xi_o')$. On a $S > 0$ au point $(x_o', 0, \xi_o')$ dans le cas diffractif et $S < 0$ dans le cas glissant. Puisque $\partial_{\xi'} r_o \neq 0$, on a aussi $\partial_{\xi'} h \neq 0$. Pour fixer les idées, nous supposons

$\partial_{\xi_1} h(x'_o, \xi'_o) > 0$. Au moyen d'une translation, on se ramène au cas où $x'_o = 0$. Posons $\sigma'_o = (0, \xi''_o)$. Le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} h(x', \partial_{x'} \psi_\mu (x',\eta')) = \mu^2 \eta_1 \\ \psi_\mu (0,x'',\eta') = x''.\eta'' \quad , \quad \partial_{x'} \psi_o (0,\sigma'_o) = \xi'_o , \end{array}\right.$$

possède une solution holomorphe au voisinage de $\mu = 0$ et $(x',\eta') = (0,\sigma'_o)$. Posons $w'_o = i\sigma'_o \in \mathbb{C}^{n-1}$. Le système

$$\left\{\begin{array}{l} h(y', \partial_{y'} \varphi_\mu (z',y') = i\mu^2 (y_1 - z_1) \\ \varphi_\mu (z',0,y'') = \frac{i}{2} (z''-y'')^2 , \partial_{y'} \varphi_o (w'_o,0) = \xi'_o \end{array}\right.$$

possède une solution holomorphe au voisinage de $\mu = 0$ et $(z',y') = (w'_o,0)$. Ici aussi, φ_μ est une fonction holomorphe de $(\mu^2 z_1, z'', y')$. On vérifie aisément que φ_μ est une phase de F.B.I. de seconde espèce adaptée à V_o en $(0, -\xi'_o)$ au voisinage de tout point $(z'_o, y'_o) = (i\eta'_o, 0)$ tel que $\eta'_o = (\eta_{o1}, \xi''_o)$, $\eta_{o1} \neq 0$. Dans le cas diffractif $(S > 0)$, φ_μ caractérise la normale hyperbolique si $\eta_{o1} > 0$ et la normale elliptique si $\eta_{o1} < 0$. Dans le cas glissant $(S<0)$, φ_μ caractérise la normale elliptique si $\eta_{o1} > 0$ et la normale hyperbolique si $\eta_{o1} < 0$.

3.2. Equations de l'eiconal

En prenant comme donnée de Cauchy les phases introduites ci-dessus, nous construisons des solutions 2-microlocales de l'équation de l'eiconal associée à P. Soit $G_\mu (x', \xi_n, \eta')$ la solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_n^2 + r(x', -\partial_{\xi_n} G_\mu, \partial_{x'} G_\mu) = 0 \\ G_\mu (x',0,\eta') = \psi_\mu (x',\eta') \end{array}\right.$$

définie au voisinage de $\mu = 0$, $(x', \xi_n, \eta') = (0,0,\sigma'_o)$. On vérifie aisément que

$$G_\mu (x', \xi_n, \eta') = \psi_\mu (x',\eta') + \mu^2 \eta_1 \xi_n - \frac{1}{3} a(x',\eta',\mu) \xi_n^3 + O(\xi_n^4)$$

où $-a$ posséde le signe de $\partial_{x_n} r$. Les valeurs critiques de $\xi_n \to x_n \xi_n + G_\mu$ s'écrivent

$$\phi_\mu^\pm(x',\ (x_n+\mu^2\eta_1)^{1/2},\eta',\mu) = \phi_{1,\mu}(x,\eta') \pm \frac{2}{3}\,\phi_{2,\mu}(x,\eta')^{3/2}$$

dans le cas diffractif et

$$\phi_\mu^\pm(x',\ (x_n+\mu^2\eta_1)^{1/2},\eta',\mu) = \phi_{1,\mu}(x,\eta') \pm \frac{2i}{3}\,\phi_{2,\mu}(x,\eta')^{3/2}$$

dans le cas glissant. Les fonctions $\phi_{1,\mu}$ et $\phi_{2,\mu}$ s'écrivent

$$\phi_{1,\mu}(x,\eta') = \psi_\mu(x',\eta') + f(x,\eta',\mu)(x_n+\mu^2\eta_1)^2 \quad \text{et} \quad \phi_{2,\mu}(x,\eta') = e(x,\eta',\mu)(x_n+\mu^2\eta_1)$$

où e et f sont des fonctions holomorphes et e est strictement positif en $(0, \eta'_o, 0)$. Par construction, les fonctions $\phi_\mu^\pm$ vérifient l'équation de l'eiconal

$$\begin{cases} (\partial_{x_n}\phi_\mu^\pm)^2 + r(x,\partial_{x'}\phi_\mu^\pm) = 0 \\ \phi_\mu^\pm\,|_{x_n=-\mu^2\eta_1} = \psi_\mu(x',\eta'). \end{cases}$$

De plus, en $x_n = 0$, $\phi_\mu^\pm$ ne diffère de ψ_μ que par un terme de l'ordre de μ^3. On écrit ϕ_μ pour ϕ_μ^+.

En général, on ne peut pas privilégier une des racines carrées de $x_n + \mu^2\eta_1$. Il y a cependant des cas où il est possible de fixer un tel choix. Nous supposerons toujours $x_n \geq 0$, $\mu > 0$ assez petits et (x',η') dans un petit voisinage complexe de $(0,\eta'_o) = (0,\eta_{o1}, \xi''_o) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ avec $\eta_{o1} \neq 0$. Si $\eta_{o1} > 0$, alors l'argument de $x_n + \mu^2\eta_1$ est toujours proche de 0 et le signe racine carrée désignera la racine dont la *partie réelle est positive.* Le même choix est possible si x_n est proche d'un nombre positif et μ^2 est petit par rapport à x_n. Lorsque $x_n = 0$ et $\eta_{o1} < 0$, le signe racine carrée désignera la racine dont la *partie imaginaire est positive.* Enfin, si $x_n > 0$, $\eta_{o1} < 0$ et μ^2 ne peut être choisi petit par rapport à x_n, une égalité où intervient la racine carrée de $x_n + \mu^2\eta$, sera valable à condition de prendre la même détermination partout dans la formule.

La fonction holomorphe

$$(y',\eta') \to G_\mu(x',\xi_n,\eta') - \phi_\mu(y', \mu\sqrt{\eta_1}, \eta') + \varphi_\mu(z',y')$$

possède un point critique non dégénéré au voisinage de (y'_o, η'_o) si $\mu > 0$ est assez petit. La valeur critique H_μ permet de construire une solution de l'équation de l'eiconal avec une donnée de Cauchy en $x_n = 0$. Les points critiques de $\xi_n \to x_n\xi_n + H_\mu(z',\xi_n,x')$ sont de la forme

$$\xi_n^{\pm} = \tilde{\xi}_n(z',x',\mu) \pm \sqrt{T(z',x,\mu)(x_n + \mu^2 b(z',x',\mu))} \;+\; S(z',x,\mu)(x_n + \mu^2 b(z',x',\mu))$$

où T positif dans le cas diffractif et négatif dans le cas glissant. La valeur critique θ_μ qui correspond à ξ_n^+ vérifie l'équation de l'eiconal

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_{x_n} \theta_\mu)^2 + r(x,\partial_{x'}\theta_\mu) = 0 \\ \theta_\mu(z',x',\mu\sqrt{b(z',x',\mu)}) = \varphi_\mu(z',x') . \end{array} \right.$$

3.3. Géométrie 2-microlocale

Nous ne pouvons plus traiter en parallèle le cas diffractif et le cas glissant. La raison évidente en est que, dans le cas diffractif, la courbe bicaractéristique de p issue de $(0,\xi_o')$ est incluse dans $x_n \geq 0$ tandis que dans le cas glissant elle quitte cet ensemble.

3.3.1. Cas diffractif

On désigne par V l'union des courbes bicaractéristiques de p issues de l'hypersurface glancing

$$V = \{\exp(sH_p)(x',0,\xi',0) \;:\; (x',\xi') \in V_o ,\, s > 0\}.$$

C'est une sous-variété involutive de codimension 2 de $T^*(U'\times]-a,a[)$ dans un voisinage de $(0,-\xi_o')$ car H_p est transverse à $\{(x',0,\xi',0) : r(x',0,\xi') = 0\}$. Les feuilles bicaractéristiques de V sont formées par les courbes bicaractéristiques de p issues d'une courbe bicaractéristique nulle de $r(x',0,\xi')$. Pour tout x_{on} posotif assez petit, on désigne par $V_{x_{on}}$ la projection sur $T^*\mathbb{R}^{n-1}$ de la section de V par l'hyperplan $x_n = x_{on}$. On définit ainsi une famille continue de variétés involutives de codimension 1.

Pour tout x_n strictement positif assez petit, θ_μ définit une phase de F.B.I. de seconde espèce adaptée à V_{x_n}. Désignons par $x_o'(z')$ le point réel qui rend $\partial_{x'}\varphi_\mu(z',x')$ réel et posons $\eta_o' = \partial_{x'}\varphi_\mu(z', x_o'(z'))$. Il existe une fonction $s = s(z',\sqrt{x_n},0)$ telle que

$$\rho_o(z',\sqrt{x_n}) = (x_o'(z',\sqrt{x_n}), x_n, \xi_o(z',\sqrt{x_n})) = \exp(sH_p)(x_o'(z'),0,\eta_o'(z'),0).$$

Proposition 3.1. *Si* $x_n > 0$ *est assez petit alors la fonction*

$$(z',x') \to \theta_\mu(z',x',(x_n+\mu^2 b(z',x',\mu))^{1/2})$$

est une phase de F.B.I. *de seconde espèce adaptée à* V_{x_n} *au point* $(z'_o, x'_o(z'_o, \sqrt{x_n}))$. *Dans le cas hyperbolique, le poids associé est* $\Psi_\mu(z') = \Phi_\mu(z')$ *et dans le cas elliptique, il vaut*

$$\psi_\mu(z') = \Phi_\mu(z') - \frac{2}{3}\mu^3 \frac{(-\mathcal{I}z_1)^{3/2}}{(-\partial_{x_n} r_o(\rho'_o(z')))^{1/2}} + O(\mu^4).$$

De plus, la fonction

$$(z,x) \to \theta_\mu(z',x',(x_n+\mu^2 b(z',x',\mu))^{1/2}) + \frac{i\mu^2}{2}(z_n - x_n)^2$$

est une phase de F.B.I. *de seconde espèce adaptée à* V *en tout point* $(z'_o, z_n, x'(z', \sqrt{\mathcal{R}z_n}, \mathcal{R}z_n)$ *si* $\mathcal{R}z_n > 0$ *est assez petit. Son poids est*

$$\psi_\mu(z') + \frac{\mu^2}{2}(\mathcal{I}z_n)^2 .$$

La direction normale à V *associée à cette phase est tangente à* $\Sigma = \{(x,\xi) : p(x,\xi) = 0\}$ *est définie par* $\mathcal{I}z_n = 0$.

Le fait que Ψ_μ soit plus petit que Φ_μ lorsque $\eta_{o1} < 0$ correspond à un gain de régularité dans la région elliptique. Toutefois, ce gain est plus faible que la décroissance exigée dans la définition du second front d'onde analytique.

3.3.2. Cas glissant

On suppose que $\partial_{x_n} r(0,\xi'_o) > 0$. Dans ce cas, les courbes bicaractéristiques de p issues des points diffractifs sont comprises dans $x_n \leq 0$. Dans le cas 2-microlocalement elliptique, $\eta_{o1} > 0$, le terme qui contient $(x_n + \mu^2 b)^{3/2}$ est purement imaginaire. Par contre, dans le cas hyperbolique, $\eta_{o1} < 0$, il est réel si x_n est petit par rapport à μ^2. Dans le reste de ce paragraphe, nous supposons $\eta_{o1} < 0$. Les fonctions $\phi^\pm_\mu$ sont alors réelles. Rappelons que dans ce cas, on désigne par $\sqrt{\eta}_1$ la racine carrée de η_1 de partie imaginaire positive. Posons

$$\varphi(x',y',\eta',\mu) = \phi^-_\mu(x',\mu\sqrt{\eta_1},\eta') - \phi^+_\mu(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta').$$

Si μ est positif et assez petit, on considère la variété lagrangienne associée à φ,

$$\Lambda_\mu = \{((x',\partial_{x'}\phi_\mu^-(x',\mu\sqrt{\eta_1},\eta'),(y',\partial_{y'}\phi_\mu^+(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta')) : x',y',\eta' \text{ réels},$$

$$\partial_{\eta'}\phi_\mu^-(x',\mu\sqrt{\eta_1},\eta') = \partial_{\eta'}\phi_\mu^+(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta')\}.$$

Pour tout $\mu > 0$, Λ_μ est le graphe d'une transformation symplectique de $T^*(U)$. Cette transformation ne diffère de l'identité que par un terme de l'ordre de μ. On peut caractériser cette transformation symplectique de $T^*(U)$ au moyen du flot de H_p.

Proposition 3.2. *Si* $(\tilde{\rho},\rho) \in \Lambda_\mu$, $\rho = (x',\xi')$, *alors* $\tilde{\rho}$ *est la projection sur* $T^*(U)$ *du point où la courbe bicaractéristique de* H_p *passant par* $(x',0,\xi',-\sqrt{-r_o(x',\xi')})$ *rencontre la surface* $x_n = 0$ *pour la seconde fois.*

On peut paraphraser la proposition 3.2 en disant que $\tilde{\rho}$ est obtenu à partir de ρ au moyen d'une réflexion. La transformation associée à Λ_μ correspond à un déplacement de l'ordre de μ. Pour obtenir un déplacement indépendant de μ, nous devons donc considérer $j = [c/\mu]$ réflexions.

Proposition 3.3. *On pose* $\varphi_1 = \varphi$ *et, pour tout entier* $j \geq 1$,

$$\varphi_{j+1}(x',y',\xi',\mu) = \underset{(z',\eta')}{\mathrm{vc}} \{\varphi(x',z',\eta',\mu) + \varphi_j(z',y',\xi',\mu)\}.$$

Alors, il existe des constantes $C,c,r,\delta,\mu_o > 0$ *telles que* φ_j *soit défini et holomorphe dans* $\{(x',y',\xi',\mu) : |x'| < r-jC|\mu|,\ |y'| < \delta,\ |\xi'-\eta'_o| < r,\ |\mu| < \mu_o,\ jC|\mu| < c\}$. *De plus, il existe des fonctions holomorphes* h_j *dans les mêmes ouverts telles que*

$$\varphi_j(x',y',\xi',\mu) = \psi_\mu(x',\xi') - \psi_\mu(y',\xi') + \mu^2 h_j(x',y',\xi',\mu)$$

et

$$h_j(x',y',\xi',0) = 0$$

$$\partial_\mu h_j(x',y',\xi',0) = -\frac{4i}{3}\xi_1^{3/2}(j-1/2)e^{3/2}(x',0,\xi',0) - \frac{2i}{3}\xi_1^{3/2}(y',0,\xi',0).$$

Il esxiste une constante C_1 *telle que*

$$|h_j| \leq jC_1|\mu| \quad , \quad |\partial_x h_j| \leq jC_1|\mu| \quad \text{et} \quad |\partial_{x'}^2 h_j| \leq (1+C_1|\mu|)^j - 1.$$

Enfin, pour tout entier k, $\partial_\mu^k h_j(x',y',\xi',0)$ *est un polynôme de degré* k *en* j *dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de* x',y',ξ'.

La proposition 3.3 montre que la fonction h_j , $j \geq 1$, est holomorphe dans le produit d'un voisinage de $(0,0,\eta'_o)$ indépendant de j et de $\{\mu \in \mathbb{C} : jC|\mu| \leq c\}$. En vertu des inégalités de Cauchy, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|\partial_\mu^k h_j\ (x',y',\xi',0)| \leq A^{1+k}\, k!j^k \quad , \quad k \in N, j \in \mathbb{N}_o .$$

On sait que $\partial_\mu^k h_j$ est un polynôme de degré k en j si $\mu = 0$. Cependant, cette inégalité n'implique pas de bonnes majorations sur les coefficients de ce polynôme. De fait, par exemple les polynômes

$$P_k(z) = (z-1)(z-2) \ldots (z-k) \quad , \quad k \geq 1$$

sont tels que

$$|P_k(j)| \leq j^k \quad , \quad j \in \mathbb{N}_o .$$

Cependant le terme indépendant de P_k vaut $(-1)^k k!$. Les coefficients des termes indépendants de $\partial_\mu^k h_j$ peuvent donc croître comme $(k!)^2$.

Ecrivons

$$\partial_\mu^k h_j\ (x',y',\xi',0) = \alpha_k\ (x',y',\xi')j^k + q_{k-1}\ (x',y',\xi',j)$$

où q_{k-1} est un polynôme de degré k-1 par rapport à j. Il résulte des estimations précédentes que $|\alpha_k\ (x',y',\xi')| \leq A^{1+k}\, k!$. De là,

$$|q_{k-1}\ (x',y',\xi',j)| \leq 2A^{1+k}\, k!j^k \quad , \quad j,k \in \mathbb{N}_o .$$

Le lemme suivant prouve l'existence d'une constante A_1 telle que

$$|q_{k-1}\ (x',y',\xi',j)| \leq A_1^{1+k}\, k!j^{k-1} \quad , \quad j,k \in \mathbb{N}_o .$$

Lemme 3.4. *Il existe une constante* $C_o > 0$ *telle que*

$$\sup_{j \in \mathbb{N}_o} \frac{|p_k(j)|}{j^k} \leq C_o^{1+k} \sup_{j \in \mathbb{N}_o} \frac{|p_k(j)|}{j^{k+1}}$$

pour tout polynôme p_k *de degré au plus égal à* k.

Ecrivons

$$\varphi_j(x',y',\xi',\mu) = \psi_\mu(x',\xi') - \psi_\mu(y',\xi') + \mu^3 j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu j)^{k-1}}{k!} \alpha_k(x',y',\xi')$$

$$+ \mu^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{k!} q_{k-1}(x',y',\xi',j) .$$

Vu les estimations qui précèdent, les séries du second membre convergent. La fonction

$$\sigma(x',y',\xi',t\ ) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} \alpha_k(x',y',\xi')$$

est holomorphe au voisinage de $(0,0,\eta'_o,0)$. Si $0 \leq r < \delta$ et $0 < \mu < \mu_o$, on a $\mu[t/\mu] = t + \mathcal{O}(\mu)$ donc

$$\varphi_{[t/\mu]}(x',y',\xi',\mu) = \psi_\mu(x',\xi') - \psi_\mu(y',\xi') + \mu^2 t\ \sigma(x',y',\xi',t) + O(\mu^3)$$

Posons

$$\varphi^{(j)}_\mu(z',x') = \underset{(y',\eta')}{vc} \{\varphi_j(x',y',\eta',\mu) + \varphi_\mu(z',y')\}.$$

on obtient

$$\varphi^{(j)}_\mu(z',x') = \varphi_\mu(z',x') + \mu^3 j\, \chi_\mu(z',x',\mu j) + O(\mu^3)$$

où χ_μ et une fonction holomorphe dans $\{(z',x',t,\mu) : |z'-z'_o| <, |x'| < r, |t| < \delta, |\mu| < \mu_o\}$.

Proposition 3.5. *Il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\tilde{\varphi}_\mu(z',x',t) = \varphi^{[t/\mu]}_\mu(z',x') = \varphi_\mu(z',x') + \mu^2 t\, \chi_\mu(z',y',t) + O(\mu^3)$$

soit une phase de F.B.I. *de seconde espèce adaptée à* V_o *si* $0 \leq t < \delta$. *La fonction poids associée à* $\tilde{\varphi}_\mu$ *est* Φ_μ *pour tout* t. *Si* $y'_\mu(z',t)$ *est le point réel tel que*

$$\mathcal{J}(\partial_{y'}\tilde{\varphi}_\mu)(z',y'_\mu(z',t),t) = 0$$

et

$$\rho'_\mu(z',t) = (y'_\mu(z',t), \partial_{y'}\tilde{\varphi}_\mu(z',y'_\mu(z',t),t'))$$

alors $\rho'_\mu(z',0) = \rho'_\mu(z')$, $t \to \rho'_o(z',t)$ *est une fonction analytique de* t, $\rho'_o(z',t)$ *se trouve sur la courbe bicaractéristique de* r_o *passant par* $\rho'_o(z')$ *pour tout* t *et*

$$\partial_{\xi'} r_o(\rho'_o(z')).\partial_t y'_o(z',t)_{|t=0} < 0.$$

Nous avons pu réordonner les séries qui apparaissent dans l'itération de la phase φ modulo des erreurs de l'ordre de μ^3. En général, il ne semble pas qu'il soit possible de réordonner les séries complètement suivant les puissances de μ et μj.

4. Parametrix 2-microlocales

4.1. Construction des solutions

En utilisant les phases construites dans la section 3, nous constuisons un opérateur E qui à tout élément de l'espace à poids de Sjöstrand $H_{-\mathcal{J}\varphi_\mu}$ associe une fonction Eu telle que

$$\begin{cases} P(x,D)\,(Eu)(z',x,\mu,\lambda) = O(e^{\lambda\Phi_\mu(z') - \varepsilon\lambda\mu^2}) \\ Eu(z',x',0,\mu,\lambda) = u(z',x',\lambda,\mu) + O(e^{\lambda\Phi_\mu(z') - \varepsilon\lambda\mu^2}). \end{cases}$$

La fonction φ_μ est la phase de F.B.I. adaptée à V_o construite ci-dessus et Φ_μ est sa fonction poids. La valeur critique par rapport à ξ_n qui apparaît dans la définition de θ_μ donne lieu ici à une intégration en ξ_n le long d'un chemin du plan complexe.

Nous cherchons Eu sous la forme

$$Eu(z',x,\mu,\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{2i\pi} \int e^{i\lambda x_n \xi_n}\, Ku(z',\xi_n,x',\mu,\lambda)\, d\xi_n$$

avec

$$Ku(z',\xi_n,x',\mu,\lambda)$$

$$= \mu^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n-1} \iint_{\Gamma_\mu(z',\xi_n,x')} e^{i\lambda(G_\mu(x',\xi_n,\eta') - \phi_\mu(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta'))}\, a(x',\xi_n,\eta',\mu,\lambda) u(z',y',\mu,\lambda)\, dy'd\eta'.$$

Le symbole a est défini au moyen d'équations de transport de telle façon que P(Eu) soit exponentiellement décroissant par rapport à λ. Le contour d'intégration Γ_μ passe par le point critique et est choisi de telle façon que l'intégrand soit exponentiellement décroissant par rapport à la fonction poids sur le bord. Dans le cas diffractif l'intégrale par rapport à ξ_n est calculée de $Re^{-i\pi/6}$ à $Re^{i\pi/2}$ où R est une constante positive et de $Re^{i\pi/6}$ à $Re^{5i\pi/6}$ dans le cas glissant.

Vu la forme du développement de G_μ par rapport à ξ_n, on obtient des solutions asymptotiques dont les données frontières font intervenir des fonctions d'Airy. La fonction Eu en $x_n = 0$ est donnée par

$$\mu^2\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n-1}\iint_{\Gamma_\mu(z',x')} e^{i\lambda(\phi_\mu(x',\mu\sqrt{\eta_1},\eta')-\phi_\mu(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta'))}\, q(x',\eta',\mu,\lambda)\, u(z',y',\mu,\lambda)\, dy'd\eta$$

où q s'exprime à partir de la fonction d'Airy et de sa dérivée. Dans le cas diffractif, on a

$$\begin{aligned} &q(x',\eta',\lambda,\mu)\\ &= \lambda^{1/6}\mu^{1/2}e^{i\pi/6}\,\tau_1(x',\eta',\mu,\lambda)\,\mathrm{Ai}(\phi_{2,\mu}(x',0,\eta')\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3})\, e^{-(2i\lambda/3)\,\phi^{3/2}_{2,\mu}(x',0,\eta')}\\ &\quad + \lambda^{1/6}\mu^{1/2}e^{-2i\pi/3}\,\tau_2(x',\eta',\mu,\lambda)\,\mathrm{Ai}'(\phi_{2,\mu}(x',0,\eta')\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3})\, e^{-(2i\lambda/3)\,\phi^{3/2}_{2,\mu}(x',0,\eta')} + O(e^{-\varepsilon\lambda}) \end{aligned}$$

où τ_1 et τ_2 sont des symboles analytiques classiques. La fonction Ai possède un développement asymptotique uniforme dans le secteur $|\arg z| < \pi$. Puisque

$$\phi_{2,\mu}(x',0,\eta') = \mu^2\eta_1 e(x',0,\eta',\mu)$$

et $\eta_1 e$ est proche d'un nombre réel non nul, on peut utiliser ce développement pour estimer q. On obtient

$$\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}\,(\eta_1 e(x',0,\eta',\mu))^{1/4}}\,(\tau_1(x',\eta',\mu,\lambda) + \mu(\eta_1 e(x',0,\eta',\mu,\lambda))^{1/2}\tau_2(x',\eta',\mu,\lambda) + O(1/\lambda\mu^3)).$$

Si $\eta_{o1} > 0$, on choisit la racine quatrième de $\eta_1 e$ dont l'argument est proche de 0 et si $\eta_{o1} < 0$ celle dont l'argument est proche de $\pi/4$. Il en résulte que q est un 2-symbole analytique elliptique au voisinage de $(0,\eta_o')$. Cependant q n'est pas un symbole classique. Il possède un développement asymptotique selon les puissances négatives de $\lambda\mu^3$.

On peut faire un calcul analogue dans le cas glissant. La fonction q est ici donnée par

$$\begin{aligned} &i\lambda^{1/6}\mu^{1/2}\tau_1(x',\eta',\mu,\lambda)\,\mathrm{Ai}(\phi_{2,\mu}(x',0,\eta')\lambda^{2/3})\, e^{(2\lambda/3)\,\phi^{3/2}_{2,\mu}(x',0,\eta')}\\ &\quad + \lambda^{-1/6}\mu^{1/2}\tau_2(x',\eta',\mu,\lambda)\,\mathrm{Ai}'(\phi_{2,\mu}(x',0,\eta')\lambda^{2/3})\, e^{(2\lambda/3)\,\phi^{3/2}_{2,\mu}(x',0,\eta')} + O(e^{-\varepsilon\lambda}). \end{aligned}$$

Dans le cas 2-microlocalement elliptique, $\eta_{o1} > 0$, l'argument des fonctions d'Airy est proche de l'axe réel positif et on peut encore utiliser le développement asymptotique de Ai. On obtient de nouveau 2-symbole analytique au voisinage de $(0,\eta'_o)$. Dans le cas 2-microlocalement hyperbolique, $\eta_{o1} < 0$, le développement de la fonction d'Airy n'est plus utilisable. Dans ce cas, nous recourons à l'identité

$$\mathrm{Ai}(z) = -\,\omega\,\mathrm{Ai}(\omega z) - \omega^2\,\mathrm{Ai}(\omega^2 z) \quad , \quad z \in \mathbb{C}\ , \ \omega = e^{2i\pi/3},$$

pour écrire $q = q_1 + q_2$ avec q_1 égal à

$$- i\,\omega\,\lambda^{1/6}\,\mu^{1/2}\,\tau_1(x',\eta',\mu,\ \lambda)\,\mathrm{Ai}(\omega\,\phi_{2,\mu}(x',0,\eta')\lambda^{2/3})\,e^{(2\lambda/3)\,\phi^{3/2}_{2,\mu}(x',0\,,\,\eta')}$$
$$- \omega^2\,\lambda^{-1/6}\mu^{1/2}\,\tau_2(x',\eta',\mu,\ \lambda)\ \mathrm{Ai}'(\omega\,\phi_{2,\mu}(x',0,\eta')\lambda^{2/3})\ e^{(2\lambda/3)\,\phi^{3/2}_{2,\mu}(x',0\,,\,\eta')}$$

et q_2 égal, à un terme exponentiellement décroissant près, à la même expression où on remplace ω par ω^2. Il est maintenant possible d'appliquer le développement asymptotique dans les expression de q_1 et q_2. Ces deux fonctions sont des 2-symboles elliptiques.

Dans le cas diffractif ou dans le cas glissant elliptique, l'opérateur frontière obtenu est un opérateur 2-microdifférentiel elliptique dans $H_{-\mathcal{J}\varphi_\mu,(z'_o,o)}$. Il peut être inversé dans cet espace. Dans le cas glissant hyperbolique, l'opérateur prend la forme

$$\mu^2\left(\frac{\lambda}{2\,\pi}\right)^{n-1}\iint_{\Gamma_\mu(z',x')} e^{i\lambda(\phi_\mu(x',\mu\sqrt{\eta_1},\eta') - \phi_\mu(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta'))}\, q_1(x',\eta',\mu,\lambda)\, u(z',y',\mu,\lambda)\, dy'd\eta$$
$$+\ \mu^2\left(\frac{\lambda}{2\,\pi}\right)^{n-1}\iint_{\Gamma_\mu(z',x')} e^{i\lambda(\phi^-_\mu(x',\mu\sqrt{\eta_1},\eta') - \phi^+_\mu(y',\mu\sqrt{\eta_1},\eta'))}\, q_3(x',\eta',\mu,\lambda)\, u(z',y',\mu,\lambda)\ dy'd\eta$$

et doit être considéré comme la somme d'un opérateur 2-microdifférentiel elliptique A et d'un opérateur Fourier-intégral 2-microlocal F_μ dont la transformation canonique est décrite par la proposition 3.3. On peut supposer que A = I. Tout revient alors à inverser $I + F_\mu$. Cette opération est réalisée en donnant un sens à l'opérateur

$$\sum_{0\le j<[c/\mu]} (-1)^j\,F^j_\mu$$

dans l'espace $H_{-\mathcal{J}\varphi_\mu,(z'_0,0)}$ pour $c > 0$ assez petit. L'erreur dans cette inversion s'exprime à partir de l'opérateur F_μ à la puissance $[c/\mu]$. Cet opérateur correspond à un déplacement fixe non nul lorsque μ tend vers 0. Les termes d'erreur correspondent donc à des singularités rejetées loin du point où est construite la parametrix. En utilisant cette inversion dans le cas glissant hyperbolique, on obtient le résultat suivant

Proposition 4.1. *Il existe un voisinage* V *de* (z'_0, x'_0) *dans* $\mathbb{C}^{2(n-1)}$ *et des constantes* $\varepsilon, \delta, a, \mu_0, \lambda_0 > 0$ *tels que, pour tout* $c > 0$ *assez petit,*

$$Eu(z',x',0,\mu,\lambda) = u(z',x',\mu,\lambda) + (-1)^{N-1} v_N(z',x',\mu,\lambda) + O(e^{\lambda\Phi_\mu(z') - \varepsilon\lambda\mu^2})$$

si $0 < \mu < \mu_0$, $\lambda\mu^3 > \lambda_0$, $N = [c/\mu]$ *et* $(z',x') \in V$ *avec*

$$|v_N(z',x',\lambda,\mu)| \leq Ce^{-\lambda\mathcal{J}\tilde{\varphi}_\mu(z',x',c) + a/\mu}$$

La fonction $\tilde{\varphi}_\mu$ *est la phase de* F.B.I. *de seconde espèce introduite dans la proposition* 3.5.

4.2. <u>Estimation des solutions</u>

Considérons tout d'abord le *cas diffractif hyperbolique*. Dans ce cas, la fonction b est proche d'un nombre réel positif, donc l'argument de $x_n + \mu^2 b$ est proche de 0 pour tout $x_n \geq 0$. Vu la structure des courbes de passage, seul le point ξ_n^+ contribue au comportement asymptotique. Par la définition de θ_μ dans ce cas, on trouve

$$(4.1) \qquad |Eu(z',x,\mu,\lambda)| \leq C\sqrt{\lambda\mu}\, e^{-\mathcal{J}\theta_\mu(z',x',\sqrt{x_n + \mu^2 b(z',x',\mu)})}$$

si $0 \leq x_n \leq r$, $|z'-z'_0| < r$, $|x'-x'_0| < r$, $0 < \mu < \mu_0$ et $\lambda\mu^3 > \lambda_0$. Si en outre x' est réel, on a

$$(4.2) \qquad |Eu(z',x,\mu,\lambda)| \leq C\sqrt{\lambda\mu}\, e^{\lambda\Phi_\mu(z') - c\lambda\mu^2 |x' - x'_0(z',\sqrt{x_n})|^2 + C\lambda\mu^3}.$$

Ceci montre que la solution est 2-microlocalement concentrée sur la courbe bicaractéristique de p sans propagation frontière.

Considérons le *cas diffractif elliptique*. La fonction b est ici proche d'un nombre réel négatif et l'argument de $x_n + \mu^2 b$ est quelconque. Si $x_n > c_0\mu^2$, l'argument de $x_n + \mu^2 b$ est inférieur en module à $\pi/2$. L'estimation (4.1) est donc valable. Dans le cas contraire, les deux points critiques peuvent contribuer mais l'estimation (4.2) reste valable lorsque x' est réel car les deux valeurs critiques ne diffèrent que par un terme de l'ordre de μ^3.

Considérons le *cas glissant elliptique*. La fonction b est de nouveau positive et l'argument de $x_n + \mu^2 b$ proche de 0. Vu la structure des courbes de passage, c'est le point critique ξ_n^+ d'argument proche de $\pi/2$ qui détermine le comportement asymptotique. Pour la fonction θ_μ définie dans ce cas, l'estimation (4.1) est donc valable. Si en outre x' est réel, on a

$$|Eu(z',x,\mu,\lambda)| \leq C\sqrt{\lambda\mu}\ e^{\lambda\Phi_\mu(z') - c\lambda\mu^2 |x' - y'_\mu(z')|^2 - \delta\lambda x_n^{3/2} + C\lambda\mu^3}\ .$$

La solution est ici concentrée en un point de la frontière et exponentiellement décroissante dès que x_n est strictement positif.

Considérons enfin le *cas glissant hyperbolique.* Comme dans le cas diffractif elliptique, la fonction b est proche d'un nombre réel négatif. Vu la structure des courbes de passage, seul le point critique ξ_n^+ d'argument proche de $\pi/2$ contribue au comportement asymptotique si x_n est supérieur à $c_o\mu^2$. Si $0 \leq x_n \leq c_o\mu^2$, les deux points critiques peuvent contribuer. L'inversion de l'opérateur frontière par une série de Neumann tronquée donne lieu à $[c/\mu]$ termes dans l'expression explicite de la paramétrix. Chacun de ces termes correspond aux singularités obtenues après un nombre fixe de réflexions. A la limite, on obtient des singularités sur une courbe de la frontière. Posons

$$\gamma_{b,\mu}(z') = \{y'_{\mu,j}(z') : 0 \leq j \leq c/\mu\} \quad , \quad 0 < \mu < \mu_o$$

où $y'_{\mu,j}(z')$ est le point réel qui rend $\partial_{y'}\varphi_\mu^{(j)}(z', y')$ réel. On obtient

$$|Eu(z',x,\mu,\lambda)| \leq C\ \sqrt{\lambda\mu}\ e^{\lambda\Phi_\mu(z') - c_1\lambda\mu^2 d^2(x',\gamma_{b,\mu}(z')) - \delta\lambda x_n^{3/2} + a/\mu + C\lambda\mu^3}$$

pour certaines constantes $C, c_1, \delta, a > 0$ si $0 \leq x_n < r$, $|z'-z'_o| < r$, $|x'-x'_o| < r$, x' réel, $0 < \mu < \mu_o$ et $\lambda\mu^3 > \lambda_o$. Ici la solution est concentrée sur une courbe frontière et exponentiellement décroissante dès que x_n est strictement positif.

Les théorèmes de propagation annoncés dans la section 1 s'obtiennent par des arguments de dualité qui utilisent ces solutions asymptotiques du problème de Dirichlet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Anderson, K.G. and R.B. Melrose, *Propagation of singularities along gliding rays.* Sém. Goulaouic-Schwartz 1, (1976-1977).

[2] Bros, J. and D. Iagolnitzer, *Support essentiel et structure analytique des distributions.* Sém. Goulaouic-Schwartz 18, (1975-1976).

[3] Eskin, G., *Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem.* J. Analyse Math. 32, 17-62 (1977).

[4] Friedlander, F.G. and R.B. Melrose, *The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays* II. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87, 97-120 (1977).

[5] Laubin, P., *Asymptotic solutions of hyperbolic boundary value problems with diffraction.* Nato Adv. Study Inst. on Adv. in microlocal analysis, Reidel Publ. Co., Dordrecht, 165-202 (1986).

[6] *Etude 2-microlocale de la diffraction.* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 4, 295-416 (1987).

[7] Laubin, P. and P. Esser, *Second analytic wave front set of the fundamental solutions of hyperbolic operators.* Comm. Part. Diff. Eq. 11(5), 459-482 (1986).

[8] Laurent, Y., *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe : opérateurs 2-microdifférentiels.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris-Sud, 1982.

[9] Lebeau, G, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes.* Ann. Inst. Fourier Grenoble 35(2), 145-216 (1985).

[10] *Deuxième microlocalisation à croissance.* Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 15, (1982-1983).

[11] *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction.* Comm. Part. Diff. Eq. 9(15), 1437-1494 (1984).

[12] Melrose, R.B., *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems.* Duke Math. J. 42, 605-635 (1975).

[13] Melrose, R.B. and J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems* I, II. Comm. Pure Appl. Math. 31, 593-617 (1978); 35, 129-168 (1982).

[14] Sjöstrand, J., *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems* I, II, III. Comm. Part. Diff. Eq. 5(1), 41-94 (1980); 5(2), 187-207 (1980); 6(5), 499-567 (1981).

[15] *Singularités analytiques microlocales.* Astérisque 95, 1-166 (1985).

Institut de Mathématiques
Université de Liège
4000 LIEGE (Belgique)