SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MICHAEL R. HERMAN

Existence et non existence de tores invariants par des difféomorphismes symplectiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 14, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A14_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

EXISTENCE ET NON EXISTENCE DE TORES INVARIANTS PAR DES DIFFEOMORPHISMES SYMPLECTIQUES.

Michael.R. HERMAN

Exposé n°XIV

19 JANVIER 1988

1. Introduction.

Nous proposons de discuter, dans cette annonce, de la généralisation de la théorie de Birkhoff, (sur les courbes invariantes par les difféomorphismes monotones de classe C^1 préservant les aires de l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{T}^1 \times \mathbf{R}$, cf. $[B_1]$ $[H_3]$, paragraphe 4) au cas des tores de dimension n invariants par les difféomorphismes symplectiques du fibré cotangent $\mathbf{A}^n \cong T^*(\mathbf{T}^n)$ du tore de dimension n.

Nous définissons au paragraphe 2 la propriété de monotonicité (ou de torsion) pour les difféomorphismes de $\mathbf{A}^n$. Pour pouvoir généraliser la théorie de Birkhoff aux tores invariants de dimension $n \geq 2$, nous montrons au paragraphe 5 qu'il faut se restreindre aux tores invariants lagrangiens ; ceux donnés par le théorème KAM le sont toujours (cf. 3.4) ; par ailleurs on ne considèrera que les tores homotopes à la section nulle de $T^*(\mathbf{T}^n)$.

La théorie de Birkoff ne se généralise pas lorsqu'on considère des perturbations (même C^∞ petites) d'un C^∞-difféomorphisme complètement intégrable de type monotone indéfini (cf. paragraphe 2 et paragraphe 6.1 pour les définitions) ; Cette difficulté, qui ne se produit que pour $n \geq 2$, est étudiée au paragraphe 6.

Nous définissons en 8.4 la notion de difféomorphisme symplectique monotone globalement positif. Nous annonçons au paragraphe 8 la généralisation du premier théorème de Birkhoff pour de tels difféomorphismes : les tores invariants lagrangiens (de classe C^0) qui sont des graphes vérifient certaines inégalités lipschitziennes. Nous annonçons au paragraphe 9 le résultat d'unicité suivant : étant donné un vecteur de rotation $\alpha \in \mathbf{R}^n$ tel que la translation correspondante de $\mathbf{T}^n$ soit minimale, il existe au plus un tore invariant lagrangien de classe C^0 qui soit un graphe, ayant toute orbite dense et admette α pour vecteur de rotation dans le revêtement universel.

Nous envisageons au paragraphe 14 une version perturbative du deuxième théorème de Birkhoff.

La théorie de Birkhoff permet d'obtenir toute une suite d'inégalités à priori pour les tores invariants cosntruits par le théorème KAM (que nous rappelons au paragraphe 3). Dans les paragraphes 10 à 12, nous en déduisons, exactement comme en dimension $n = 1$ ($[H_3]$), des théorèmes de non-existence de tores invariants lagrangiens de classe C^0 qui sont des graphes pour des familles d'exemples qui généralisent les difféomorphismes standards. Quand les perturbations sont trop importantes pour être compatibles avec les inégalités a priori mentionnées ci-dessus, les tores invariants lagrangiens de classe C^0 qui sont des graphes doivent disparaître (cf. paragraphe 11). Ce phénomène de disparition des tores invariants qui sont des graphes reste à l'heure actuelle mathématiquement inexpliqué, même pour $n = 1$ (cf. 11.4).

La théorie de Birkhoff et ses généralisations doivent être considérées comme un premier pas vers une étude globale (i.e. non perturbative) de l'existence des tores invariants (donnés perturbativement par le théorème KAM). Pour $n = 1$, cette théorie a permis aussi, grâce aux travaux de Birkhoff $[B_1]$ et J. Mather $[M_5]$ (voir aussi P. Le Calvez $[L_1]$) de donner une assez bonne description de la dynamique dans les zones d'instabilité de Birkhoff. Il semble beaucoup moins évident (cf. $[D_4]$) de généraliser ces résultats, qui s'appuient sur des propriétés de séparation par compacts connexes dans $\mathbf{A}$.

Les paragraphes 8 et 9 sont fortement inspirés par une lettre de J. Mather ([M_3]). Nous ne discuterons pas ici, des généralisations éventuelles des ensembles d' Aubry-Mather ([A_2], [M_1], [M_2], voir aussi l'exposé de Chenciner [C]) au cas $n \geq 2$; nous signalerons seulement une tentative de généralisation par D. Bernstein et A. Katok ([B-K], voir aussi [J_2]).

Les démonstrations complètes, ainsi que de nombreux autres résultats, seront inclues dans [H_6].

Je remercie Jean-Christophe Yoccoz de m'avoir aidé à améliorer considérablement le manuscrit et Claudine Harmide de l'avoir tapé avec grand soin.

2. Notations et définitions.

On note $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ le tore de dimension n, R_α la translation de $\mathbf{T}^n$: $\theta \mapsto \theta + \alpha$ par un vecteur $\alpha \in \mathbf{T}^n$.

On écrira $d\theta = d\theta_1 \otimes \cdots \otimes d\theta_n$ pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ ou la mesure de Haar de $\mathbf{T}^n$, et L^∞ pour l'espace $L^\infty(\mathbf{R}^n, d\theta, \mathbf{R})$.

On désigne par $T^*(\mathbf{T}^n)$ le fibré cotangent de $\mathbf{T}^n$; on pose $\mathbf{A} = T^*(\mathbf{T}^1)$, et on a canoniquement $\mathbf{A}^n \cong T^*(\mathbf{T}^n) \cong \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$.

Les coordonnées angles actions sur $\mathbf{A}^n$ sont notées (θ, r), avec $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$. On note $v = \sum_{j=1}^n r_j d\theta_j$ la 1-forme de Liouville et $w = -dv$ la forme symplectique canonique sur $\mathbf{A}^n$.

Un difféormorphisme F de classe C^1 de $\mathbf{A}^n$ est dit **symplectique** s'il vérifie $F^*w = w$ (ou encore la forme $F^*v - v$ est fermée). On dit que F est **exact symplectique**, ou **globalement canonique** si la forme $F^*v - v$ est exacte.

On note F^k l'itéré k-ieme ($k \in \mathbf{Z}$) d'un difféomorphisme F.

Définition.— *Un difféomorphisme symplectique L de $\mathbf{A}^n$ est dit* **complètement intégrable s'il est de la forme :**

$$L(\theta, r) = (\theta + \ell(r), r).$$

Le fait que L, de classe C^k, soit symplectique équivaut à ce qu'on ait $\ell(r) = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\ell}(r)$, avec $\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial r_n}\right)$, pour une fonction $\hat{\ell} \in C^{k+1}(\mathbf{A}^n, \mathbf{R})$.

Exemple. Si ℓ est de la forme $\ell(r) = Br$, avec $B \in M_n(\mathbf{R})$, L est symplectique si et seulement si B est symétrique (on notera ${}^tB$ la transposée d'une matrice B).

On note $Sp(2n)$ le groupe symplectique (réel) de $\mathbf{R}^{2n}$, J l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de $Sp(2n)$ (où 1 est la matrice unité de $M_n(\mathbf{R})$).

Soit F un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbf{A}^n$; on désigne par $DF(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ sa matrice jacobienne en x dans les coordonnées (θ, r), et par $(DF(x))^{-1}$ la matrice inverse (alors que $DF^{-1}(x)$ désigne la matrice jacobienne de F^{-1} en x). Dans l'écriture ci-dessus, a, b, c, d sont des applications continues de $\mathbf{A}^n$ dans $M_n(\mathbf{R})$.

On a, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, les équivalences suivantes

(2.0) $$DF(x) \in Sp(2n) \ ;$$

$\Updownarrow$

(2.1) $${}^tDF(x)J\ DF(x) = J \ ;$$

$\Updownarrow$

(2.2) $${}^tDF(x) \in Sp(2n) \ ;$$

$\Updownarrow$

(2.3) $$a(x){}^tb(x) = b(x){}^ta(x),\ c(x){}^td(x) = d(x){}^tc(x), a(x){}^td(x) - b(x){}^tc(x) = 1 \ ;$$

$\Updownarrow$

(2.4) $${}^ta(x)c(x) = {}^tc(x)a(x),\ {}^tb(x)d(x) = {}^td(x)b(x),\ {}^ta(x)d(x) - {}^tc(x)b(x) = 1 \ ;$$

$\Updownarrow$

(2.5) $$[DF(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} {}^td(x) & -{}^tb(x) \\ -{}^tc(x) & {}^ta(x) \end{pmatrix};$$

$\Updownarrow$

(2.6) F est un difféomorphisme symplectique.

Définitions.— *Un difféomorphisme F de classe C^1 de $\mathbf{A}^n$ est* **monotone** *si on a* $\det b(x) \neq 0$ *pour tout $x \in \mathbf{A}^n$.*

Un **tore** de classe C^k de $\mathbf{A}^n$ est l'image d'un plongement de classe C^k de $\mathbf{T}^n$ dans $\mathbf{A}^n$ (**on ne considèrera dans la suite que des tores de dimension** n). On désigne par j_T l'inclusion d'un tore T dans $\mathbf{A}^n$. Un tore T est **homotope à** $\{r = 0\}$ si on peut choisir le plongement ci-dessus homotope à l'inclusion canonique : $\mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^n \times \{0\} \subset \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{A}^n$. Un tore T est **lagrangien** s'il est de classe C^1 et $j_T^* w = 0$.

Si $\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ le tore graphe de ψ est désigné par $\Gamma_\psi = \{(\theta, \psi(\theta)), \theta \in \mathbf{T}^n\}$.

On munira toujours $\mathbf{R}^n$ de la norme euclidienne $\|(x_j)\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$; les matrices $a \in M_n(\mathbf{R})$ sont équipées de la norme d'opérateurs :

$$\|a\| = \sup_{\|v\|=1} \|av\| \ ,\ v \in \mathbf{R}^n.$$

Une application $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est **lipschitzienne** si on a $\sup\limits_{x \neq y} \frac{\|\psi(x) - \psi(y)\|}{\|x - y\|} < +\infty$.

3. Théorème des tores invariants KAM (pour Kolmogorov, Arnold, Moser).

Pour $x \in \mathbf{T}^1$, on pose $\|x\|_a = \operatorname*{Inf}_{p\in\mathbf{Z}} |\tilde{x}+p|$, où $\tilde{x}$ est un relèvement de x dans $\mathbf{R}$; pour $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbf{Z}^n$, on pose $|k| = \sum_{i=1}^n |k_i|$.

On dit que $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbf{T}^n$ satisfait à une condition diophantienne s'il existe $\gamma > 0$, $\beta \geq 0$ tels qu'on ait, pour tout $k \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$:

$$\| \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \|_a \geq \gamma |k|^{-n-\beta}. \tag{3.1}$$

On dit que $\tilde{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ satisfait à une condition diophantienne si c'est le cas pour son image dans $\mathbf{T}^n$.

On note CD l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{T}^n$ (resp. $\tilde{\alpha} \in \mathbf{R}^n$) qui satisfont à une condition diophantienne ; cet ensemble est de mesure de Haar totale, mais est maigre dans $\mathbf{T}^n$.

3.2 Théorème des tores invariants (KAM).—
Soient $L(\theta,r) = (\theta + \ell(r), r)$ un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{A}^n$, monotone et complètement intégrable, et soit $r_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $\ell(r_0) = \alpha$ satisfasse à une condition diophantienne ; il existe alors $k_0 \in \mathbf{R}_+^*$ et un voisinage V_L de L dans la C^{k_0}-topologie sur $C^{k_0}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^n)$ tels qu'à tout difféomorphisme $F \in V_L$ de classe C^∞, exact symplectique, on puisse associer un plongement $\varphi : \mathbf{T}^n \to \mathbf{A}^n$ de classe C^∞ et un difféomorphisme h de classe C^∞ de $\mathbf{T}^n$ qui vérifient :
- *l'image $T = \varphi(\mathbf{T}^n)$ est un tore invariant par F, homotope à $\{r=0\}$;*
- *$h(0) = 0$;*
- *φ et h induisent l'identité en cohomologie ;*

$$h^{-1}\circ\varphi^{-1}\circ F \circ \varphi \circ h = R_\alpha. \tag{i}$$

De plus, l'application : $F \mapsto (\varphi, h)$ est continue dans la C^∞-topologie, et c'est même une "bonne" application de classe C^∞ au sens de Hamilton.

On exprime la relation (i) en disant que F/T est C^∞-conjugué à R_α ; "bonne" exprime la propriété que Hamilton appelle "tame" en anglais ; la C^{k_0}-toplogie sur $C^{k_0}(\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^n)$ est celle de la convergence C^{k_0} sur les compacts de $\mathbf{A}^n$.

3.3 La démonstration de ce théorème est relativement simple si on utilise par exemple le théorème des fonctions implictes de Hamilton ([H_1], [B_2]) ; nous renvoyons le lecteur à l'exposé de J.B. Bost ([B_2]) pour de très nombreuses références sur le sujet. Il est beaucoup plus délicat de montrer qu'il suffit de prendre $k_0 > 2(n+\beta)+1$ lorsque α vérifie (3.1) : voir [D_1], [D_2] en utilisant [S_1] ; voir [S_2] pour une approche un peu différente.

3.4 Le tore T obtenu par le théorème est lagrangien, comme le montre la proposition suivante.

Proposition.— *Soient F un difféomorphisme symplectique de classe C^1 de $\mathbf{A}^n$ et T un tore de classe C^1, invariant par F ; on suppose qu'il existe une translation ergodique R_α de $\mathbf{T}^n$ et un plongement φ de classe C^1 de $\mathbf{T}^n$ d'image T tels que $\varphi^{-1}\circ F\circ\varphi$ soit C^1-conjugué à R_α. Alors T est lagrangien.*

Démonstration. Ecrivons $h^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi \circ h = R_\alpha$, pour un difféomorphisme h de classe C^1 de $\mathbf{T}^n$. La 2-forme $j_T^* w$ est invariante par F ; la 2-forme $w_1 = h^* \varphi^* j_T^* w$ est donc invariante par R_α ; comme la translation R_α est minimale (i.e. toutes ses orbites sont denses dans $\mathbf{T}^n$), on en déduit que w_1 est constante, i.e. s'écrit $\sum_{i<j} c_{ij} d\theta_i \wedge d\theta_j$, $c_{ij} \in \mathbf{R}$. Par ailleurs, on a $w = -dv$, donc w_1 est exacte d'après la théorie des formes cobordables ([M_6]) ; finalement on a $w_1 = 0$ et $j_T^* w = 0$.

3.5. Question.— *Soient F un difféomorphisme symplectique de de $\mathbf{A}^n$, homotope à l'identité, et T un tore de classe C^1, homotope à $\{r = 0\}$, invariant par F tel que la restriction de F à T soit minimale (i.e. toutes ses orbites sont denses dans T). Le tore T est-il nécessairement lagrangien ?*

3.6 Soient F un difféomorphisme symplectique de $\mathbf{A}^n$, et x_0 un point fixe hyperbolique de F (i.e. on a $F(x_0) = x_0$ et $DF(x_0)$ n'a pas de valeur propre de module 1) ; alors les variétés stables $W_{x_0}^s$ et instable $W_{x_0}^u$ de F en x_0 sont des variétés lagrangiennes injectivement immergées dans $\mathbf{A}^n$.

3.7 Remarque.

Si un difféomorphisme symplectique F de classe C^1 de $\mathbf{A}^n$, homotope à l'identité, laisse invariant un tore lagrangien T de classe C^1, homotope à $\{r = 0\}$, alors F est exact symplectique ; un exemple d'A. Douady montre que ce n'est pas nécessairement le cas pour $n \geq 2$, lorsque T n'est pas lagrangien.

3.8 Le théorème 3.2 ci-dessus reste valable lorsqu'on affaiblit l'hypothèse faite sur L (d'être monotone et complètement intégrable) de la façon suivante ; on suppose que L est un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ de $\mathbf{A}^n$ vérifiant :

(3.9) L laisse invariant le tore $\mathbf{T}^n \times \{r_0\}$, et sa restriction à ce tore est une translation R_α avec $\alpha \in CD$;

(3.10) La matrice jacobienne $DL = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de L vérifie $\det \left(\int_{\mathbf{T}^n} b(\theta, r_0) d\theta \right) \neq 0$.

3.11 La version du théorème KAM ci-dessus permet de traiter la situation plus générale suivante ; soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ de $\mathbf{A}^n$, préservant un tore lagrangien T de classe C^∞ ; par un théorème de Weinstein ([A_1,p.411]) il existe un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ défini au voisinage de T dans $\mathbf{A}^n$ qui envoie T sur la section nulle $\mathbf{T}_0^n = \mathbf{T}^n \times \{0\}$ de $\mathbf{A}^n$; on peut donc supposer que $T = \mathbf{T}_0^n$.

Si la restriction $F/\mathbf{T}_0^n$ est de la forme $h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, avec $\alpha \in CD$ et un difféomorphisme de classe C^∞ h de $\mathbf{T}^n$, on peut conjuguer F par le difféomorphisme symplectique : $(\theta, r) \mapsto (h(\theta),\, {}^t(Dh(\theta))^{-1} r)$ de $\mathbf{A}^n$ et satisfaire ainsi à la condition (3.9). Si alors la condition (3.10) est vérifiée, on dit que F a sur T une **torsion normale non dégénérée.**

3.12 Dans la situation de 3.11, supposons que F ait sur T une torsion normale non dégénérée. A l'aide de formes normales ([D_4]) on montre que T est accumulé par des tores lagrangiens invariants $(T_j)_{j\in J}$ de classe C^∞, qui sont des graphes au-dessus de T ; de plus la restriction de F à un tore T_j est C^∞-conjuguée à une translation R_{α_j}, avec $\alpha_j \in CD$; le vecteur de rotation α est point de densité, pour la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^n$, de l'ensemble $(\alpha_j)_{j\in J}$, et chaque $x \in T$ est point de densité, pour la mesure de Haar sur $\mathbf{A}^n$, de l'union $\cup_{j\in J} T_j$.

Ces affirmations sur les tores invariants sont conséquence de 3.8, modulo l'emploi de formes normales le long de T (en utilisant l'hypothèse $\alpha \in CD$, voir [D_1], [D_3], [D_4]). Pour une démonstration élémentaire lorsque $n = 1$, voir [D_3] ; cf. également [P].

3.13 Remarque.

Soit F un difféomorphisme monotone exact symplectique de classe C^∞ de $\mathbf{A}$. En général (c.à.d. génériquement pour la topologie C^∞ uniforme), l'union K_F des tores invariants par F qui sont homotopes à $\{r = 0\}$ est une partie fermée de $\mathbf{A}$, nulle part dense dans $\mathbf{A}$. La mesure de K_F est positive lorsque F est une perturbation dans la C^∞-topologie d'un difféomorphisme L de classe C^∞, complètement intégrable et monotone. De plus, en notant $\tilde{\mathbf{A}}$ le revêtement universel de $\mathbf{A}$, $\tilde{K}_F$ l'image réciproque de K_F dans $\tilde{A}$ et $\tilde{F}$ un relèvement de F à $\tilde{\mathbf{A}}$, l'ensemble des nombres de rotation de $\tilde{F}$ dans $\tilde{K}_F$ est génériquement fermé et nulle part dense dans $\mathbf{R}$.

Posons $L(\theta, r) = (\theta + \ell(r), r)$; si la fonction ℓ vérifie :

$$\lim_{|r|\to+\infty} \left| \frac{d\ell(r)}{dr} \right| = +\infty,$$

et si l'on prend F de la forme $G_\varepsilon \circ L$, avec $G_\varepsilon(\theta, r) = (\theta, r + \varepsilon\varphi(\theta))$ pour une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ de moyenne nulle mais non identiquement nulle, alors l'ensemble K_{G_ε} est compact dans $\mathbf{A}$, donc de mesure finie, pour tout $\varepsilon \neq 0$.

Il semble par conséquent difficile de "dire", comme de nombreux auteurs le font, que "la plupart des tores invariants par L persistent pour de petites perturbations C^∞ de L".

4. La théorie de Birkhoff ($n = 1$).

Soit F un difféomorphisme monotone de classe C^1 de $\mathbf{A}$. En 1920, Birkhoff a esquissé la démonstration des deux théorèmes suivants ([B_1], voir [F], [H_3], [L_2] pour des démonstrations complètes).

Théorème 1.— *Supposons qu'il existe une fonction continue $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ dont le graphe $\Gamma_\psi \subset \mathbf{A}$ soit un tore invariant par F. Alors la fonction ψ est lipschitzienne et on a :*

$$\|D\psi\|_{L^\infty} \leq \sup_{x\in\Gamma_\psi} (|b^{-1}(x)a(x)|,\ |d(x)b^{-1}(x)|),$$

où $DF(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$.

Dans le second théorème, on suppose que F est symplectique (hypothèse qui n'est pas nécessaire pour le théorème 1), et vérifie :

$$\sup_{x \in \mathbf{A}} (|b^{-1}(x)a(x)|,\ |d(x)b^{-1}(x)|) < +\infty.$$

Théorème 2.— *Tout tore C de classe C^0, homotope à $\{r = 0\}$ et invariant par F est le graphe d'une fonction continue $\psi \in C^0(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$.*

Birkhoff montre en fait beaucoup plus ($[B_1]$) ; nous n'en parlerons pas ici car ces résultats, qui utilisent des propriétés de séparation des compacts connexes dans $\mathbf{A}$, ne peuvent se généraliser pour $n \geq 2$, cf.$[D_4]$.

5. Première difficulté.

On prend $n = 2$ et on considère le difféomorphisme $L(\theta, r) = (\theta + r, r)$ de $\mathbf{A}^2$, qui est monotone et complètement intégrable.

Soient un rationnel $p/q \in \mathbf{Q}$, $\hat{\psi}$ une fonction $1/q$ périodique non constante dans $C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$, et ψ la fonction : $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (p/q, \hat{\psi}(\theta_1))$ de $\mathbf{T}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. Le graphe $T = \Gamma_\psi$ de ψ est alors un tore invariant par L, mais n'est pas lagrangien. Considérons la partie, invariante par L, $E = \{(\theta, r) \in \mathbf{A}^2, r_1 = p/q\}$ de $\mathbf{A}^2$, la projection $p : (\theta_1, \theta_2, p/q, r_2) \mapsto (\theta_1, r_2)$ de E sur $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{R} = E_1$, et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L/E} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ E_1 & \longrightarrow & E_1 \\ (\theta_1, r_2) & \longmapsto & (\theta_1 + p/q, r_2) \end{array}$$

Si A est une partie de E_1 invariante par $R_{p/q} \times Id$, alors $p^{-1}(A)$ est invariante par L. On obtient ainsi des tores de classe C^∞, homotopes à $\{r = 0\}$, invariants par L, qui ne sont pas des graphes. Le même phénomène a lieu si on remplace L par n'importe quel difféomorphisme monotone complètement intégrable de $\mathbf{A}^n$, dès que $n \geq 2$.

Conclusion.— *La théorie de Birkhoff ne peut se généraliser pour $n \geq 2$ que si l'on impose aux tores invariants d'être lagrangiens.*

Question.— *Un tore, homotope à $\{r = 0\}$, invariant par un difféomorphisme symplectique de classe C^∞, générique (pour la C^∞-topologie uniforme sur $\mathbf{A}^n$), homotope à l'identité, est-il toujours lagrangien ?*

L'exemple suivant montre que l'hypothèse d'être homotope à l'identité est nécessaire pour que la réponse à la question ci-dessus ne soit pas négative.

Soit $A \in GL(n, \mathbf{Z})$ une matrice hyperbolique (par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n = 2$; le difféomorphisme $F : (\theta, r) \mapsto (A\theta, {}^tA^{-1}r)$ de $\mathbf{A}^n$ est symplectique ; le tore $\mathbf{T}_0^n = \mathbf{T}^n \times \{0\}$ est un ensemble invariant hyperbolique pour F. Par conséquent, une perturbation de classe C^1 de F laisse invariant un tore voisin de $\mathbf{T}_0^n$ ($[S_3]$), mais celui-ci n'est en général ni de classe C^1, ni C^0-lagrangien.

6. Deuxième difficulté : difféomorphismes complètement intégrables indéfinis.

6.1. Soit $L(\theta,r)=(\theta+\ell(r),r)$ un difféomorphisme monotone complètement intégrable. Pour tout $r\in\mathbf{R}^n$, la forme quadratique $Q_L(r)\;:v\in\mathbf{R}^n\mapsto{}^tvD\ell(r)v$ est donc non dégénérée.

Lorsque $n=1$, la forme quadratique $Q_L(r)$ est soit définie positive pour tout $r\in\mathbf{R}^n$, soit définie négative pour tout $r\in\mathbf{R}^n$; on dit alors que L est **monotone positif** ou **négatif**.

En écrivant $\ell(r)=\frac{\partial}{\partial r}\hat{\ell}(r)$, dire que L est monotone positif signifie que $\hat{\ell}$ est strictement convexe.

Lorsque $n\geq 2$, on dit que L est **monotone indéfini** si la forme quadratique $Q_L(r)$ est indéfinie pour tout $r\in\mathbf{R}^n$. La théorie de Birkhoff ne se généralise pas pour les tores invariants, mêmes lagrangiens, par un difféomorphisme monotone indéfini.

6.2. Théorème $[H_6]$.— *Soit L un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{A}^n$, complètement intégrable et monotone indéfini ; soit aussi $r_0\in\mathbf{R}^n$. Il existe alors une suite $(F_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{A}^n$, exacts symplectiques, vérifiant les propriétés suivantes :*

- *la suite (F_j) converge vers L dans la C^∞-topologie ;*
- *F_j laisse invariant un tore lagrangien T_j de classe C^∞, homotope à $\{r=0\}$;*
- *la restriction de F_j à T_j est C^∞-conjuguée à une translation R_{α_j} de $\mathbf{T}^n$ telle que $\alpha_j\in CD$;*
- *la torsion normale de F_j sur T_j est non dégénérée ;*
- *la suite des tores $(T_j)_{j\in\mathbf{N}}$ converge vers $\mathbf{T}^n\times\{r_0\}$ dans la topologie de Haussdorff ;*
- *pour aucun $j\in\mathbf{N}$, T_j n'est un graphe au-dessus de $\mathbf{T}^n\times\{0\}$ (i.e. la projection : $(\theta,r)\mapsto\theta$ n'est pas injective sur T_j).*

6.3 Un exemple sur $\mathbf{A}^2$

Posons $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, et définissons un difféomorphisme complètement intégrable monotone indéfini de $\mathbf{A}^2$ par la formule $L_B(\theta,r)=(\theta+Br,r)$.

Pour toute fonction $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^1,\mathbf{R})$, considérons le difféomorphisme $G_\varphi:(\theta_1,\theta_2,r_1,r_2)\to(\theta_1,\theta_2,r_1+\varphi'(\theta_1),r_2)$ de $\mathbf{A}^2$, et le composé $F=G_\varphi\circ L_B$, qui est exact symplectique.

Cherchons les tores invariants par F qui sont des graphes $\Gamma_{\hat{\psi}_a}$ d'une fonction $\hat{\psi}_a$ de la forme :

$$\hat{\psi}_a(\theta_1,\theta_2)=(\psi_a(\theta_1),a),$$

où $a\in\mathbf{R}$ et $\psi_a\in C^\infty(\mathbf{T}^1,\mathbf{R})$.

L'invariance de $\Gamma_{\hat{\psi}_a}$ s'écrit :

$$\psi_a \circ R_a - \psi_a = \varphi' \circ R_a. \tag{6.4}$$

Lorsque a satisfait à une condition diophantienne, l'équation (6.4) admet une unique solution $\psi_a \in C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ de moyenne nulle.

Si φ n'est pas constante, les tores $\Gamma_{\hat{\psi}_a}$ ne vérifient pas d'inégalités a priori lorsqu'on laisse varier a dans CD.

En effet, prenons $\varphi'(\theta_1) = \varepsilon \sin(2\pi\theta_1)$, avec $\varepsilon > 0$. Pour $a \notin \mathbf{Z}$, on a :

$$\psi_a(\theta_1) = -\varepsilon(\sin \pi a)^{-1} \sin(2\pi(\theta_1 + \frac{a}{2})).$$

On a donc :

$$\psi_a(-\frac{a}{2}) = 0, \ \lim_{a \to 0} \|\psi_a\|_{C^0} = +\infty, \tag{6.5}$$

$$\lim_{a \to 0} |\psi_a'(-\frac{a}{2})| = +\infty.$$

On peut choisir des difféomorphismes symplectiques de classe C^∞ H_a de $\mathbf{A}^n$, tendant vers l'identité dans la C^∞-topologie lorsque a tend vers 0, de manière que le tore $H_a(\Gamma_{\hat{\psi}_a})$, invariant par $H_a \circ F \circ H_a^{-1}$, ne soit pas un graphe.

Si la fonction φ vérifie :

(6.6) Aucun coefficient de Fourier de φ n'est nul.

On montre en utilisant (6.4) et [G] les propriétés suivantes :

(i) *presque tout point de $\mathbf{A}^2$ appartient à un tore invariant par F ;*

(ii) *les points de $\mathbf{A}^2$ dont l'orbite par F est non bornée dans $\mathbf{A}^2$ forment une partie G_δ-dense de $\mathbf{A}^2$.*

Les exemples F considérés ci-dessus sont "**presque**" **complètement intégrables**, l'étude des tores invariants se ramenant à (6.4).

On peut donner de nombreux autres exemples $[H_6]$: par exemple un produit $F \times L_1$, avec F comme ci-dessus et L_1 complètement intégrable. De façon similaire, des Hamiltoniens "presque" complètement intégrables sur $\mathbf{A}^{2n}$ sont donnés par des formules de la forme :

$$H(\theta, r) = \sum_{j=1}^{n} r_j r_{j+n} + \varepsilon\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

avec $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$.

Les perturbations de difféomorphismes complètement intégrables monotones indéfinis peuvent avoir de fortes propriétés d'instabilité $[H_6]$: pour $n = 2$, on peut approcher L_B dans la C^∞-topologie sur les compacts par des difféomorphismes exacts symplectiques F de classe C^∞ pour lesquels un ouvert dense d'orbites s'échappe à l'infini.

On peut aussi très simplement donner une réciproque partielle au théorème des tores invariants $[H_6]$.

7 Inégalité a priori pour les difféomorphismes monotones positifs.

7.1 Soit F un difféomorphisme symplectique monotone de $\mathbf{A}^n$. Ecrivant $DF(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$, la matrice $b(x)$ est alors inversible, et les matrices $b^{-1}(x)a(x)$, $d(x)b^{-1}(x)$ sont symétriques. (cf. (2.3) et (2.4)).

On dit que F est **monotone positif** si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$(*_1)$ pour tout $x \in \mathbf{A}^n$, $b^{-1}(x)a(x) > 0$;

$(*_2)$ pour tout $x \in \mathbf{A}^n$, $d(x)b^{-1}(x) > 0$.

Des exemples simples montrent que $(*_1)$ et $(*_2)$ ne sont pas équivalentes. On dit que F est **monotone négatif** si F^{-1} est monotone positif.

Proposition.— *Si F est monotone positif, une fonction $\psi \in C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ dont le graphe $T = \Gamma_\psi$ est un tore lagrangien invariant par F doit vérifier :*

$$\|D\psi\|_{L^\infty} \leq \sup_{x \in T}(\|(b^{-1}a)(x)\|, \|db^{-1}(x)\|).$$

Démonstration. Le difféomorphisme $H(\theta, r) = (\theta, r + \psi(\theta))$ est symplectique de classe C^1, car T est lagrangien. Notons f le difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbf{T}^n$ vérifiant $H^{-1} \circ F \circ H(\theta, 0) = (f(\theta), 0)$, et $G(\theta)$ la matrice jacobienne de $H^{-1} \circ F \circ H$ en $(\theta, 0)$. En posant $\bar{a}(\theta) = a(\theta, \psi(\theta))$, $\bar{b}(\theta) = b(\theta, \psi(\theta)), \ldots$, on a :

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D\psi \circ f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D\psi & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Df & \bar{b} \\ 0 & {}^t(Df)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'après 2.1 - 2.5, $G(\theta)$ appartenant à $Sp(2n)$.

On en déduit :

$$\bar{b}^{-1}\bar{a} + D\psi = \bar{b}^{-1}Df,$$

$$\bar{d}\bar{b}^{-1} - D\psi \circ f = {}^t(Df)^{-1}\bar{b}^{-1}.$$

Posons $e = \bar{b}^{-1}Df$, $e_1 = {}^t(Df)^{-1}\bar{b}^{-1}$; les matrices $e(\theta)$, $e_1(\theta)$ sont symétriques et on a :

$$e_1 = {}^t\bar{b}^{-1}e^{-1}\bar{b}^{-1}. \tag{7.2.1}$$

Supposons que F vérifie la condition $(*_1)$.

Lemme.— *Pour tout $\theta \in \mathbf{T}^n$, on a $e(\theta) > 0$.*

Démonstration. Soit $S \in C^2(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ une fonction telle que $\psi - dS$ soit constante (une telle fonction existe car T est lagrangien). En un point θ_0 où S atteint son minimum sur $\mathbf{T}^n$, on a $D\psi(\theta_0) \geq 0$ et $\bar{b}^{-1}\bar{a}(\theta_0) > 0$ d'après $(*_1)$, d'où $e(\theta_0) > 0$. Comme $e(\theta)$ est toujours non dégénérée, on a $e(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbf{T}^n$.

D'après le lemme et (7.2.1), on a aussi $e_1(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbf{T}^n$.

Si F vérifie la condition $(*_2)$, on montre d'abord que e_1 est positive et on en déduit que e l'est aussi.

Les matrices $\bar{b}^{-1}\bar{a} + D\psi$ et $\bar{d}\bar{b}^{-1} - D\psi \circ f$ sont donc partout positives et on obtient :

$-\|\bar{b}^{-1}\bar{a}\|_{L^\infty} 1 \leq D\psi \leq \|\bar{d}\bar{b}^{-1}\|_{L^\infty} 1$, où 1 désigne la matrice unité de$M_n(\mathbf{R})$,

d'où la proposition.

8. Fonction génératrice.

8.1 Soit F un difféomorphisme exact symplectique et monotone de $\mathbf{A}^n$. On note $\tilde{\mathbf{A}}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ le revêtement universel de $\mathbf{A}^n$, et on choisit un relèvement $\tilde{F}$ de F à $\tilde{\mathbf{A}}^n$; c'est un difféomorphisme symplectique de $\tilde{\mathbf{A}}^n$.

En notant $\tilde{\theta}$ la coordonnée dans $\tilde{\mathbf{T}}^n = \mathbf{R}^n$, on peut écrire $\tilde{F}$ sous la forme :

$$\tilde{F}(\tilde{\theta}, r) = (A\tilde{\theta} + \varphi(\theta, r), \tilde{F}_2(\theta, r)),$$

avec $A \in GL(n, \mathbf{Z})$ et $\varphi \in C^1(\mathbf{A}^n, \mathbf{R}^n)$.

L'hypothèse de monotonicité sur F signifie que, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^n$ l'application : $r \mapsto \varphi(\theta, r)$ est une immersion de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. On fera l'hypothèse suivante :
(8.2) pour tout $\theta \in \mathbf{T}^n$, l'application : $r \mapsto \varphi(\theta, r)$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

La propriété (8.2) est impliquée par la condition :

$$\sup_{x \in \mathbf{A}^n} \|b^{-1}(x)\| < +\infty. \tag{8.3}$$

Comme F est exact symplectique, on a $F^*v - v = dS$, pour une fonction $S \in C^2(\mathbf{A}^n, \mathbf{R})$. Ecrivant $\tilde{F}(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\Theta}, R)$, l'hypothèse (8.2) nous permet de prendre $\tilde{\theta}$ et $u = \tilde{\Theta} - A\tilde{\theta}$ comme coordonnées sur $\tilde{\mathbf{A}}^n$. Posons $H(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta}) = S(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta} - A\tilde{\theta})$.

La fonction H est de classe C^2, et on a les relations :

$$r = -\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} H(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta}),$$

$$R = \frac{\partial}{\partial\tilde{\Theta}} H(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta}).$$

La fonction H s'appelle une **fonction génératrice** (**globale**) de $\tilde{F}$. Elle existe et détermine $\tilde{F}$ dès que F est exact symplectique et vérifie la condition (8.2).

8.4 Définition.— *On dit que F est* **monotone globalement positif** *si $\tilde{F}$ a une fonction génératrice (globale) H qui vérifie :*

$$\operatorname{Lim} \frac{H(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta})}{1 + \|\tilde{\theta} - \tilde{\Theta}\|} = +\infty$$

lorsque $\|\tilde{\theta} - \tilde{\Theta}\|$ tend vers $+\infty$.

Supposons que F soit exact symplectique, vérifie 8.2 (ou 8.3) et qu'il existe une matrice (constante) symétrique $\Delta > 0$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

$$(+_1) \qquad b^{-1}a \geq \Delta \quad (\Leftrightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{\theta}^2}(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta}) \geq \Delta) \ ;$$

$$(+_2) \qquad db^{-1} \geq \Delta \quad (\Leftrightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{\Theta}^2}(\tilde{\theta}, \tilde{\Theta}) \geq \Delta).$$

Alors F est monotone globalement positif et monotone positif. En général, un difféomorphisme exact symplectique monotone globalement positif n'est pas monotone positif, et vice-versa. Cependant, un difféomorphisme complètement intégrable monotone globalement positif est monotone positif.

8.5 Définition.— *Un tore T de classe C^0 de $\mathbf{A}^n$, qui est le graphe d'une fonction $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, est dit C^0-**lagrangien** si la 1-forme $v_\psi = \sum_{j=1}^n \psi_j d\theta_j$ est fermée au sens des distributions.*

De façon équivalente, on doit avoir $\psi = c + \frac{\partial S}{\partial \theta}$, avec $c = \int_{\mathbf{T}^n} \psi(\theta) d\theta$ et $S \in C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$.

Le théorème suivant généralise le théorème 1 (paragraphe 4.1) de Birkhoff.

Théorème $[H_6]$.— *Soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^1 globalement positif de $\mathbf{A}^n$. Toute fonction continue $\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, dont le graphe $T = \Gamma_\psi$ est C^0-lagrangien et invariant par F, est lipschitzienne, et on a :*

$$(8.7) \qquad \|D\psi\|_{L^\infty} \leq \operatorname*{Sup}_{x \in T}(\|b^{-1}(x)a(x)\|, \|d(x)b^{-1}(x)\|);$$

cette inégalité est conséquence des inégalités suivantes :

$$(8.8) \qquad \bar{b}^{-1}\bar{a} + D\psi \geq 0, \quad \textit{presque partout} \ ;$$

$$\bar{d}\bar{b}^{-1} - (D\psi) \circ f \geq 0, \quad \textit{presque partout.}$$

(Les notations $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ sont celles de 7.2 et "presque partout" est relatif à la mesure de Haar $d\theta$ sur $\mathbf{T}^n$).

9. Unicité.

9.1 Soit F un difféomorphisme symplectique globalement positif de $\mathbf{A}^n$, homotope à l'identité. Pour $j = 1, 2$, on suppose que F laisse invariant un tore T_j C^0-lagrangien, graphe d'une fonction $\psi_j \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.

Choisissons un relèvement $\tilde{F}$ de F à $\tilde{\mathbf{A}}^n$. Notons $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$ la projection canonique, et $p_1 : \mathbf{A}^n \to \mathbf{T}^n, \tilde{p}_1 : \tilde{\mathbf{A}}^n \to \mathbf{R}^n$ les projections sur la première coordonnée (θ ou $\tilde{\theta}$). Le difféomorphisme $\tilde{F}$ préserve les graphes $\tilde{T}_j = \Gamma_{\tilde{\psi}_j}$ des applications $\tilde{\psi}_j = \psi_j \circ \pi$, pour $j = 1, 2$; l'application : $\theta \mapsto p_1 \circ F(\theta, \psi_j(\theta))$ est un homéomorphisme f_j de $\mathbf{T}^n$, homotope à l'identité, et l'application : $\tilde{\theta} \mapsto \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}_j(\tilde{\theta}))$ est un relèvement $\tilde{f}_j$ de f_j appartenant au groupe :

$$D^\circ(\mathbf{T}^n) = \{\tilde{f} \in \mathrm{Homeo}(\mathbf{R}^n), \tilde{f} - Id \quad \text{est} \quad \mathbf{Z}^n\text{–périodique}\}$$

Pour un homéomorphisme $\tilde{f} \in D^0(\mathbf{T}^n)$, induisant l' homéomorphisme f de $\mathbf{T}^n$, on désigne par $M(f)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbf{T}^n$ invariantes par f, et on définit **l'ensemble des vecteurs de rotation** de $\tilde{f}$ par :

$$R(\tilde{f}) = \{\int_{\mathbf{T}^n} (\tilde{f}(\theta) - \theta) d\mu(\theta) \ , \ \mu \in M(f)\} \subseteq \mathbf{R}^n.$$

L'ensemble $R(\tilde{f})$ est un invariant de conjugaison de $\tilde{f}$ dans le groupe $D^0(\mathbf{T}^n)$. Lorsque $R(\tilde{f})$ est un singleton $\{\alpha\}$, on montre que la suite $\frac{\tilde{f}^k - Id}{k} = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \eta \circ f^j$ (avec $k \in \mathbf{N}^*$ et $\eta = \tilde{f} - Id$) converge uniformément vers α lorsque $k \to +\infty$. On dit alors que $\tilde{f}$ a un **vecteur de rotation** (égal à α). C'est le cas notamment si :

- f est **uniquement ergodique**, c.à.d. que $M(f)$ a un seul élément ;
- $n = 1$ (théorie du nombre de rotation).

Lorsque n est au moins égal à 2, $R(\tilde{f})$ est un compact convexe non vide de $\mathbf{R}^n$, “en général” non réduit à un singleton (par exemple pour un difféomorphisme de la forme : $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\theta_1, \theta_2 + \varphi(\theta_1))$ avec une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ non constante).

9.2. Théorème $[H_6]$.— *Si, dans la situation précédente, on a $R(\tilde{f}_1) \cap R(\tilde{f}_2) \neq \emptyset$, alors $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.*

9.3. Corollaire.— *Si $R(\tilde{f}_1) \cap R(\tilde{f}_2) \neq \emptyset$, et si toute orbite de f_1 est dense dans $\mathbf{T}^n$, alors $T_1 = T_2$.*

Ce théorème généralise le cas $n = 1$ traité par J. Mather $[M_3]$ (et s'en inspire d'ailleurs fortement). On peut aussi montrer qu'un tore C^0-lagrangien (qui est donc un graphe) invariant par F définit un “état d'énergie minimale” au sens d'Aubry, cf.$[A_2]$ et [C].

9.4. Remarque : Le théorème précédent ne se généralise pas pour les difféomorphismes exacts symplectiques vérifiant (8.2), proches dans la C^∞ topologie d'un difféomorphisme complètement intégrable monotone indéfini L_0. On peut même trouver des perturbations F de L_0 préservant deux tores disjoints T_1, T_2 lagrangiens, graphes d'applications de classe C^∞, ayant le même vecteur de rotation $\tilde{\alpha} \in CD$ (dans le revêtement universel $\tilde{\mathbf{A}}^n$), et tels que les restrictions de F à ces tores soient C^∞-conjuguées à la translation R_α (avec $\alpha = \pi(\tilde{\alpha})$). Dans ces exemples, le vecteur de rotation $\tilde{\alpha}$ tend vers un point de $\mathbf{Q}^n$ lorsque F tend vers L_0.

Il y a cependant unicité locale dans le cadre du théorème 3.2 : si F est un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ dans V_L préservant les graphes T_1, T_2 de deux applications ψ_1, ψ_2, si on a $\|\psi_j - r_0\|_{C^{k_0}} < \varepsilon(\alpha, L)$ (pour une constante $\varepsilon(\alpha, L) > 0$ ne dépendant que de α et L), et si $\tilde{\alpha}$ appartient à l'ensemble des vecteurs de rotation des restrictions de $\tilde{F}$ à $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$, alors on a $\psi_1 = \psi_2$.

10. Démonstration du théorème 8.6 dans un cas particulier.

10.1 Soient $\hat{\varphi} \in C^2(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}), \varphi \equiv \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} \in C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ et :

$$F_\varphi(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r)). \tag{10.2}$$

Le difféomorphisme F_φ de $\mathbf{A}^n$ est exact sympletique monotone globalement positif ; il vérifie (8.3) et $(+_1)$. Il généralise le difféomorphisme dit "standard" de $\mathbf{A}$. S'il préserve le graphe Γ_ψ d'une application $\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, on a, en posant $\tilde{f} = Id + \psi \in D^0(\mathbf{T}^n)$ et notant f l'homéomorphisme induit sur $\mathbf{T}^n$:

$$\psi \circ f = \psi + \varphi \circ f \ ; \tag{10.3}$$

comme ceci équivaut à $\psi - \psi \circ f^{-1} = \varphi$ et comme on a $\tilde{f}^{-1} = Id - \psi \circ f^{-1}$, la relation (10.3) équivaut à :

$$\frac{\tilde{f} + \tilde{f}^{-1}}{2} = Id + \frac{1}{2}\varphi. \tag{10.4}$$

On suppose que Γ_ψ est C^0-lagrangien ; on a donc $\psi = c + \frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\psi}$, avec $\hat{\psi} \in C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ et $c = \int_{\mathbf{T}^n} \psi(\theta) d\theta \in \mathbf{R}^n$.

Lemme.— *La fonction : $\tilde{\theta} \mapsto \frac{1}{2}\|\tilde{\theta}\|^2 + \hat{\psi}(\tilde{\theta})$ est convexe sur $\mathbf{R}^n$.*

Nous laissons ce lemme en exercice (on utilise le fait que $\tilde{f}$ est un homéomorphisme).

Notons $D\tilde{f}$ la dérivée de $\tilde{f}$ au sens des distributions. Il résulte du lemme que pour tout $v \in \mathbf{R}^n$ la distribution ${}^t v D\tilde{f} v = \mu^v$ est une mesure de Radon positive, $\mathbf{Z}^n$-périodique.

Posons $\psi_- = -\psi \circ f^{-1}$; d'après (10.3) le graphe de ψ_- est C^0-lagrangien, donc pour tout $v \in \mathbf{R}^n$ la distribution ${}^t v D\tilde{f}^{-1} v = \mu_-^v$ est une mesure de Radon positive $\mathbf{Z}^n$-périodique.

En dérivant (10.4) au sens des distributions, on obtient, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$:

$$\frac{\mu^v + \mu_-^v}{2} = {}^t v v + \frac{1}{2}\, {}^t v D\varphi v.$$

Comme φ est de classe C^1, le second membre ν^v appartient à $L^\infty(= L^\infty(\mathbf{T}^n, d\theta, \mathbf{R}))$; par le théorème de Radon- Nykodim on a $\mu^v, \mu^v_- \in L^\infty$ et $0 \leq \mu^v \leq \nu^v$,$0 \leq \mu^v_- \leq \nu^v$.

De plus, pour $v, w \in \mathbf{R}^n$, on a :

$$^t v \; D\tilde{f} \; w = \frac{1}{4}(\mu^{v+w} - \mu^{v-w}),$$

$$^t v \; D\tilde{f}^{-1} w = \frac{1}{4}(\mu_-^{v+w} - \mu_-^{v-w}),$$

donc on conclut que Df et $D\tilde{f}^{-1}$ ont leurs coefficients dans L^∞ et sont presque partout positives.

On a donc démontré le théorème 8.6 dans le cas particulier considéré.

10.5 Comme $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$ sont lipschitziens, il sont presque partout (pour la mesure de Lebesque) dérivables au sens de Fréchet. Leurs dérivées $D\tilde{f}$, $D\tilde{f}^{-1}$ vérifient d'après (10.4) :

$$\frac{1}{2}(D\tilde{f} + D\tilde{f}^{-1}) = 1 + \frac{1}{2}D^2\hat{\varphi} \quad \text{presque partout.} \tag{10.6}$$

Or on a presque partout $D\tilde{f} \geq 0$, $D\tilde{f}^{-1} \geq 0$, et $D\tilde{f}^{-1} = (D\tilde{f})^{-1} \circ \tilde{f}^{-1}$, donc il existe un réel $\delta > 0$ tel qu'on ait presque partout :

$$D\tilde{f} \geq \delta \; , \; D\tilde{f}^{-1} \geq \delta. \tag{10.7}$$

11. Conditions nécessaires à l'existence de tores invariants.

11.1 Dans la situation du paragraphe 10, une condition nécessaire pour que F_φ préserve un graphe C^0-lagrangien est :

$$1 + \frac{1}{2}D\varphi = 1 + \frac{1}{2}D^2\hat{\varphi} > 0 \; ; \tag{11.2}$$

cela résulte de (10.6) et (10.7).

11.3 Proposition.— *Soit F un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ de $\mathbf{A}^n$, monotone positif ou globalement positif. Supposons que F préverve un tore lagrangien T, graphe d'une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, et que la restriction de F à T soit C^∞-conjuguée à une translation R_α avec $\alpha \in CD$. Alors la torsion normale F sur T est non dégénérée.*

La démonstration est immédiate (en utilisant 8.8 lorsque F est monotone globalement positif).

Soit W_n l'ensemble des difféomorphismes exactes symplectiques de $\mathbf{A}^n$ monotones positifs. On fixe $\alpha \in CD$. Alors il suit de 3.8 à 3.11 et de la proposition ci-dessus que l'ensemble $U_\alpha = \{F \in W_n \; F$ laisse invariant un tore $T = \Gamma_\psi \psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ et F/T est C^∞ conjugué à $R_\alpha\}$ est ouvert dans W_n pour la topologie de la convergence C^∞ sur chaque compacte de $\mathbf{A}^n$.

11.4 Considérons, pour $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$, la famille $(F_{s\varphi})_{s\in\mathbf{R}}$ de difféomorphismes de classe C^∞, exacts symplectiques, définis par (10.2).

Soit α un vecteur de rotation satisfaisant à une condition diophantienne. D'après le théorème des tores invariants 3.2, il existe $\delta(\alpha) > 0$ tel que $F_{s\varphi}$ pour $|s| < \delta(\alpha)$ vérifie :

(I_s) $F_{s\varphi}$ préserve un tore lagrangien T_s, graphe d'une application $\psi_s \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ et $F_{s\varphi/T_s}$ est C^∞-conjugué à la translation R_α.

Par ailleurs, si $\hat{\varphi}$ est non constante la condition (11.2) n'est pas satisfaite par $F_{s\varphi}$ pour $|s|$ assez grand, donc l'ensemble des $s \in \mathbf{R}$ pour lesquels la condition (I_s) est satisfaite, est borné. Notons s_1 sa borne supérieure. Il résulte des inégalités a priori qu'il existe une application $\psi \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ dont le graphe $T = \Gamma_\psi$ est C^0-lagrangien et invariant par $F_{s_1\varphi}$, et telle que l'ensemble des vecteurs de rotation de $F_{s_1\varphi}/T$ contienne α (mod $\mathbf{Z}^n$).

D'après 3.8, 3.11 et 11.3, **on est donc dans l'une des deux situations suivantes** :

(i) ψ n'est pas de classe C^∞ ;

(ii) $F_{s_1\varphi}/T$ n'est pas C^∞-conjugué à la translation R_α.

Lorsque $n = 1$, seule la première situation peut se produire, à cause des théorèmes globaux de conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle ($[H_2]$, [Y]). Pour $n \geq 2$, il n'y a malheureusement pas de "théorèmes globaux" de conjugaison différentiable des difféomorphismes de $\mathbf{T}^n$ à la translation $R_\alpha(\alpha \in CD)$, cf.$[H_2]$, $[H_5]$, $[H_6]$. On peut d'ailleurs construire un difféomorphisme symplectique F de classe C^∞, monotone positif et globalement positif, préservant le graphe T d'une application $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, tels que la restriction de F au tore lagrangien T contienne α dans son ensemble de vecteurs de rotation mais ne soit pas C^∞ conjuguée à la translation R_α et de plus F est un point frontière en topologie C^∞ de l'ouvert U_α défini en 11.3. Les exemples construits ne sont pas de la forme (10.2).

12. Inégalités a priori.

12.1 On considère toujours, pour $\hat{\varphi} \in C^2(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$, l'exemple F_φ défini en (10.2), et on suppose que F_φ préserve le graphe $T = \Gamma_\psi$ d'une application $\psi \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, T étant C^0-lagrangien.

Notons $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2}$ le Laplacien, et posons $b_+ = \operatorname{Sup}_\theta(\frac{1}{n}\Delta\hat{\varphi}(\theta))$, $b_- = \operatorname{Sup}_\theta(-\Delta\hat{\varphi}(\theta))$.

On a alors entre b_+ et b_- l'inégalité a priori suivante :

Lemme.— *On a* $\frac{1}{1-\frac{1}{2}b_-} \leq 1 + \frac{1}{2}b_+ + \sqrt{b_+ + \frac{1}{4}b_+^2}$.

Démonstration. Posons $\tilde{f} = Id + \psi$; en prenant les traces dans la relation (10.6), on obtient :

$$\frac{1}{2n}(Tr(D\tilde{f}) + Tr(D\tilde{f}^{-1})) = 1 + \frac{1}{2n}\Delta\hat{\varphi} \quad \text{presque partout.} \tag{12.2.0}$$

Posons alors :

$$M = \frac{1}{n}\operatorname{Sup}(\|Tr(D\tilde{f})\|_{L^\infty}, \|Tr\ D\tilde{f}^{-1}\|_{L^\infty}),$$

$$m = \frac{1}{n} \operatorname*{Min}_{\theta} \operatorname{ess}(Tr(D\tilde{f}(\theta)),\ Tr(D\tilde{f}^{-1}(\theta))).$$

On a $m \geq 1/M$, d'après la relation $Tr(A)\ Tr(A^{-1}) \geq n^2$ vérifiée par toute matrice symétrique définie positive A dans $M_n(\mathbf{R})$. On déduit alors de (12.2.0) qu'on a :

$$\frac{1}{M} \leq m \leq 1 - \frac{1}{2}b_-,$$

$$\frac{1}{2}(M + \frac{1}{M}) \leq \frac{1}{2}(M + m) \leq 1 + \frac{1}{2}b_+,$$

d'où l'inégalité du lemme.

12.2.1. Considérons la famille $(F_{s\varphi})_{s>0}$ de 11.4, avec une fonction $\hat{\varphi}$ non constante. D'après le lemme ci-dessus, pour qu'il existe une application $\psi_s \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$ dont le graphe soit C^0-lagrangien et invariant par $F_{s\varphi}$, il est nécessaire qu'on ait :

$$0 \leq s \leq \frac{4b_+}{b_-(2b_+ + b_-)}, \tag{12.2.2}$$

relation qui généralise [M] et [H_3,p.130].

On peut démontrer [H_6] à partir de (10.6) et (10.7) de nombreuses autres inégalités a priori sur $D\varphi = D^2\hat{\varphi}$. Par exemple en posant :

$$M_0 = \sup(\|D\tilde{f}\|_{L^\infty}, \|D\tilde{f}^{-1}\|_{L^\infty}), \tag{12.2.3}$$

on a :

$$\frac{1}{2}\left(M_0 + \frac{1}{M_0}\right) \leq 1 + \frac{1}{2}a_+, \tag{12.2.4}$$

$$0 < \frac{1}{M_0} \leq 1 - \frac{1}{2}a_-, \tag{12.2.5}$$

en notant $a_+ = \operatorname*{Sup}_{\theta, \|v\|=1} ({}^t v D\varphi(\theta) v)$, $a_- = -\operatorname*{Inf}_{\theta, \|v\|=1} ({}^t v D\varphi(\theta) v)$. Ceci implique que la condition :

$$0 \leq s \leq \frac{4a_+}{a_-(2a_+ + a_-)} \tag{12.2.6}$$

est nécessaire à l'éxistence d'un graphe C^0-lagrangien invariant par $F_{s\varphi}$ (avec $s > 0$ et $\hat{\varphi}$ non constante, donc $a_+ > 0$).

12.3 Proposition.— *Il existe une suite de fonctions $(\hat{\varphi}_j)_{j\geq 0} \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$, avec $\int_{\mathbf{T}}^n \hat{\varphi}_j(\theta)d\theta = 0$ pour tout $j \geq 0$, tendant vers 0, pour tout $\delta > 0$, dans les $C^{n+2-\delta}$ et $W^{2n+2-\delta,1}$ topologies, et telle qu'aucun F_{φ_j} ne préserve un graphe $\Gamma_\psi(\psi \in C^0(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n))$ C^0-lagrangien.*

On rappelle que, pour $k \in \mathbf{R}_+^*$, C^k est l'espace des fonctions de classe $C^{[k]}$ dont les dérivées partielles d'ordre $[k]$ satisfont une condition de Hölder d'exposant $k - [k]$, alors que $W^{k,p}$ (pour $p \geq 1$) est l'espace de Sobolev associé à $L^p(\mathbf{T}^n, d\theta)$.

Démonstration. Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, construisons une fonction $b_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ verifiant :

$$\int_{\mathbf{T}^n} b_\varepsilon(\theta) d\theta = 0 \; ; \tag{12.4}$$

$$\operatorname*{Sup}_{\mathbf{T}^n} b_\varepsilon = \varepsilon \; ; \tag{12.5}$$

$$\operatorname*{Inf}_{\mathbf{T}^n} b_\varepsilon = -10\sqrt{\varepsilon}. \tag{12.6}$$

Pour cela, avec une fonction $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, à valeurs dans $[0, 1]$, et vérifiant $\eta(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{20}$, $\eta(x) = 0$ pour $|x| \geq \frac{1}{10}$, on définit b_ε par :

$$b_\varepsilon(\theta) = \sum_{p \in \mathbf{Z}^n} \left(\varepsilon\eta(\|\theta - p\|) - 10\sqrt{\varepsilon}\eta \left(\|\theta - p - a\| 10^{1/n} \varepsilon^{-1/2n} \right) \right),$$

où $a \in \mathbf{R}^n$, $1/4 < \|a\| < 1/2$. Si ε est assez petit, on a bien les propriétés (12.4), (12.5), (12.6). D'après (12.4), il existe une fonction $\hat{\varphi}_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ satisfaisant $\int_{\mathbf{T}^n} \hat{\varphi}_\varepsilon(\theta) d\theta = 0$ et $\frac{1}{n}\Delta\hat{\varphi}_\varepsilon = b_\varepsilon$. Soit $(\varepsilon_j)_{j \geq 0}$ une suite de nombre strictements positifs tendant vers 0 et $\hat{\varphi}_j = \hat{\varphi}_{\varepsilon_j}$. Comme la famille $(b_{\varepsilon_j})_{j \geq 0}$ est bornée dans les C^n et $W^{2n,1}$ topologies, il résulte des estimées de Schauder que la suite $(\hat{\varphi}_j)_{j \geq 0}$ converge vers 0 dans les $C^{n+2-\delta}$ et $W^{2n+2-\delta,1}$ topologies, pour tout $\delta > 0$.

D'autre part, d'après 12.2, si F_{φ_ε} laissait invariant un graphe Γ_ψ C^0-lagrangien, on aurait, en posant $(b_\varepsilon)_+ = \operatorname*{Sup}_\theta b_\varepsilon(\theta)$, $(b_\varepsilon)_- = -\operatorname*{Inf}_\theta b_\varepsilon(\theta)$:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}(b_\varepsilon)_-} \leq 1 + (b_\varepsilon)_+^{1/2} + 0((b_\varepsilon)_+) \; ;$$

ceci implique :

$$(b_\varepsilon)_- \leq 2(b_\varepsilon)_+^{1/2} + 0((b_\varepsilon)_+),$$

et contredit (12.5), (12.6) lorsque ε tend vers 0.

12.7 Les exemples ci-dessus, pour $n = 1$, sont presque optimaux. Nous avons en effet montré dans $[H_4]$ le résultat suivant : pour tout $p > 1$, il existe $\varepsilon_p > 0$ tel que, si $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$ vérifie $\|D^4\hat{\varphi}\|_{L^p} < \varepsilon_p$, alors F_φ préserve un graphe $T = \Gamma_\psi$, $\psi \in C^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{R})$, tel que le nombre de rotation de $F_{\varphi/T}$ soit de type constant (i.e. on peut prendre $\beta = 0$ dans 3.1).

13. Non existence de tores invariants ayant un vecteur de rotation donné.

13.1 Soient $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\alpha \in \mathbf{T}^n$ tels que l'inéquation :

$$\| \sum_1^n k_j \alpha_j \|_a \leq \gamma |k|^{-n-\beta} \tag{13.2}$$

ait une infinité de solutions k_j dans $\mathbf{Z}^n - \{0\}$ (cf. 3.1).

Théorème $[H_6]$.— *Il existe une suite $(\hat{\varphi}_j)_{j\geq 0}$ dans $C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ tendant vers 0 dans la $C^{2(n+\beta)+2-\varepsilon}$ topologie pour tout $\varepsilon > 0$, telle qu'aucun F_{φ_j} ne laisse invariant de tore T, homotope à $\{r = 0\}$, et satisfaisant à :*

(i) F_{φ_j}/T est uniquement ergodique ;

(ii) le vecteur de rotation de $\tilde{F}_{\varphi_j}/\tilde{T}$ (qui existe d'après (i) et 9.1) vérifie

$$\alpha = \rho(\tilde{F}_{\varphi_j}/\tilde{T}) \bmod \mathbf{Z}^n.$$

Ce théorème généralise le résultat pour $n = 1$ démontré en $[H_3]$; il montre qu'en un certain sens le théorème 3.2 des tores invariants exige un grand nombre de dérivées (i.e., dans 3.2, $k_0 > 2(n + \beta) + 1$).

14. Généralisation perturbative du deuxième théorème de Birkhoff.

14.1 Pour $R > 0$, définissons $\mathbf{A}_R^n = \{(\theta, r) \in \mathbf{A}^n, \|r\| \leq R\}$.

Soit T un tore lagrangien de classe C^1 de $\mathbf{A}^n$. On définit une application $\tilde{i}_T$ de T dans la grassmannienne $\Lambda(n) = U(n)/0(n)$ des n-plans lagrangiens de $(\mathbf{R}^{2n}, w)$ en associant à $y \in T$ l'espace tangent en y à T (considéré comme un sous-espace de l'espace tangent à $\mathbf{A}^n$ en y qui est **canoniquement isomorphe** à $(\mathbf{R}^{2n}, w)$).

La classe de Maslov de T, notée Maslov (T), est l'image par $\tilde{i}_T^*$ dans $H^1(T, \mathbf{Z})$ du générateur 1 de $H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ (générateur qui dépend du choix d'une orientation de $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$).

La définition de Maslov (T) suppose que nous avons trivialisé canoniquement le fibré tangent de $\mathbf{A}^n$.

Pour $n = 1$, on a Maslov $(T) = 0$ lorsque T est homotope à $\{r = 0\}$. La question est ouverte pour $n \geq 2$.

Théorème $[H_6]$.— *Soient $R > 0$ et L un difféomorphisme complètement intégrable monotone positif de $\mathbf{A}^n$. Il existe alors $\varepsilon(L, R) > 0$ tel que, si F est un difféomorphisme symplectique de $\mathbf{A}^n$ et T un tore lagrangien de classe C^1, invariant par F, vérifiant :*

$$\|F - L\|_{C^1(\mathbf{A}_R^n)} < \varepsilon(L, R) \; ; \tag{14.3}$$

$$T \subset \mathbf{A}_R^n \; ; \tag{14.4}$$

$$\text{(14.5)} \qquad Maslov(T) = 0\ ;$$

(14.6) la restriction $f = F/T$ est limite uniforme d'une suite $(g_j)_{j\geq 0}$ d'homéomorphismes de T, telle qu'il existe une suite $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ tendant vers 0 et une orbite périodique ε_j-dense de g_j pour tout $j \geq 0$;

$$\text{(14.7)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\text{Log}\ \|Tf^n\|_{C^0(T)} = 0\ ;$$

alors T est le graphe d'une fonction $\psi \in C^1(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$.

Commentaires : Les conditions (14.6), (14.7) sont toujours vérifiées lorsque f est C^1-conjugué à une translation, ou lorsque f est C^0-conjuguée à une translation si F et T sont de classe $C^{1+\beta}$, pour un $\beta > 0$.

Si L vérifie $\sup\limits_{\mathbf{A}^n} \|DL(x)\| < +\infty$, $\varepsilon(L, R)$ ne dépend que de L et (14.4) est inutile.

Pour $n = 1$, les conditions (14.5), (14.6), (14.7) sont vérifiées dès que T est homotope à $\{r = 0\}$ et le nombre de rotation de f est irrationnel.

Toujours pour $n = 1$, la condition (14.3) est inutile ; il suffit de supposer F monotone et homotope à l'identité (pas forcément symplectique).

Lorsqu'on prend $L(\theta, r) = (\theta + r, r)$, la démonstration donne un $\varepsilon(L)$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Un des outils de la démonstration de 14.2 est le nombre de rotation de Maslov pour les homéomorphismes fibrés (encore appelés produits croisés, ou produits gauches) de $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^{2n}$ de la forme :

$$(x, y) \mapsto (f(x), A(x)y),$$

où $A : \mathbf{T}^n \to Sp(2n)$ est une application continue homotope à une application constante. Nous utilisons à ce propos le point de vue de R. Johnson $[J_1]$, voir aussi Ruelle [R].

Pour une généralisation plus forte du deuxième théorème de Birkhoff dans le cas des flots géodésiques sur $\mathbf{T}^2$, voir Byalyi et Polterovich $[B_3]$.

15. Champs de vecteurs hamiltoniens.

15.1 Un hamiltonien $H \in C^2(\mathbf{A}^n, \mathbf{R})$ détermine un champ de vecteurs hamiltonien $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial r}, -\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)$ et un flot local F_s (global si X_H est complet) satisfaisant à :

$$F_0 = Id_{\mathbf{A}^n}, \frac{\partial F_s}{\partial s} = X_H \circ F_s.$$

15.2 En posant $DX_H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = b = {}^t b$, $-\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = c = {}^t c$ et $d = -{}^t a$.

On dit que X_H est monotone si dét b ne s'annule pas, monotone positif si b est partout définie positive.

Supposons que le flot $(F_s)_{s\in\mathbf{R}}$ préserve le graphe lagrangien T d'une application $\psi \in C^2(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$. Notons $\bar{a}(\theta) = a(\theta, \psi(\theta))$, $\bar{b}(\theta) = b(\theta, \psi(\theta)), \ldots$.

15.3 Proposition $[H_6]$.— *Si X_H est monotone positif, on a :*

$$\|D\psi\|_{L^\infty} \leq \left(\|\bar{d}\|_{L^\infty} + (c_+\|\bar{b}^{-1}\|_{L^\infty} + \|\bar{d}\|^2_{L^\infty})^{1/2}\right) \|\bar{b}^{-1}\|_{L^\infty}, \tag{15.4}$$

avec $c_+ = \sup\limits_{\theta, \|v\|=1} ({}^t v\bar{c}(\theta)v)$;

$$\|Tr\ D\psi\|_{L^\infty} \leq n^{1/2} \left(\|\bar{d}\|_{HS} + (\ell_+\|\bar{b}^{-1}\|_{L^\infty} + \|\bar{d}\|^2_{HS})^{1/2}\right) \|\bar{b}^{-1}\|_{L^\infty} \tag{15.5}$$

avec $\ell_+ = \sup\limits_\theta Tr(c(\theta))$, $\|\bar{d}\|_{HS} = (\sup\limits_\theta(Tr\, {}^t dd(\theta))^{1/2}$ *et Tr désigne la trace.*

La démonstration est très simple en conjuguant X_H par $K(\theta, r) = (\theta, r + \psi(\theta))$. On pourrait aussi, avec des hypothèses appropriées (X_H complet, hypothèses à l'infini,...) se ramener pour F_1 à l'étude faite aux paragraphes 7 à 9. On peut déduire de la proposition le théorème suivant :

15.6 Théorème $[H_6]$.— *On se donne $E_0 > 0$ et on suppose qu'on a $n \geq 2$. Il existe une suite $(\varphi_j)_{j\geq 0}$ dans $C^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R})$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) la suite converge vers 0 dans les $C^{n-\delta}$ et $W^{2n-\delta,1}$ topologies, pour tout $\delta > 0$;

(ii) $\int_{\mathbf{T}^n} \varphi_j(\theta)d\theta = 0$, pour tout $j \geq 0$;

(iii) pour $j \geq 0$, notons ${}^jF_s$ le flot du hamiltonien $H_j(\theta, r) = \frac{1}{2}\|r\|^2 + \varphi_j(\theta)$; il ne laisse invariant aucun graphe $T = \Gamma_\psi$, avec $\psi \in C^2(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^n)$, qui soit lagrangien et contenu dans $H_j^{-1}(]-\infty, E_0])$.

15.7 Remarques :

1) Rappelons qu'un tore lagrangien de classe C^1, invariant par le flot ${}^jF_s$, est contenu dans une surface d'énergie (i.e. $H_j^{-1}(E), E \in \mathbf{R}$).

2) Lorsqu'on fixe j, et qu'on prend E assez grand, il existe dans $H_j^{-1}(E)$ un ensemble de mesure relative positive formé de tores lagrangiens, graphes d'applications de classe C^∞, invariants par le flot ${}^jF_s$: cela résulte du théorème des tores invariants (KAM) pour les champs de vecteurs, cf $[B_2]$, $[D_1]$.

On peut aussi traiter le cas de hamiltoniens dépendant périodiquement du temps : voir à ce propos, pour $n = 2$, les exemples construits par Moser ($[M_7]$,$[M_8]$) dont 15.6 est une généralisation (plus faible mais différente).

Bibliographie

[A_1] R. Abraham and J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, second edition, Benjamin (1978).

[A_2] S. Aubry and P.Y. Le Daeron, The discrete Frenkel-Kantova model and its extensions I. Exact results for ground states, Physica **8D** (1983), 381-422.

[BK] D. Bernstein and A.B. Katok, Birkhoff periodic orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonians, Invent. Math. **88** (1987), 225-241.

[B_1] G.D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, Acta Math. **43** (1920), 1-119 ; Collected Math. Papers vol.2, p.111-229.

[B_2] J.B. Bost, Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltonien, séminaire Bourbaki, Exposé n°639, Astérisque **133-134** (1986), 113-157.

[B_3] M.L. Byalyi and L.V. Polterovich, Geodesic flows on the two-dimensional torus and phase transitions "commensurability-non commensiability", Funct. Analysis Appl. **20** (1986), 260-266.

[C] A. Chenciner, La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather, séminaire Bourbaki, exposé n°622, Astérisque **121-122** (1985), 147-170.

[D_1] R. Douady, Application du théorème des tores invariants, Thèse 3ème cycle, Univ. Paris VII (1982).

[D_2] R. Douady, Une démonstration directe de l'équivalence des théorèmes des tores invariants pour les difféomorphismes et les champs de vecteurs, C.R. Acad. Sci Paris **295** (1982), 201-204.

[D_3] R. Douady, Regular dependance of invariant curves and Aubry-Mather sets of twist maps of an annulus, à paraître à Erg. Th. Dyn. Syst.

[D_4] R. Douady, Stabilité on instabilité des points fixes elliptiques, Ann. Ec. Norm. Sup. 4ème série t.**21** (1988), 1-46.

[F] A. Fathi, Une interprétation plus topologique de la démonstration du théorème de Birkhoff, Appendice du chap.I de [H_3].

[G] W.H. Gottschalk and G.A. Hedlund, Topological dynamics, Am. Math. Soc. (1955), paragraphe 14.

[H_1] R.S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Am. Math. Soc. **7** (1982), 65-222.

[H_2] M.R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Pub. I.H.E.S. **49** (1979), 5-233.

[H_3] M.R. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, vol.1 Astérisque **103-104** (1983).

[H_4] M.R. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, vol.2 Astérisque **144** (1986).

[H_5] M.R. Herman, Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère locale d'un théorème d'Arnold et de Moser, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 453-502.

[H_6] M.R. Herman, Sur les tores invariants par les difféomorphismes symplectiques, en préparation.

[J_1] R.A. Johnson, m-functions and Floquet exponents for linear differential systems, preprint (1986).

[J_2] F.W. Josellis, Forced oscillations on $T^n \times \mathbf{R}^n$ having a prescribed rotation vector, preprint, Aachen (1987).

[L_1] P. Le Calvez, Propriétés dynamiques des zones d'instabilités, Ann. Ec. Norm. Sup. 4ème série t.**20** (1987), 443-464.

[L_2] P. Le Calvez, Propriétés générales des applications déviant la verticale, preprint Univ. Orsay (1987).

[M_1] J. Mather, The existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, Topology **21** (1982), 457-467.

[M_2] J. Mather, Minimal Measures, preprint, ETH Zürich (1987).

[M_3] J. Mather, Letter to R. Mac Kay, Feb.21, 1984.

[M_4] J. Mather, Non existence of invariant circles, Erg. Th. Dyn. Syst. **4** (1984), 301-309.

[M_5] J. Mather, Exposés au séminaire de systèmes dynamiques au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[M_6] M. Mohsin, Formes cobordables, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 3ème série t.**83** (1966), 201-213.

[M_7] J. Moser, Recent developments in the theory of Hamiltonian systems, SIAM review **28** (1986), 459-485.

[M_8] J. Moser, Break down of stability, Lect. notes Physics v.**247**, Springer Verlag (1986), 492-518.

[P] J. Pöschel, Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 653-695.

[R] D. Ruelle, Rotation numbers for diffeomorphisms and flows, preprint, I.H.E.S. (1984).

[S_1] D. Salamon, The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem, preprint, ETH Zürich (1986).

[S_2] D. Salamon and E. Zehnder, KAM theory in configuration space, preprint, Univ. Warwick (1987).

[S_3] M. Shub, Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque **56** (1978).

[Y] J.C. Yoccoz, Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série, **17** (1984), 333-359.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 - Palaiseau Cedex
France