

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J.-M. BONY

N. LERNER

## **Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1986-1987), exp. n° 2,  
p. 1-29

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1986-1987\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A2_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°  
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

QUANTIFICATION ASYMPTOTIQUE ET  
MICROLOCALISATIONS D'ORDRE SUPERIEUR.

par J.-M. BONY et N. LERNER<sup>(\*)</sup>

(\*) Travail réalisé en partie avec le soutien du NSF-Grant n°DMS 860.17.55



Le calcul symbolique pseudo-différentiel associé à des symboles ayant un comportement singulier sur une sous-variété lagrangienne (seconde microlocalisation, voir [1], [2]) joue un rôle clef pour définir et étudier des espaces de distributions conormales associées à une hypersurface  $\Sigma$  ayant des singularités relativement simples, espaces jouant eux-mêmes un rôle essentiel dans l'étude de la propagation des singularités dans le cas non-linéaire.

Le cas d'hypersurfaces  $\Sigma$  plus singulières exige l'introduction de symboles également plus singuliers. La difficulté essentielle est de quantifier ces symboles, c'est à dire de leur associer des opérateurs.

Un cas très important est celui où les classes de symboles peuvent être définies comme dans [3, chap.18] à l'aide de métriques sur l'espace des phases (voir remarque 1.5). Mais le calcul de Weyl de Hörmander ne peut s'appliquer, les métriques que nous avons en vue ne vérifiant jamais la condition de tempérance.

L'objet essentiel de ce travail est de définir une modification du procédé de quantification de Weyl qui, sans modifier le calcul symbolique asymptotique, permettra de quantifier nos classes de symboles. Après quelques rappels, nous préciserons au n° 1.6. notre problématique.

Dans une première partie (§§2 et 3) nous développons une version du calcul de Weyl, lorsque la métrique n'est définie que sur un ouvert de l'espace des phases. Il s'agit d'une étude très proche de celle de Hörmander et qui lui emprunte beaucoup. Les différences essentielles sont la condition de tempérance symétrique (n°2.2) et surtout la notion de symbole "confiné dans une boule" (n°2.5) qui permet de contrôler des symboles vivant dans tout l'espace des phases à l'aide d'une métrique qui n'est définie que sur un ouvert.

La seconde partie (§§ 4 à 8) est consacrée au calcul  $k$ -microdifférentiel. Il est associé à la donnée d'une suite croissante  $g_1, \dots, g_k$  de métriques sur l'espace des phases. L'hypothèse essentielle (n°4.1) est une condition de tempérance relative exprimant que chaque métrique est symétriquement tempérée dans les boules de la métrique précédente. Les exemples du § 9 montreront que cette condition est fréquemment réalisée.

Les classes de symboles que nous quantifierons sont les classes de

symboles habituellement associées à  $g_k$ , mais le procédé de quantification utilise toute la suite des métriques  $g_1, \dots, g_k$ . Le point crucial de l'étude est l'introduction des "symboles k-confinés" (n°5.2) et la démonstration récurrente de la presque orthogonalité de ces symboles (théorème 5.6). Le reste en découle assez facilement : opérateurs internes (intégrale d'opérateurs associés aux symboles k-confinés), calcul symbolique, régularités k-micro-locales, relations entre les  $l^e, \dots, k^e$  microlocalisations.

Au § 9, nous donnons un certain nombre d'exemples de microlocalisations d'ordre supérieur associées à des données géométriques simples : une sous-variété lagrangienne ; une sous-variété isotrope ; deux sous-variétés lagrangiennes se coupent franchement ; plusieurs courbes dans le plan ayant un contact d'ordre  $p$  (non nécessairement entier) avec l'axe des  $x$ , et nous en déduisons dans ce dernier cas la "bonne" définition des distributions conormales.

Une partie de ce travail a été réalisée au cours de deux séjours de l'un des auteurs (J.M.B.) d'une part à l'Institut Mittag-Leffler, d'autre part à l'Université Purdue. Il tient à remercier chaleureusement ces deux institutions, ainsi que L. Hörmander et M.S. Baouendi.

## 1. RAPPELS ET NOTATIONS.

1.1. Quantification de Weyl. Celle-ci associe à une bonne fonction  $a(X)$ , définie sur l'espace des phases  $\mathbb{R}_X^{2n} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ , un opérateur  $a^w(x, D)$  défini comme intégrale d'opérateurs unitaires sur  $L^2$  par :

$$a^w(x, D) = \int \hat{a}(L) \exp\{iL(x, D)\} dL / (2\pi)^{2n}$$

en notant  $L = (\ell, \lambda)$  le point courant de  $(\mathbb{R}^{2n})^*$ , et en posant  $L(x, D)u(x) = \langle \ell, x \rangle u(x) + \langle \lambda, D_x \rangle u(x)$ . On peut également exprimer  $a^w$  comme intégrale de symétries de phase (voir[8]) :

$$a^w(x, D) = \pi^{-n} \int a(Y) \sigma_y dY / (2\pi)^n$$

en posant  $\sigma_y u(x) = e^{2i\langle x-y, \eta \rangle} u(2y-x)$ . On a enfin la formule classique :

$$(1.1.) \quad a^w(x, D)u(x) = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi / (2\pi)^n .$$

Toujours pour de bonnes fonctions (dans  $S(\mathbb{R}^{2n})$  par exemple), on définit la loi de composition  $\#$  par

$$(1.2.) \quad a^w \circ b^w = (a \# b)^w$$

$$(1.3) \quad a \# b(X) = \exp\left\{\frac{i\sigma(D_x, D_y)}{2}\right\} a(X)b(Y) \Big|_{Y=X}$$

où  $\sigma$  est la forme symplectique  $\sigma(X, Y) = \langle y, \xi \rangle - \langle x, \eta \rangle$ , et où  $\exp\{\dots\}$  est l'opérateur de convolution dans  $\mathbb{R}^{4n}$  correspondant à la multiplication par  $\exp\{\frac{i\sigma(\cdot, \cdot)}{2}\}$  en transformée de Fourier. On a également

$$(1.4) \quad a \# b(X) = \pi^{-2n} \int e^{-2i\sigma(X-Y, X-Z)} a(Y)b(Z) dY dZ$$

La loi  $\#$  n'est pas locale, et, pour de bonnes classes de symboles, on pourra donner un sens asymptotique à la loi  $\tilde{\#}$ , locale mais pour le moment purement formelle, obtenue en remplaçant l'exponentielle figurant en (1.3.) par son développement en série.

$$(1.5.) \quad \tilde{a \# b}(X) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{i\sigma(D_x, D_y)}{2} \right]^k a(X)b(Y) \Big|_{Y=X}$$

$$\tilde{a \# b}(X) = a(X)b(X) + \frac{1}{2i} \{a, b\}(X) + \dots$$

1.2. Classes de symboles définies par des métriques. On se donne, pour chaque  $X$  appartenant à un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , une forme quadratique définie positive  $g_X(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , dépendant mesurablement de  $X$ . On supposera toujours que celle-ci est lentement variable, c'est à dire qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour  $X, Y \in \Omega$ , on ait

$$(1.6) \quad g_X(X-Y) \leq C^{-1} \Rightarrow C^{-1} \leq g_X(\cdot)/g_Y(\cdot) \leq C$$

(contrairement à [3], définition 1.4.7, aucune condition n'est imposée sur le comportement de  $g_X$  au bord)

On réservera le nom de poids à des fonctions  $m(X)$ , strictement positives sur  $\Omega$ , telles qu'il existe  $C_m > 0$  avec

$$(1.7) \quad g_X(X-Y) \leq C^{-1} \Rightarrow C_m^{-1} \leq m(X)/m(Y) \leq C_m$$

On note  $S(m, g, \Omega)$ , ou parfois  $S(m, g)$ , l'espace des  $a \in C^\infty(\Omega)$  vérifiant

$$(1.8) \quad \langle a^k(X), T_1 \otimes T_2 \dots \otimes T_k \rangle \leq C_k m(X) \prod_1^k g_X(T_\ell)^{1/2}$$

où  $a^k(X)$  est le tenseur  $k^e$  dérivé de  $a$  au point  $X$ , pour la structure affine de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Les meilleures constantes  $C_k$  constituent les semi-normes de

$S(m, g, \Omega)$ .

Enfin, rappelons que la métrique duale de  $g_X$  s'identifie, via l'isomorphisme symplectique à une métrique  $g_X^\sigma$  sur l'espace des phases :

$$(1.9) \quad g_X^\sigma(T) = \sup_W \sigma(T, W)^2 / g_X(W)$$

On pose

$$(1.10) \quad h(X) = \sup_T [g_X(T) / g_X^\sigma(T)]^{1/2} ; \lambda(X) = h(X)^{-1}$$

1.3. Principe d'incertitude et calcul asymptotique. Nous supposons toujours, dans la suite, que  $\lambda(X) \geq 1$ , c'est à dire que

$$(1.11) \quad \forall X \in \Omega, \quad g_X(\cdot) \leq g_X^\sigma(\cdot),$$

cette condition affirmant que la localisation dans une boule  $g_X(X-\cdot) \leq r^2$  n'est pas "interdite" par le principe d'incertitude. On a alors le résultat suivant, qui n'a d'intérêt que si  $\lambda$  n'est pas borné supérieurement.

1.4. Théorème. Sous les hypothèses précédentes, pour tout couple de poids  $m_1, m_2$ , l'opérateur  $\tilde{\#}$  induit une application bilinéaire de

$$S(m_1, g) / S(m_1 \lambda^{-\infty}, g) \times S(m_2, g) / S(m_2 \lambda^{-\infty}, g) \text{ dans } S(m, g) / S(m \lambda^{-\infty}, g),$$

avec  $m = m_1 m_2$ , où  $S(m \lambda^{-\infty})$  est l'intersection des  $S(m \lambda^{-N})$ .

En fait, dans la série (1.5), les termes successifs sont dans  $S(m, g)$  ;  $S(m \lambda^{-1}, g)$  ; ... et un argument "à la Borel" assure qu'il existe un élément de  $S(m, g)$ , uniquement défini modulo  $S(m \lambda^{-\infty}, g)$ , tel que sa différence avec la somme partielle d'ordre  $N$  de (1.5) appartienne à  $S(m \lambda^{-N}, g)$ .

1.5. Remarque. Les classes de symboles introduites par l'un des auteurs [2] pour la seconde microlocalisation le long d'une variété lagrangienne  $\Lambda$  rentrent dans ce cadre lorsque  $\Lambda$  est le conormal d'une sous-variété linéaire de  $\mathbb{R}^n$ . Si celle-ci a pour équation  $x'' = 0$  (dans  $\mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}_x^p \times \mathbb{R}_{x''}^{n-p}$ ), on définit la métrique  $g$  par

$$(1.12) \quad g_X = dx'^2 + \frac{\langle \xi \rangle^2}{\lambda^2} dx''^2 + \frac{1}{\lambda^2} d\xi'^2 + \frac{1}{\langle \xi \rangle^2} d\xi''^2$$

avec

$$(1.13) \quad \langle \xi \rangle^2 = 1 + |\xi|^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 = 1 + |\xi'|^2 + |x''|^2 |\xi|^2 .$$

La fonction  $\lambda$  est alors précisément celle définie en (1.10). Les classes de symboles  $\Sigma^{m,m'}$  de [2] sont exactement les classes  $S(\langle \xi \rangle^m \lambda^{m'}, g)$ .

Par contre, si  $\Lambda$  est une sous-variété lagrangienne quelconque, ou même le conormal d'une sous-variété courbée, les classes de symboles  $\Sigma^{m,m'}$  ne se laissent plus décrire à l'aide d'une métrique comme au n°1.2. Dans une publication ultérieure, l'étude de l'invariance par transformation canonique nous permettra de quantifier, notamment, de telles classes de symboles.

1.6. Position du problème. Lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$ , et lorsque  $g$  vérifie en outre la propriété (tempérance) suivante :

$$(1.14) \quad g_Y(\cdot) \leq C g_X(\cdot) [1 + g_Y^\sigma(Y-X)]^N$$

pour  $C$  et  $N$  fixés (et si les poids  $m$  vérifient une condition analogue), la théorie de Hörmander permet d'associer par la formule (1.1), aux  $a \in S(m, g)$ , des opérateurs  $a^w$  envoyant  $S$  dans  $S$ ,  $S'$  dans  $S'$ , et, lorsque  $m = 1$ ,  $L^2$  dans  $L^2$ . Les formules (1.2), (1.3), (1.4) restent valables, l'opération  $\#$  appliquant  $S(m_1, g) \times S(m_2, g)$  dans  $S(m_1 m_2, g)$ .

On peut vérifier facilement que les métriques (1.12), même pour  $p = 0$  (seconde microlocalisation par rapport à l'origine), ne satisfont pas à (1.14), et que (1.1) ne permet pas d'associer à des symboles appartenant à  $S(m, g)$  des opérateurs définis sur  $S'$ .

Notre objectif est de définir, sous des hypothèses plus faibles que la tempérance - et vérifiées dans les applications que nous avons en vue - un calcul symbolique compatible avec la loi  $\tilde{\#}$ .

Plus précisément, nous introduisons des classes d'opérateurs  $O(m, g)$  et une application symbole  $\sigma$ , de  $O(m, g)/O(m\lambda^{-\infty}, g)$  dans  $S(m, g)/S(m\lambda^{-\infty}, g)$  telles que

$$a) \quad \sigma(A \circ B) = \sigma(A) \tilde{\#} \sigma(B)$$

b) Le symbole d'un bon opérateur (différentiel, pseudo-différentiel classique...) est (la classe de) son symbole usuel.

c)  $\sigma$  est bijectif (à quelques restrictions de support près lorsque  $\Omega \neq \mathbb{R}^{2n}$ ).

I CALCUL PSEUDO-DIFFERENTIEL SUR UN OUVERT DE L'ESPACE DES PHASES.

## 2. TEMPERANCE SYMETRIQUE ET CONFINEMENT.

2.1. Notations. On se donne, pour les §§ 2 et 3, une métrique  $g$ , dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , satisfaisant à (1.6) (lenteur) et (1.11) (principe d'incertitude). On notera  $U_{X,r}$  la boule

$$(2.1) \quad U_{X,r} = \{Y \mid g_X(Y-X) < r^2\}$$

On dira qu'un ouvert est  $g$ -conique s'il est réunion de boules de rayon  $r$  pour un  $r > 0$ . Pour  $V$  et  $V'$  ouverts contenus dans  $\Omega$ , on utilisera les notations suivantes :

$$(2.2) \quad V_r = \{X \in V \mid U_{X,r} \subset V\}$$

$$(2.3) \quad V' \subset\subset V \Leftrightarrow \exists r > 0, V' \subset V_r$$

Enfin, pour  $X, Y \in \Omega$ , on définit la métrique "moyenne harmonique" :

$$g_{XY}^\sigma(T) = \left[ \frac{1}{2} (g_X + g_Y) \right]^\sigma = 2 \operatorname{Inf}_{T_1 + T_2 = T} [g_X^\sigma(T_1) + g_Y^\sigma(T_2)]$$

2.2. Tempérance symétrique. Nous supposons que  $g$  vérifie la propriété suivante, pour  $C$  et  $N_0$  fixés :

$$(2.4) \quad g_Y(\cdot) / g_X(\cdot) \leq C [1 + g_{XY}^\sigma(X-Y)]^{N_0}$$

2.3. Remarque. Lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$ , on peut montrer que cette condition est équivalente à la condition de tempérance (1.14) de Hörmander. Exiger (2.4) est plus restrictif que d'exiger (1.14) dans  $\Omega$ , mais moins restrictif que d'exiger (1.14) pour un prolongement de  $g$  à  $\mathbb{R}^{2n}$ . Un calcul pour  $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^n$  est également développé par Dencker [9].

2.4. Partitions de l'unité. Théorème. Soient  $0 < r < r'$ . Il existe alors une famille de fonctions  $\{\varphi_Y\}_{Y \in V}$ , bornée dans  $S(1, g)$  telle que le support de  $\varphi_Y$  soit contenu dans  $U_{Y,r}$ , et que

$$(2.5) \quad \int_{\Omega_r} \varphi_Y (\det g_Y)^{1/2} dy = 1 \quad \text{sur } \Omega_{r'}$$

Ceci n'utilise que la lenteur de  $g$ . Ces partitions continues joueront le même rôle que les partitions discrètes de [3]. Si  $a \in S(1, g)$  est à support dans  $\Omega_{r'}$ , on pose  $a_Y = a \cdot \varphi_Y$  et on a

$$(2.6) \quad a = \int a_Y (\det g_Y)^{1/2} dY ,$$

les  $a_Y$  étant bornées dans  $S(1, g)$  et à support dans  $U_{Y,r}$ . Toutefois, le support de  $a_Y \# a_Y$  (par exemple) contiendra en général des points extérieurs à  $\Omega$ , où l'on ne dispose pas de métrique pour l'évaluer. C'est la raison de l'introduction du concept suivant, moins restrictif que la condition de support.

2.5. Confinement. Définition. Soit  $U_{Y,r} \subset \Omega$ . L'espace des symboles confinés dans  $U_{X,r}$  est l'ensemble des  $a$  vérifiant

$$(2.7) \quad \langle a^k(X), T_1 \otimes \dots \otimes T_k \rangle \leq C_{k,N} \prod g_Y(T_j)^{1/2} (1 + g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}))^{-N}$$

quels que soient  $k$  et  $N$ . Les semi-normes de  $a$  sont définies à partir des meilleures constantes  $C_{k,N}$  par  $\|a\|_{p,Y,r} = \text{Sup} \{C_{kN}; k, N \leq p\}$ .

On a utilisé la notation  $g^\sigma(X-U) = \inf\{g^\sigma(X-Z), Z \in U\}$ . L'espace ainsi défini n'est autre que  $S$ , mais l'important est l'indexation des semi-normes. Par exemple on parlera de famille  $(a_Y)$  uniformément bornée de symboles confinés dans  $U_{Y,r}$  si pour chaque  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\sup \|a_Y\|_{p,Y,r} < \infty$ .

2.6. Confinement et continuité  $L^2$ . Théorème. Il existe une constante  $K$  ne dépendant que de la dimension  $n$ , telle que l'on ait, pour  $a \in S$ :

$$(2.8) \quad \|a^W\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq K \|a\|_{2n+2, Y, r}$$

$$(2.9) \quad \|a\|_0 \leq \|a^W\|_{\mathcal{L}(L^2)} + n\lambda(Y)^{-1} \|a\|_{2, Y, r}$$

Ce qui précède n'utilise en fait que la lenteur de  $g$ . Par contre, la tempérance symétrique joue un rôle essentiel dans la démonstration des théorèmes suivants. Nous utiliserons la notation suivante pour  $X, Y \in \Omega_r$ .

$$(2.10) \quad \delta_r(X, Y) = 1 + \inf\{g_{XY}^\sigma(X' - Y'); X' \in U_{X,r}, Y' \in U_{Y,r}\}$$

2.7. Théorème fondamental. Quels que soient  $p, N, \nu$ , il existe un entier  $q$ , et des constantes  $C$  et  $C_\nu$  ne dépendant que des constantes de lenteur et de tempérance et de  $p, N$  (et  $\nu$ ), tels que l'on ait, pour  $a, b \in S(\mathbb{R}^{2n})$  et  $Y, Z \in \Omega_r$ :

$$(2.11) \quad \|a \# b\|_{p, Y, r} \leq C \|a\|_{q, Y, r} \|b\|_{q, Z, r} \delta_r(Y, Z)^{-N}$$

$$(2.12) \quad \| a \# b(X) - \sum_0^{v-1} \frac{1}{k!} \left[ \frac{i\sigma(D_X, D_Y)}{2} \right]^k a(X) b(Y) \Big|_{Y=X} \|_{p,Y,r} \leq \\ \leq C_v \| a \|_{q,Y,r} \| b \|_{q,Z,r} \lambda(Y)^{-v} \delta_r(Y,Z)^{-N} .$$

On a bien entendu les mêmes formules pour le confinement au point Z dans les membres de gauche. La démonstration est fondée sur des intégrations par parties dans (1.4) et sur l'utilisation de (2.4).

2.8. Propriétés fondamentales des fonctions  $\delta_r$  . Théorème. Il existe des constantes  $r_0$  , N, C,  $C_r$  ne dépendant que des constantes de lenteur et de température (et r) telles que, pour  $r \leq r_0$

$$(2.13) \quad \sup_{x \in \Omega_r} \int_{\Omega_r} \delta_r(X,Y)^{-N} (\det g_Y)^{1/2} dY < C$$

$$(2.14) \quad g_X(X-Y) \geq Cr^2 \Rightarrow \lambda(Y) \leq C_r \delta_r^N(X,Y)$$

pour  $X, Y \in \Omega_r$  .

3. CALCUL SYMBOLIQUE.

3.1. Poids admissibles. Définition. On appellera poids admissible un poids m (vérifiant (1.7)) tel qu'il existe C et N avec

$$(3.1.) \quad m(Y)/m(X) \leq C [1 + g_{XY}^\sigma(X-Y)]^N .$$

En particulier, les fonctions  $X \rightarrow g_X(T)$  et  $X \rightarrow \lambda(X)^S$  sont des poids admissibles. Il résulte de (3.1) et de la lenteur que l'on a, pour tout  $r > 0$ , et  $X, Y \in \Omega_r$  :

$$(3.2) \quad m(Y)/m(X) \leq C^{te} \delta_r(X,Y)^N$$

3.2. Opérateurs internes. Définition. Nous noterons  $Op \text{ int}(m, g, \Omega)$ , pour tout poids admissible m , l'ensemble des opérateurs de la forme

$$(3.3) \quad A = \int_V m(Y) a_Y^w (\det g_Y)^{1/2} dY$$

où  $(a_Y)$  est une famille uniformément bornée de symboles confinés dans  $U_{Y,r}$  , et où on a  $V \subset \Omega_{r'}$  , ,  $r' > r$  .

La décomposition (3.3) n'est bien sûr pas unique. A l'aide d'un théorème de partition des symboles confinés, on peut supposer  $r$  aussi petit qu'on le veut. L'intégrale (3.3) a un sens pour la convergence forte, comme l'assure le théorème suivant.

3.3. Théorème.

- a) Les opérateurs internes appliquent  $S$  dans  $S$  et  $S'$  dans  $S'$
- b) Si  $m = 1$ , ils appliquent  $L^2$  dans  $L^2$ .
- c) Les opérateurs internes forment, pour la composition, une algèbre graduée (par le monoïde multiplicatif des poids admissibles), stable par adjoint.

Esquisons la preuve de b). Le lemme de Cotlar sous forme intégrale (voir [3] Lemme 18.6.5 dans le cas discret) assure la convergence forte de (3.3) et la continuité  $L^2$  de  $A$  si on a

$$(3.4) \quad \left\| \overline{a}_Y^w \circ a_Z^w \right\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{1/2} + \left\| a_Y^w \circ \overline{a}_Z^w \right\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{1/2} \leq K(Y,Z)$$

avec

$$(3.5) \quad \sup_Z \int K(Y,Z) (\det g_Y)^{1/2} dY < \infty$$

Il résulte de (2.8) et de (2.11) que, pour tout  $N$ , on a (3.4) avec  $K(Y,Z) = C^{te} \delta_r(Y,Z)^{-N}$  et le résultat est conséquence immédiate de (2.13).

Pour prouver c), on a, avec des notations évidentes

$$(3.6) \quad A_1 \circ A_2 = \int_{m_1(Y)} m_2(Y) (\det g_Y)^{1/2} dY \int \frac{m_2(Z)}{m_2(Y)} [a_{1Y} \# a_{2Z}]^w (\det g_Z)^{1/2} dZ .$$

D'après le théorème 2.7,  $a_{1Y} \# a_{2Z}$  est un symbole confiné dans  $U_{Y,r}$ , dont les semi-normes décroissent comme  $\delta_r(Y,Z)^{-N}$  pour tout  $N$ . L'intégrale de droite définit donc une famille uniformément bornée de symboles confinés dans  $U_{Y,r}$ : il suffit de choisir  $N$  assez grand pour d'une part absorber le rapport  $m_2(Z)/m_2(Y)$  d'après (3.2) et d'autre part rendre l'intégrale convergente d'après (2.13).

3.4. Quantification exacte. On peut définir l'espace des "symboles internes" d'ordre  $m$  comme l'espace des  $a$  de la forme

$$(3.7) \quad a(X) = \int_V m(Y) a_Y(X) (\det g_Y)^{1/2} dY ,$$

sous les conditions du n°3.2. Ce sont des fonctions  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , à croissance lente ainsi que chacune de leurs dérivées. L'opération # s'étend à ces espaces, et en fait une algèbre graduée, isomorphe (par  $a \mapsto a^w$ ) à celle des opérateurs internes.

Les caractérisations que l'on peut donner de ces espaces ne sont toutefois guère plus explicites que (3.7). Par contre, modulo des symboles négligeables, ils coïncident avec les espaces de symboles à support dans  $\Omega$ , ce qui rend le calcul asymptotique beaucoup plus maniable.

3.5. Quantification asymptotique. On pose

$$(3.8) \quad S_0(m, g, \Omega) = \{a \in S(m, g, \Omega) \mid \text{Supp}(a) \subset\subset \Omega\} .$$

Si  $a \in S_0(m, g, \Omega)$ , on peut le décomposer, à l'aide d'une partition de l'unité, sous la forme (3.7), et  $a^w$  n'est autre que l'opérateur interne  $A$  défini en (3.3).

Réciproquement, si  $A$  est défini par (3.3), on peut lui associer un élément  $\sigma_A(X)$  de  $S_0(m, g, \Omega)$  par

$$(3.9) \quad \sigma_A(X) = \int_V m(Y) a_Y(X) \chi_Y(X) (\det g_Y)^{1/2} dY$$

où les  $\chi_Y$  forment une famille, bornée dans  $S(1, g, \Omega)$  de fonctions égales à 1 dans  $U_{Y, r_1}$  et à 0 hors de  $U_{Y, r_2}$ , avec  $r < r_1 < r_2$  proche de  $r$ . La classe de  $\sigma_A$  dans  $S_0(m)/S_0(m\lambda^{-\infty})$  ne dépend pas du choix des  $\chi_Y$  on a le théorème suivant.

3.6. Théorème. La quantification de Weyl et l'application définie par (3.9) induisent des isomorphismes, inverses l'un de l'autre, entre les algèbres graduées

$$S_0(m, g, \Omega)/S_0(m\lambda^{-\infty}, g, \Omega) \text{ (pour l'opération } \# \text{)} \text{ et}$$

$$\text{Opint}(m, g, \Omega)/\text{Opint}(m\lambda^{-\infty}, g, \Omega) \text{ pour la composition.}$$

Les opérateurs différentiels à coefficients constants ou modérés, et notamment l'identité, ne sont pas en général des opérateurs internes, mais ils opèrent sur ces derniers par composition. Ils appartiennent aux classes suivantes qui jouissent encore d'un calcul symbolique.

3.7. Opérateurs externes, Définition. On note  $\text{Opext}(m, g, \Omega)$  l'espace des opérateurs  $A$  appliquent  $S(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même,  $S'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, et tel que, pour tout  $b \in S(\mathbb{R}^{2n})$ , il existe  $b_1$  et  $b_2$  dans  $S(\mathbb{R}^{2n})$  vérifiant

$$A \circ b^w = b_1^w ; \quad b^w \circ A = b_2^w$$

$$\|b_i\|_{p, Y, r} \leq K m(Y) \|b\|_{q, Y, r}$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , avec  $q = q(p)$  et où  $K = K(p, r, V)$  est indépendant de  $Y$  lorsque  $Y$  parcourt un ouvert  $V \subset \Omega_{r'}$ ,  $r' > r$ .

Les opérateurs externes forment une algèbre graduée pour la composition, et les opérateurs internes en constituent un idéal gradué. Les  $\text{Opext}$  croissent lorsque  $\Omega$  décroît.

On définit l'espace  $S_{\text{loc}}(m, g, \Omega)$  comme l'espace des fonctions  $a \in C^\infty(\Omega)$  telles que, pour tout  $V \subset\subset \Omega$ , la restriction de  $a$  à  $V$  appartienne à  $S(m, g, V)$ .

A tout élément  $A$  de  $\text{Opext}(m, g, \Omega)$ , on peut associer un unique élément  $\sigma(A)$  de  $S_{\text{loc}}(m, g, \Omega) / S_{\text{loc}}(m\lambda^{-\infty}, g, \Omega)$  de telle sorte que, pour  $B \in \text{Opint}(m', g, \Omega)$ , on ait

$$\sigma(A \circ B) = \sigma(A) \# \sigma(B) \text{ et } \sigma(B \circ A) = \sigma(B) \# \sigma(A)$$

L'application  $A \rightarrow \sigma(A)$  induit un homomorphisme injectif d'algèbres graduées de  $\text{Opext}(m, g, \Omega) / \text{Opext}(m\lambda^{-\infty}, g, \Omega)$  dans  $S_{\text{loc}}(m, g, \Omega) / S_{\text{loc}}(m\lambda^{-\infty}, g, \Omega)$ .

3.8. Régularité microlocale, Définition. Soit  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ,  $m$  un poids admissible, et  $V$  un ouvert conique contenu dans  $\Omega$ . On dit que  $u$  appartient à  $H(m, g, V)$  [ou appartient à  $H(m)$  microlocalement dans  $V$ ] si pour tout  $A \in \text{Opint}(m, g, V)$ , on a

$$Au \in L^2$$

Il résulte du n°3.7 et du théorème 3.3 b) que tout élément  $B$  de  $\text{Opext}(m, g, V)$  applique  $H(m', g, V)$  dans  $H(m'/m, g, V)$ .

## II MICROLOCALISATIONS D'ORDRE SUPERIEUR.

### 4. DONNEES GEOMETRIQUES ET HYPOTHESES.

Dans tout ce qui suit, on se donne une suite décroissante  $\Omega_1 \supset \Omega_2 \dots \supset \Omega_k = \Omega$  d'ouverts de  $\mathbb{R}^{2n}$ , et une suite croissante de métriques

$g_1, \dots, g_k$ , vérifiant (1.6) (lenteur) et (1.11) (principe d'incertitude), définies respectivement dans les  $\Omega_\ell$ . On a donc, pour  $Y \in \Omega_\ell$ .

$$g_{\ell,Y}(\cdot) \leq g_{\ell+1,Y}(\cdot) \leq g_{\ell+1,Y}^\sigma(\cdot) \leq g_{\ell Y}^\sigma(\cdot)$$

On utilisera les notations géométriques du n°2 avec un indice  $\ell$  [ $U_{\ell,Y,r}$ ;  $\delta_{\ell,r}$ ;  $\lambda_\ell$ ;  $g_{\ell,XY}^\sigma \dots$ ] pour les notions relatives à  $(\Omega_\ell, g_\ell)$ , et éventuellement sans indice [ $\Omega_r$ ;  $V' \subset V \dots$ ] pour  $(\Omega_k, g_k)$ .

Pour simplifier, on supposera qu'il existe  $r > 0$  tel que, pour tout  $X$  de  $\Omega_{\ell+1}$  on ait  $U_{\ell,X,r} \subset \Omega_\ell$ .

Lorsque  $\ell$  croît, le calcul symbolique est de plus en plus fin, mais le "gain" de ce calcul, donné par  $\lambda_\ell$ , décroît. Pour quantifier le calcul asymptotique, nous aurons besoin des deux hypothèses suivantes.

4.1. Hypothèse. Dans chaque  $g_\ell$ -boule de rayon assez petit, la métrique  $g_{\ell+1}$  est symétriquement tempérée, avec des constantes uniformes. Plus précisément,  $g_1$  vérifie (2.4) dans  $\Omega_1$ , et il existe  $C$  et  $N$  avec

$$(4.1) \quad g_{\ell,X}(X-Y) \leq C^{-1} \Rightarrow g_{\ell+1,Y}(\cdot)/g_{\ell+1,X}(\cdot) \leq C[1+g_{\ell+1,XY}^\sigma(X-Y)]^N$$

pour  $\ell = 1, \dots, k-1$ , et  $X, Y \in \Omega_{\ell+1}$ .

4.2. Hypothèse. Il existe  $C$  et  $N$  tels que

$$(4.2) \quad g_{\ell+1,X}(\cdot) \leq C\lambda_\ell(X)^N g_\ell(\cdot)$$

pour  $\ell = 1, \dots, k-1$ , et  $X \in \Omega_{\ell+1}$ .

4.3. Remarque. Dans les applications d'origine géométrique, on a très fréquemment  $g_{\ell,X}^\sigma = \lambda_\ell(X)^2 g_{\ell,X}$ . C'est notamment le cas pour tous les exemples donnés au § 9. S'il en est ainsi, on a

$$g_{\ell+1,X} \leq g_{\ell+1,X}^\sigma \leq g_{\ell,X}^\sigma = \lambda_\ell^2(X) g_{\ell,X}$$

et la vérification de (4.2) est automatique.

Une partie de la théorie reste valable sans l'hypothèse 4.2., notamment l'existence d'une quantification associant aux éléments de  $S_0(1, g_k, \delta_k)$

des opérateurs bornés sur  $L^2$ , mais on perd le théorème 5.6. et ses conséquences sur les régularités k-microlocales.

4.4. Fonctions  $\Delta_{k,r}(Y,Z)$ . Cette fonction, qui servira à contrôler la presque orthogonalité, est définie par récurrence de la façon suivante, avec  $K$  fixé assez grand et  $r < r_0$  assez petit.

$$(4.3) \quad \Delta_{1,r}(Y,Z) = \delta_{1,r}(Y,Z) \quad (\text{voir (2.10)})$$

$$(4.4) \quad \Delta_{\ell+1,r}(Y,Z) = \begin{cases} \lambda_{\ell}(Y)\lambda_{\ell}(Z)\Delta_{\ell,r}(Y,Z) & \text{si } g_{\ell,Y}(Y-Z) > Kr^2 \\ & \text{ou } g_{\ell,Z}(Y-Z) > Kr^2 \\ \text{Inf}\{\lambda_{\ell}(Y)\lambda_{\ell}(Z)\Delta_{\ell,r}(Y,Z) ; \delta_{\ell+1,r}(Y,Z)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

La constante  $K$  est choisie assez grande pour que (voir (2.14))

$$(4.5) \quad \text{Inf}\{g_{\ell,Y}(Y-Z), g_{\ell,Z}(Y-Z)\} \geq Kr^2 \Rightarrow \lambda_{\ell}(Y) \leq \text{cte } \delta_{\ell,r}^N(Y,Z) .$$

On choisit enfin  $r_0$  tel que  $Kr_0$  soit inférieur à la constante  $C^{-1}$  de (4.1). Quels que soient  $\ell, Y, Z$ , l'une au moins des implications (4.7) ou (4.5) est utilisable. On en déduit par récurrence le théorème suivant, en utilisant notamment (2.13) et la conséquence suivante de (4.2) :

$$(4.6) \quad \det g_{\ell+1,Y} \leq C^{\text{te}} \lambda_{\ell}(Y)^N \det g_{\ell,Y}$$

4.5. Théorème. La fonction  $\Delta_{k,r}$  est décroissante en  $r$ , et il existe  $N$  tel que, pour  $0 < r < r_0$ ,

$$(4.7) \quad \sup_{Y \in \Omega_r} \int_{\Omega_r} \Delta_{k,r}(Y,Z)^{-N} (\det g_{kZ})^{1/2} dZ < \infty .$$

4.6 Poids admissibles. Ils sont définis par récurrence sur  $k$  de la façon suivante. Pour  $k = 1$ , ce sont les poids admissibles pour  $g_1$  au sens de la définition 3.1.

Les poids admissibles d'ordre  $k$  sont les fonctions de la forme  $M(Y) m(Y)$ , où  $M$  est admissible d'ordre  $k-1$ , et où  $m$  vérifie

$$(4.8) \quad C^{-1} \lambda_{k-1}(Y)^{-N} \leq m(Y) \leq C \lambda_{k-1}(Y)^N \\ m(Y)/m(X) \leq C [1 + g_{kXY}^{\sigma}(X-Y)]^N \quad \text{pour } g_{kX}(X-Y) \leq C^{-1}$$

pour C et N convenables.

On démontre alors par récurrence la propriété fondamentale suivante :

$$(4.9) \quad m(Y)/m(X) \leq C^{te} \Delta_r(X,Y)^N$$

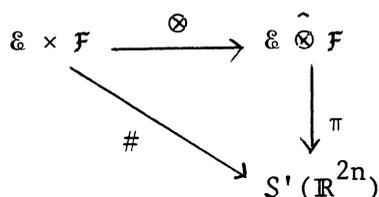
où la constante est uniforme pour  $X, Y \in \Omega_r$ .

Les poids admissibles les plus importants sont les fonctions

$$(4.10) \quad M(Y) = \lambda_1(Y)^{s_1} \dots \lambda_k(Y)^{s_k}.$$

5. CONFINEMENT D'ORDRE SUPERIEUR.

5.1. Espaces  $\mathcal{E} \# \mathcal{F}$ . Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux sous-espaces de  $S'(\mathbb{R}^{2n})$ , munis d'une suite (indexée par  $\mathbb{N}$ !) de semi-normes qui en font des espaces de Fréchet. On suppose que l'application  $\#$  envoie continûment  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$  dans  $S'(\mathbb{R}^{2n})$ . Le produit tensoriel projectif complété  $\widehat{\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}}$  est alors muni canoniquement d'une suite de semi-normes, et il existe une unique application linéaire continue  $\pi$  rendant commutatif le diagramme ci-dessous.



Nous noterons  $\widehat{\mathcal{E} \# \mathcal{F}}$  l'image de  $\pi$ , muni de la suite canonique de semi-normes de  $\widehat{\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}}/\text{Ker } \pi$ . C'est un espace de Fréchet. En fait, tous les espaces que nous considérerons seront égaux à  $S(\mathbb{R}^{2n})$  car on peut prouver que  $S \# S = S$ , mais ce qui nous importe ici n'est pas seulement la structure de Fréchet, c'est la suite indexée des semi-normes.

Si par exemple  $\mathcal{E}_Y, \mathcal{F}_Y, \mathcal{G}_Y$  dépendent d'un paramètre  $Y$ , les propriétés universelles du produit tensoriel et du quotient se traduisent par la propriété suivante : pour que des applications linéaires  $T_Y$  de  $\widehat{\mathcal{E}_Y \# \mathcal{F}_Y}$  dans  $\mathcal{G}_Y$  soient continues uniformément en  $Y$ , il faut et il suffit que les applications bilinéaires  $(e,f) \rightarrow T_Y(e \# f)$  soient continues uniformément en  $Y$ , c'est à dire que

$$\forall p, \exists q, \exists C, \forall Y, \forall e, \forall f \quad \|T_Y(e \# f)\|_{p,Y} \leq C \|e\|_{q,Y} \|f\|_{q,Y}$$

où  $\|\cdot\|_{p,Y}$  est la p-ième semi norme de  $\cdot$  dans l'espace adéquat.

5.2. Définition récurrente des espaces de symboles k-confinés (au sens strict).

Nous noterons dorénavant  $W\text{-Conf}(g_\lambda, Y, r)$  l'espace (muni de sa suite

de semi-normes), défini au n°2.5, des symboles confinés, pour le  $g_\ell$ -calcul de Weyl, dans la boule  $U_{\ell,Y,r}$ .

Les espaces  $\text{Conf}(\ell,Y,r)$  de symboles  $\ell$ -confinés sont définis comme suit :

$$\text{Conf}(1,Y,r) = \text{W-Conf}(g_1,Y,r)$$

et, pour  $\ell = 2, \dots, k$

$$(5.1) \quad \text{Conf}(\ell,Y,r) = \text{Conf}(\ell-1,Y,r) \hat{\#} \text{W-Conf}(g_\ell,Y,r) \hat{\#} \text{Conf}(\ell-1,Y,r)$$

Les symboles  $k$ -confinés peuvent donc s'écrire (avec semi-normes contrôlées) comme des (séries de) "sandwiches" de symboles  $W$ -confinés pour les diverses métriques  $g_\ell$ . L'idée essentielle est que l'on pourra cumuler, pour le composé de deux tels symboles, les propriétés de presque orthogonalité (du type théorème 2.7) dues aux propriétés de tempérance de toutes les  $g_\ell$ . Ce cumul sera précisément exprimé par la fonction  $\Delta_{k,r}$  introduite au n°4.4.

5.3. Propriétés élémentaires des symboles  $k$ -confinés. Les trois propriétés suivantes expriment (avec uniformité) que a) les symboles  $k$ -confinés sont confinés pour le  $g_k$ -calcul de Weyl ; b) un symbole  $k$ -confiné dans une boule centrée en  $Y$  est  $k$ -confiné dans des boules (de rayon un peu plus grand) centrées aux points voisins ; c) si on place une denrée comestible entre deux sandwiches, on obtient encore un sandwich. Elles se démontrent aisément par récurrence, en notant qu'un élément de  $S(1, g_{\ell Y}, \mathbb{R}^{2n})$  appartient aussi à  $S(1, g_{kY}, \mathbb{R}^{2n})$  (voir (1.8))

a) L'application identique est continue, uniformément en  $Y$ , de

$$\text{Conf}(k,Y,r) \text{ dans } \text{W-Conf}(g_k,Y,r)$$

b) Pour tout  $K$ , il existe  $K'$  tel que, si  $r$  est assez petit devant  $K^{-1}$ , l'application identique est continue (uniformément en  $Y$  et  $Z$ ) de

$$\text{Conf}(k,Y,r) \text{ dans } \text{Conf}(k,Z,K'r) \text{ dès que } g_{kY}(Y-Z) \leq Kr.$$

c) L'application  $(a,b,c) \rightarrow a\#b\#c$  est continue, uniformément en  $Y$ , de  $\text{Conf}(k,Y,r) \times S(1, g_{kY}, \mathbb{R}^{2n}) \times \text{Conf}(k,Y,r)$  dans  $\text{Conf}(k,Y,r)$ .

5.4. Existence de projecteurs. Théorème. Soient  $0 < r < r'$ . Il existe alors une famille  $\pi_Y \in \text{Conf}(k,Y,r')$ , pour  $Y \in \Omega_r$ , uniformément bornée en  $Y$ ,

telle que

a) Pour tout  $N$ , les applications  $a \mapsto \lambda_k(Y)^N (a - \pi_Y \# a)$  et  $a \mapsto \lambda_k(Y)^N (a - \# \pi_Y)$  sont continues, uniformément en  $Y$ , de  $\text{Conf}(k, Y, r)$  dans  $\text{Conf}(k, Y, r')$ .

b) On a  $\pi_Y = \chi_Y + \varphi_Y$ , où  $\chi_Y$  appartient uniformément à  $S(1, g_{kY})$ , vaut 1 dans  $U_{k, Y, r}$  et 0 hors de  $U_{k, Y, r'}$ , et où, pour tout  $N$ ,  $\lambda_k(Y)^N \varphi_Y$  appartient uniformément à  $W\text{-conf}(g_k, Y, r')$ .

Pour  $k = 1$ , il suffit de prendre les  $\pi_Y$  égaux aux fonctions  $\chi_Y$  décrites ci-dessus. Sinon, on prend  $\pi_Y = \Pi_Y \# \chi_Y \# \Pi_Y$ , où les  $\Pi_Y$  sont les projecteurs relatifs à  $(k-1)$ .

5.5. Lemme. Il existe des constantes  $N(p)$  et  $C(p)$  telles que, pour  $a \in S$ , on ait la relation suivante entre les semi-normes de  $a$  dans  $W\text{-Conf}(g_k, Y, r)$  et  $W\text{-Conf}(g_{k-1}, Y, r)$  :

$$\|a\|_{k-1, p, Y, r} \leq C(p) \lambda_{k-1}(Y)^{N(p)} \|a\|_{k, p, Y, r} .$$

Ce lemme exprime qu'une famille  $(a_Y)$  uniformément bornée de symboles confinés pour  $g_k$  peut être considérée comme une famille non uniformément bornée, mais à croissance contrôlée, de symboles confinés pour  $g_{k-1}$ . La démonstration est immédiate à partir de la définition 2.5., si l'on remarque que  $U_{k, Y, r} \subset U_{k-1, Y, r}$ , et que  $g_{kY}(\cdot) \leq C \lambda_{k-1}(Y)^N g_{k-1}(\cdot)$ ,

$$g_{k, Y}^\sigma(\cdot) \geq C^{-1} \lambda_{k-1}(Y)^{-N} g_{k-1, Y}^\sigma(\cdot) \text{ d'après l'hypothèse 4.2.}$$

5.6. Théorème fondamental. Il existe  $C > 1$  et  $r_0 > 0$  tels que, pour  $r < r_0$ , pour  $Y, Z \in \Omega_{Cr}$ , et pour tout  $N$ , l'application

$$(a_1, a_2) \mapsto \Delta_{k, Cr}(Y, Z)^N a_1 \# a_2$$

$$\text{Conf}(k, Y, r) \times \text{Conf}(k, Z, r) \rightarrow \text{Conf}(k, Y, Cr) \cap \text{Conf}(k, Z, Cr)$$

est continue, uniformément en  $Y$  et  $Z$ .

En vertu des remarques du n°5.1., il suffit de prouver la continuité, uniforme en  $Y$  et  $Z$ , du produit par  $\Delta_{k, Cr}(Y, Z)^N$  de l'application hexa-linéaire :

$$(A_Y, b_Y, C_Y, A_Z, b_Z, C_Z) \longmapsto T = A_Y \# b_Y \# C_Y \# A_Z \# b_Z \# C_Z$$

de  $\text{Conf}(k-1, Y, r) \times W\text{-conf}(g_k, Y, r) \times \text{Conf}(k-1, Y, r) \times \dots \times \text{Conf}(k-1, Z, r)$  dans  $\text{Conf}(k, Y, Cr)$ . On procède par récurrence, en notant  $\gamma$  la constante  $C$  relative au théorème supposé établi au rang  $k-1$ . On distinguera deux cas

1er cas.  $\text{Inf}\{g_{k-1, Y}(Y-Z), g_{k-1, Z}(Y-Z)\} < Kr^2$ , où  $K$  est la constante du n°4.4. On a dans ce cas

$$\Delta_{k, Cr}(Y, Z) \leq \Delta_{k, r}(Y, Z) \leq \delta_{k, r}(Y, Z)$$

On peut écrire  $T = A_Y \# \beta \# C_Z$ , et on a  $C_Z \in \text{Conf}(k-1, Y, K'r)$  avec semi-normes contrôlées, en vertu du n°5.3.b). Quant aux semi-normes de  $\beta = (b_Y \# C_Y) \# (A_Z \# b_Z)$  dans  $W\text{-Conf}(g_k, Y, r)$ , le théorème 2.7 permet de les estimer uniformément, en "gagnant" des puissances arbitraires de  $\delta_{k, r}(Y, Z)$  et donc de  $\Delta_{k, Cr}(Y, Z)$ .

2ème cas.  $\text{Inf}\{g_{k-1, Y}(Y-Z), g_{k-1, Z}(Y-Z)\} \geq Kr^2$ . On a dans ce cas

$$\Delta_{k, r}(Y, Z) = \lambda_{k-1}(Y) \lambda_{k-1}(Z) \Delta_{k-1, r}(Y, Z)$$

$$(5.2.) \quad \Delta_{k-1, r}(Y, Z) \geq \text{Min}[\lambda_{k-2}(Y); \delta_{k-1, r}(Y, Z)] \geq C^{\text{te}} \lambda_{k-1}(Y)^{1/N}$$

d'après (4.4) et (4.5), et donc

$$\Delta_{k, r}(Y, Z) \leq C^{\text{te}} \Delta_{k-1, r}(Y, Z)^{2N+1}$$

On introduit une famille de projecteurs  $(\Pi_Y)$  du  $(k-1)$  calcul (voir n°5.4) relatifs aux rayons  $r$  et  $2r$  par exemple, et on décompose  $T = T_1 + T_2$  comme suit

$$a) \quad T_1 = A_Y \# b_Y \# \{ [C_Y \# \Pi_Z] \# [A_Z \# b_Z \# C_Z] \}$$

Le second crochet peut être considéré comme un élément de  $\text{Conf}(k-1, Z, r)$ , d'après 5.3. c) et le lemme 5.5., avec des semi-normes croissant comme des puissances de  $\lambda_{k-1}(Z)$ . Par contre, le premier crochet est, d'après l'hypothèse de récurrence, un élément de  $\text{Conf}(k-1, Y, 2\gamma r)$  dont les semi-normes décroissent comme toute puissance de  $\Delta_{k-1, \gamma r}(Y, Z)$  et donc (d'après (5.2.)) comme toute puissance de  $\lambda_{k-1}(Z)$ . Une nouvelle application de l'hypothèse

de récurrence montre que l'accolade appartient à  $\text{Conf}(k-1, Y, 2\gamma^2 r)$ , avec gain d'une puissance arbitraire de  $\Delta_{k-1, 2\gamma^2 r}^{(Y, Z)}$  et donc de  $\Delta_{k, Cr}^{(Y, Z)}$  pourvu que  $C > 2\gamma^2$ .

$$b) \quad T_2 = A_Y \# b_Y \# \{ C_Y \# [ (A_Z - \Pi_Z \# A_Z) \# b_Z \# C_Z ] \}$$

Les semi-normes du crochet dans  $\text{Conf}(k-1, Z, 2r)$  s'estiment à l'aide de 5.3. c), les pertes sur  $b_Z$  (Lemme 5.5) étant compensées par le gain sur  $(A_Z - \Pi_Z \# A_Z)$  (Théorème 5.4. a). L'hypothèse de récurrence montre que les semi-normes de l'accolade dans  $\text{Conf}(k-1, Y, 2\gamma r)$  décroissent comme toute puissance de  $\Delta_{k-1, 2\gamma r}^{(Y, Z)}$  et donc de  $\Delta_{k, Cr}^{(Y, Z)}$  si  $C > 2\gamma$ . La preuve est complète.

5.7. Confinement large. Il sera commode d'adjoindre aux symboles k-confinés (stricts), les symboles confinés "négligeables" des calculs précédents. On définit d'abord l'espace  $\text{Negl}(\ell, Y, r)$  dont la semi-norme d'indice  $(p, q)$  est  $\lambda_\ell(Y)^p$  fois la  $q^e$  semi-norme de  $\text{Conf}(\ell, Y, r)$  [on réindexe ensuite les  $(p, q)$  par les entiers]. Une famille uniformément bornée  $(a_Y)$  de symboles négligeables est donc une famille telle que, pour tout  $p$ ,  $(\lambda(Y)^p a_Y)$  soit une famille uniformément bornée de symboles confinés.

On définit ensuite les espaces des symboles confinés au sens large :

$$\overline{\text{Conf}}(k, Y, r) = \text{Conf}(k, Y, r) + \sum_1^{k-1} \text{Negl}(\ell, Y, r)$$

avec les semi-normes canoniques (réindexées par  $\mathbb{N}$ ) de l'espace somme.

A l'exception de la propriété 5.3. a) qui doit être modifiée de façon évidente, toutes les propriétés précédentes des symboles k-confinés stricts s'étendent aux confinés larges : 5.3. b), 5.3. c), le théorème 5.4. et surtout le théorème 5.6. La démonstration de ce dernier est facile, en utilisant le théorème 5.6. "strict" pour  $\ell = 1, \dots, k$  et en remarquant que, uniformément en  $Y$ , chaque semi-norme de  $a$  dans  $\text{Conf}(\ell, Y, r)$  est majorée par une puissance déterminée de  $\lambda_\ell(Y)$  fois une semi-norme de  $a$  dans  $\text{Conf}(k, Y, r)$ , ce dernier point résultant du Lemme 5.5.

On démontre facilement par récurrence les propriétés suivantes, à partir des propriétés correspondantes des symboles W-confinés.

5.8. Propriétés de continuité. Théorème.

a) L'application  $a \mapsto a^W$  est continue, uniformément en  $Y$ , de  $\overline{\text{Conf}}(k, Y, r)$  dans  $\mathcal{L}(L^2)$ .

b) Si  $M(Y)$  est un poids admissible, et si  $(a_Y)$  est uniformément bornée dans  $\overline{\text{Conf}(k, Y, r)}$  (et mesurable en  $Y$ ),

$$u \rightarrow \int_{\Omega_r} m(Y) \|a_Y^w u\|_L^2 (\det g_{kY})^{1/2} dy$$

est une semi-norme sur  $S$ .

c) Pour toute forme linéaire  $L(X)$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , il existe un poids admissible  $M$  tel que les applications  $a \mapsto M(Y)^{-1} L \# a$  et  $M(Y)^{-1} a \# L$  soient continues, uniformément en  $Y$ , de  $\overline{\text{Conf}(k, Y, r)}$  dans lui-même.

## 6. OPERATEURS ET CALCUL SYMBOLIQUE $k$ -MICROLOCAUX.

6.1. Opérateurs internes. Définition. On dit que  $A$  est un opérateur de poids  $M$ , et on note  $A \in \text{Oint}(M, k, \Omega_k)$ , si,  $M$  étant un poids admissible, on a

$$(6.1) \quad A = \int_{\Omega_{r'}} M(Y) a_Y^w (\det g_{kY})^{1/2} dY$$

où  $a_Y$  est une famille mesurable, uniformément bornée d'éléments de  $\overline{\text{Conf}(k, Y, r)}$ , avec  $r < r'$  et  $r$  inférieur au  $r_0$  du théorème 5.6.

6.2. Continuité. Théorème.

- a) Les opérateurs internes de poids  $M$  sont continus sur  $S$  et  $S'$
- b) Les opérateurs internes de poids  $M = 1$  sont continus sur  $L^2$ .

Le point b) est une conséquence immédiate du Lemme de Cotlar et du théorème 5.6., compte tenu de (4.7) et du théorème 5.8. a). Le point a) résulte du théorème 5.8 b) et c).

6.3. Composition. Remarque. La démonstration du théorème 3.3. c) peut être reprise mot pour mot, et montre que le composé de deux opérateurs internes de poids  $M_1$  et  $M_2$  est un opérateur interne de poids  $M_1 M_2$ , à une restriction près. En effet  $a_{1Y} \# a_{2Z}$  appartient seulement (les constantes  $C$  et  $r_0$  étant celles du théorème 5.6.) à  $\overline{\text{Conf}(k, Y, Cr)}$ , et il faut supposer  $r < C^{-1}r'$  et  $r < C^{-1}r_0$  dans (6.1.). Cette dernière restriction est nécessaire, même pour  $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$ , pour rester dans des zones de lenteur et de tempérance. La notion suivante nous évitera ces problèmes.

6.4. Opérateurs internes avec paramètre. Définition. Nous noterons

$\mathcal{O}int(M, k, \Omega_k)$  l'espace des (germes de) familles

$\mathbb{A} = (A_\delta), \delta \in ]0, \delta_0[$  telles que

a)  $A_\delta$  est du type (6.1), avec  $r'$  indépendant de  $\delta$ , et les

$a_{\delta Y} \in \text{Conf}(k, Y, r(\delta))$  avec  $r(\delta) \rightarrow 0$  pour  $\delta \rightarrow 0$

b) Pour tout  $N$ ,  $A_\delta - A_{\delta'}, \in \mathcal{O}int(M \lambda_k^{-N}, k, \Omega)$

Si  $V$  est un ouvert de  $\Omega_k$ , on définit  $\mathcal{O}int(M, k, V)$  en remplaçant  $\Omega_k$  par  $V$  dans tout ce qui précède.

6.5. Quantification des symboles de  $S_0(M, g_k, \Omega_k)$ . Soit  $a \in S_0(M, g_k, \Omega_k)$  (voir (3.8.)). A l'aide d'une partition de l'unité, on peut pour chaque  $\delta$ , écrire

$$(6.2) \quad a(\cdot) = \int_{\Omega_{r'}} M(Y) a_{\delta Y}(\cdot) (\det g_{kY})^{1/2} dY$$

avec  $a_{\delta Y}$  uniformément (en  $Y$ ) borné dans  $W\text{-Conf}(g_k, Y, \delta)$ .

L'opérateur  $\mathbb{A} = (A_\delta)$  est alors défini par

$$(6.3) \quad A_\delta = \int_{\Omega_{r'}} M(Y) [\Pi_Y \# a_{\delta Y} \# \Pi_Y]^W (\det g_{kY})^{1/2} dY$$

où les  $\Pi_Y$  sont les  $(k-1)$ -projecteurs (confinés dans des boules de rayon  $2\delta$  par exemple) définis au n°5.4. Il est clair que  $\mathbb{A} \in \mathcal{O}int(M, k, \Omega_k)$ .

D'autre part, pour  $A$  défini par (.1.), on définit un de ses symboles par

$$(6.4) \quad \sigma(A)(\cdot) = \int M(Y) \chi_Y(\cdot) (\det g_{kY})^{1/2} dY$$

où les  $\chi_Y$ , bornés dans  $S(1, g_k)$  valent 1 près de  $U_{k, Y, r}$  et 0 hors de  $U_{k, Y, r'}$ . Le résultat appartient à  $S_0(M, k, \Omega_k)$  et, modulo  $S_0(M \lambda_k^{-\infty}, g_k, \Omega_k)$ , ne dépend ni de la décomposition (6.1.), ni du choix des  $\chi_Y$ , ni de  $\delta$  si  $A$  est l'un des  $A_\delta$  constituant  $\mathbb{A}$ .

On a le résultat fondamental suivant.

6.6. Théorème. a) Les  $\mathcal{O}int(M, k, \Omega_k)$  constituent une algèbre graduée (par les poids admissibles), stable par adjoint.

b) Les applications (6.4) et (6.3) induisent des isomorphismes (d'algèbres graduées avec adjoint) inverses l'un de l'autre, entre  $\mathcal{O}int(M, k, \Omega_k) / \mathcal{O}int(M\lambda_k^{-\infty}, k, \Omega_k)$  pour la composition, et  $S_0(M, g_k, \Omega_k) / S_0(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, \Omega_k)$  pour l'opération  $\#$ .

6.7. Remarque. En remplaçant dans (6.1) les symboles confinés larges par des symboles confinés stricts, on obtient une algèbre d' "opérateurs internes stricts" un peu plus restreinte, mais pour laquelle le théorème 6.4. est valable mot pour mot (les espaces quotients  $\mathcal{O}int(M...)/\mathcal{O}int(M\lambda_k^{-\infty}...)$  sont les mêmes avec les deux définitions). La formule (6.3) définit en fait un opérateur interne strict. L'intérêt de la notion large réside dans le théorème 8.1. ci-dessous.

Lorsque  $\Omega_k = \mathbb{R}^{2n}$ , on peut se contenter d'introduire les opérateurs internes. Nous verrons en effet que (si  $g_1$  est la métrique classique), les espaces  $\mathcal{O}int(M, k, \mathbb{R}^{2n})$  contiennent les opérateurs pseudo-différentiels usuels. Dans le cas général, il est utile d'introduire les classes d'opérateurs suivantes, associées à  $\Omega \subset \Omega_k$ .

6.8. Opérateurs externes. Définition. On dit qu'une famille  $\mathcal{B} = (B_\delta)$  d'opérateurs appliquant  $S$  et  $S'$  dans eux-mêmes est un élément de  $\mathcal{O}ext(M, k, \Omega)$  s'il existe, pour chaque ouvert  $V \subset \subset \Omega$ , des constantes  $\delta(V)$ ,  $r(V)$  et une fonction  $\rho_V(\delta, r)$ , définie pour  $\delta < \delta(V)$ ,  $r < r(V)$ , tendant vers 0 lorsque  $\delta$  et  $r$  tendent vers 0, telles que l'on ait les deux propriétés suivantes, en posant

$$B_\delta \circ a^w = a_{1\delta}^w ; a^w \circ B_\delta = a_{2\delta}^w .$$

a) Les applications  $a \mapsto M(Y)^{-1} a_{i\delta}$  sont continues, uniformément pour  $Y \in V$ , de  $\overline{\text{Conf}(k, Y, r)}$  dans  $\overline{\text{Conf}(k, Y, \rho_V(\delta, r))}$ , lorsque  $\delta < \delta(V)$ ,  $r < r(V)$ .

b) Pour  $\delta' < \delta < \delta(V)$ ,  $r < r(V)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , les applications  $a \mapsto M(Y)^{-1} \lambda_k(Y)^N (a_{i\delta} - a_{i\delta'})$  vérifient la même propriété.

6.9. Propriétés fondamentales des Opérateurs externes. Ces propriétés se déduisent simplement de ce qui précède. Il faut bien remarquer que, si  $\mathcal{B} \in \mathcal{O}ext(M, k, \Omega)$ , chacun des  $B_\delta$  n'agit de manière contrôlée sur les symboles confinés que dans un sous-ouvert strict de  $\Omega$ .

a) Les  $\mathcal{O}ext(M, k, \Omega)$  forment une algèbre graduée stable par adjoint, et les  $\mathcal{O}int(M, k, \Omega)$  en constituent un idéal.

b) Si  $V \subset V' \subset \Omega_k$ , on a

$$\mathcal{O}int(M, k, V) \subset \mathcal{O}int(M, k, V') ; \quad \mathcal{O}ext(M, k, V) \supset \mathcal{O}ext(M, k, V')$$

c) Pour tout  $B \in \mathcal{O}ext(M, k, \Omega)$ , et tout  $V \subset \subset \Omega$ , il existe  $A \in \mathcal{O}int(M, k, \Omega)$  tel que  $B-A \in \mathcal{O}ext(M\lambda_k^{-\infty}, k, V)$ .

d) Il existe une application  $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \sigma(\mathcal{B})$  de  $\mathcal{O}ext(M, k, \Omega)$  dans  $S_{loc}(M, g_k, \Omega) / S_{loc}(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, \Omega)$  qui prolonge l'application symbole définie pour les opérateurs internes, et qui induit un isomorphisme :

$$\mathcal{O}ext(M, k, \Omega) / \mathcal{O}ext(M\lambda_k^{-\infty}, k, \Omega) \xrightarrow{\sim} S_{loc}(M, g_k, \Omega) / S_{loc}(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, \Omega) .$$

La surjectivité ne doit pas surprendre. On peut quantifier  $b \in S_{loc}(M, g_k, \Omega)$  par une famille d'opérateurs  $B_\delta \in \mathcal{O}int(M, k, \Omega)$ , dont le symbole coïncide avec  $b$  sur des ouverts  $V_\delta \subset \subset \Omega$  de plus en plus grands pour  $\delta \rightarrow 0$ .

6.10 Changement de quantification. Sous l'hypothèse  $g_{kX}(t, \tau) = g_{kX}(t, -\tau)$ , l'opérateur formel  $\exp(\pm \frac{i}{2} \langle D_X, D_\xi \rangle)$  induit un isomorphisme entre  $S_{loc}(M, g_k, \Omega) / S_{loc}(M\lambda_k^{-\infty}, g_k, \Omega)$  muni de  $\#$ , et le même espace, muni de la loi de composition "classique" [multiplication à gauche des dérivations] des symboles. On obtient donc un calcul symbolique "classique" par

$$B \longmapsto \exp(\frac{i}{2} \langle D_X, D_\xi \rangle) \sigma(B) .$$

## 7. REGULARITES k-MICROLOCALES.

7.1. Définition. Soit  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ , et  $V$  un sous-ouvert conique de  $\Omega_k$ . On dit que  $u$  appartient k-microlocalement à  $H(M)$  dans  $V$ , ce qu'on notera  $u \in H(M, k, V)$  si pour tout  $V' \subset \subset V$ , il existe  $r(V')$  tel que l'on ait  $Au \in L^2$  pour tout opérateur interne :

$$A = \int_{V'} M(Y) a_Y^w(\det g_Y)^{1/2} dY$$

avec  $a_Y$  uniformément borné dans  $\text{Conf}(k, Y, r(V'))$ .

La quantification avec paramètre nous amène à considérer également des familles  $(u_\delta)$  de distribution qui, dans la pratique, joueront le rôle de k-microdistributions dans  $V$ .

7.2. Définition. Soit  $\mathfrak{u} = (u_\delta)$  une famille d'éléments de  $S'$ . On dit que  $\mathfrak{u} \in \mathcal{H}(M, k, V)$  si pour tout  $V' \subset\subset V$ , il existe  $r(V')$  et  $\delta(V')$  tels que  $Au_\delta \in L^2$  pour  $A$  comme ci-dessus et  $\delta < \delta(V')$ .

On notera que  $u_\delta$  n'appartient pas nécessairement à  $H(M, k, V)$ , mais que, pour  $V' \subset\subset V$ , on a  $u_\delta \in H(M, k, V')$  pour  $\delta < \delta(V')$ . La partie a) du théorème suivant résulte simplement (après contrôle des rayons de confinement) du fait que  $A \circ B_\delta$  est un opérateur interne si  $A$  l'est. La partie b) provient de l'extension de (2.9) aux symboles  $k$ -confinés.

7.3. Théorème.

a) Soit  $B \in \mathcal{O}ext(M, k, V)$  et  $\mathfrak{u} \in \mathcal{H}(M_1, k, V)$ . Alors  $B\mathfrak{u} = (B_\delta u_\delta)$  appartient à  $\mathcal{H}(M_1/M, k, V)$ .

b) Si  $B \in \mathcal{O}ext(M, k, V)$ , et si pour tout  $\mathfrak{u} \in \mathcal{H}(M_1, k, V)$ , on a  $B\mathfrak{u} \in \mathcal{H}(M_1 M^{-1} \lambda_k^{-\infty}, k, V)$  alors  $B \in \mathcal{O}ext(M \lambda_k^{-\infty}, k, V)$

## 8. D'UNE MICROLOCALISATION A L'AUTRE.

Dans les applications, la métrique  $g_1$  sera en général la métrique usuelle ( $dx^2 + d\xi^2 / \langle \xi \rangle^2$ ), et il est bien entendu nécessaire de pouvoir remonter des régularités  $k$ -microlocales définies au § 7 à l'appartenance microlocale usuelle aux espaces de Sobolev.

8.1. Théorème. Soient  $V$  et  $V'$  deux ouverts  $g_{k-1}$ -coniques contenus dans  $\Omega_k$ , vérifiant  $V' \subset\subset V$  pour  $g_{k-1}$ , et  $M$  un  $g_{k-1}$  poids admissible.

a)  $\mathcal{O}int(M, k-1, V) \subset \mathcal{O}int(M, k, V)$

b)  $\mathcal{O}ext(M, k-1, V) \subset \mathcal{O}ext(M, k, V')$

c) Si  $B \in \mathcal{O}ext(M, k-1, V)$ , et si  $\sigma(B) \in S_{loc}^{-p}(\lambda_{k-1}^q, g_k, V)$ , alors  $B \in \mathcal{O}ext(M \lambda_{k-1}^{-p} \lambda_k^q, k, V')$ .

Dans les cas b) et c), on se ramène au cas des opérateurs internes en écrivant  $B = A + R$ , avec  $A \in \mathcal{O}int(M, k-1, V)$  et  $R \in \mathcal{O}ext(M \lambda_{k-1}^{-\infty}, V')$ . Le cas de  $R$  est facile à régler, les symboles  $(k-1)$ -négligeables étant  $k$ -confinés (là est l'intérêt du confinement "large"). On peut même supposer

$$A_\delta = \int M(Y) \Pi_{\delta Y}^W(\chi_{\delta Y} \sigma(A)) {}^W \Pi_{\delta Y}^W(\det g_{k-1, Y})^{1/2} dY$$

les  $\Pi_Y$  étant des  $(k-1)$ -projecteurs (n°5.4.), et les  $\chi_Y$  une  $g_{k-1}$ -partition

de l'unité. Il suffit maintenant, grâce à une  $g_k$ -partition de l'unité, d'écrire  $\chi_Y^\sigma(A)$  comme intégrale de symboles  $W-g_k$ -confinés pour conclure.

8.2. Théorème. Soient  $V, V', M$  comme ci-dessus. On a

a)  $H(M, k-1, V) \subset H(M, k, V') \subset H(M, k-1, V')$

b)  $\mathcal{H}(M, k-1, V) \subset \mathcal{H}(M, k, V') \subset \mathcal{H}(M, k-1, V')$

La seconde inclusion résulte immédiatement du théorème 8.1. a). La démonstration de la première repose sur l'existence (par calcul symbolique) de  $P \in \mathcal{O}int(M^{-1}, k-1, V)$  ;  $Q \in \mathcal{O}int(M, k-1, V)$  et  $R \in \mathcal{O}ext(\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V')$  tels que

$$I = P_\delta Q_\delta + R_\delta .$$

Si  $A \in \mathcal{O}int(M, k, V')$  on veut prouver que

$$Au = (AP_\delta)Q_\delta u + (AR_\delta)u \in L^2$$

dès que  $u \in H(M, k-1, V)$ . L'opérateur  $(AP_\delta)$  appartient à  $\mathcal{O}int(1, k, V)$  et est donc borné sur  $L^2$ , tandis que  $Q_\delta u \in L^2$  par hypothèse. L'opérateur  $AR_\delta$  appartient à  $\mathcal{O}int(M\lambda_{k-1}^{-\infty}, k, V')$  qui est inclus dans  $\mathcal{O}int(M\lambda_{k-1}^{-\infty}, k-1, V)$  d'après un argument utilisant le lemme 5.5. On a donc  $(AR_\delta)u \in L^2$  et le résultat.

8.3. Remarque. Lorsque  $M = \lambda_1^{s_1} \dots \lambda_k^{s_k}$ , on pourra noter  $H^{s_1, \dots, s_k}(V)$  au lieu de  $H(M, \dots)$ . Les espaces  $H^{s_1, \dots, s_{k-1}}(V)$  et  $H^{s_1, \dots, s_{k-1}, 0}(V)$  coïncident à une petite restriction sur l'ouvert  $V$  près (restriction qui disparaît si  $g_k$  et  $g_{k-1}$  sont comparable sur  $V \setminus V'$ ).

Cette restriction de support ne doit pas surprendre. Toutes nos définitions font intervenir l'ensemble filtrant des  $V' \ll V$ , notion qui dépend de  $k$ .

## 9. EXEMPLES.

Dans tous les exemples qui vont suivre, nous partirons d'une donnée géométrique qui sera plus précisément un sous-module  $\mathfrak{M}(\text{sur } S(1, g_{k-1}))$  de fonctions sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ce module, dont les éléments auront vocation à être des symboles d'ordre  $\lambda_k$  pour une métrique  $g_k$  à construire, sera involutif (stable par le crochet de Poisson) et de type fini, engendré par une famille  $(m_j)$ .

Le lecteur vérifiera dans chaque cas que la métrique que nous exhiberons est bien l'unique métrique (à équivalence près), pour laquelle

on ait  $\lambda_k = (1 + \sum_j m_j^2)^{1/2}$  ;  $g_k^\sigma = \lambda_k^2 g$  ; les  $m_j$  sont des symboles d'ordre  $\lambda_k$  ;  $g_k$  est supérieure à la métrique  $g_{k-1}$  imposée. Toutes ces métriques sont lentes, et vérifient les hypothèses (4.1.) et (4.2.), si bien qu'on peut quantifier les symboles associés, et notamment les fonctions homogènes de l'ensemble des  $m_j(X)$ .

Faute d'avoir développé l'invariance par transformations canoniques (voir remarque 1.5), nous choisirons des coordonnées dans lesquelles la géométrie conduisant à  $\mathbb{M}$  est "plate". Enfin, la première métrique sera toujours la métrique usuelle :

$$g_1 = dx^2 + \frac{d\xi^2}{\langle \xi \rangle^2} ; \lambda_1 = \langle \xi \rangle$$

9.1. Seconde microlocalisation le long d'une variété lagrangienne  $\Lambda$

Si la variété  $\Lambda$  a pour équation  $x'' = \xi' = 0$  dans  $\mathbb{R}_x^p \times \mathbb{R}_{x''}^q$ , le module  $\mathbb{M}$  est formé des symboles d'ordre 1 qui, modulo ceux d'ordre 0, s'annulent sur  $\Lambda$ . Il est engendré par les  $\xi_j'$  et les  $x_i'' \lambda_1$ . On obtient la métrique (1.12.) où la fonction  $\lambda_2$  est donnée en (1.13).

Il n'est pas trop difficile de démontrer que la quantification décrite ici coïncide avec celle décrite dans [1],[2] (au problème de la quantification avec paramètre près, voir [2] remarque 1.7.). Le rôle des sandwiches  $[\Pi_Y \# a_Y \# \Pi_Y]^W$  de (6.3) était tenu par des expressions  $\varphi(2^{-pD}) a_{pq}(x,D) \varphi(2^{-pD})$  en théorie de Littlewood-Paley.

Par contre, il est moins évident d'établir des liens précis entre notre théorie et les secondes microlocalisations analytiques développées par Kashiwara et Laurent (par voie cohomologique, voir [4]) et par Sjöstrand (par transformation de FBI, voir [7]). Le problème est le même pour la seconde microlocalisation de Lebeau [5] et les microlocalisations itérées de Sjöstrand [7] que nous définissons en 9.2 et 9.4. Nous disons qu'il s'agit de la même microlocalisation parce que les ouverts dans lesquels on peut parler de régularité microlocale (analytique pour ces auteurs, Sobolev pour nous) sont les mêmes, mais il serait intéressant d'avoir des liens plus étroits entre ces théories.

9.2. Seconde microlocalisation de Lebeau. Celle-ci est associée à une variété isotrope  $\Sigma$ , et plus précisément au module des fonctions s'annulant à l'ordre 1 sur l'orthogonal (symplectique) de  $T_X \Sigma$  en chaque point  $X$  de  $\Sigma$ . Si

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^p \times \mathbb{R}_y^q$ , et si  $\Sigma$  a pour équation  $y = x = \xi = 0$ , le module  $\mathbb{M}$  est

engendré par  $\lambda_1 y_i, \lambda_1 x_i x_j, x_i \xi_j, \xi_i \xi_j / \lambda_1$ . La métrique est donnée par

$$\lambda_2 = [1 + \lambda_1^2 (y^2 + x^4 + \xi^4 / \lambda_1^4)]^{1/2}$$

$$g_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} dx^2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} dy^2 + \frac{d\xi^2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{d\eta^2}{\lambda_1^2} .$$

9.3. Troisième microlocalisation associée à deux variétés lagrangiennes se coupant franchement (cleanly). Une transformation canonique permet de mettre ces deux variétés  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sous la forme suivante (et même sous une forme plus simple mais moins symétrique : voir [3] théorème 21.2.10) :

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}_x^\alpha \times \mathbb{R}_y^\beta \times \mathbb{R}_z^\gamma \times \mathbb{R}_t^\delta$ ,  $\Lambda$  est définie par  $x = y = z = t = 0$ , et  $\Lambda'$  par  $x = t = \eta = \zeta = 0$ . La seconde microlocalisation utilisée sera celle relative à  $\Lambda$ . On a donc  $\lambda_2 \simeq |\zeta| + |\tau| + \lambda_1 (|x| + |y|)$  et

$$g_2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} (dx^2 + dy^2) + dz^2 + dt^2 + \frac{1}{\lambda_1} (d\xi^2 + d\eta^2) + \frac{1}{\lambda_2} (d\zeta^2 + d\tau^2)$$

La troisième microlocalisation sera associée au module  $\mathbb{M}$  des symboles (d'ordre (0,1)) s'annulant sur  $\Lambda \cup \Lambda'$ . Il est engendré par les  $\zeta, x\xi, y\eta, t\tau, y\xi, \frac{\eta\tau}{\lambda_1}$ . On définit  $\lambda_3$  comme la racine carrée de ces fonctions augmentée de 1, et la métrique  $g_3$  est donnée par

$$(9.1) \quad g_3 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3} dx^2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} dy^2 + dz^2 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_3} dt^2 + \frac{1}{\lambda_1} d\xi^2 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_3} d\eta^2 +$$

$$\frac{1}{\lambda_3} d\zeta^2 + \frac{1}{\lambda_2} d\tau^2 .$$

On remarquera la dissymétrie des rôles joués par  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  dans la métrique, bien qu'elles jouent des rôles symétriques dans la définition de  $\mathbb{M}$ .

9.4. Microlocalisations d'ordre supérieur de Sjöstrand. Nous ne décrirons ici que la troisième. La situation géométrique étant exactement celle du n°9.3., on prend comme module  $\mathbb{M}$  les symboles s'annulant sur  $\Lambda$ , et s'annulant à l'ordre 1 sur  $\Lambda'$  le long de  $\Lambda \cap \Lambda'$ . Ce module ne dépend bien sûr que de l'image de  $T\Lambda'$ , restreint à  $\Lambda \cap \Lambda'$ , dans le fibré normal  $T_\Lambda \mathbb{R}^{2n}$ , image qui s'identifie à une sous-variété lagrangienne de  $T^*\Lambda$  par l'isomorphisme symplectique. On retrouve les données géométriques induites par Sjöstrand ([7] n°16).

Le module  $\mathfrak{M}$  est engendré par  $\zeta$ ,  $x\lambda_1$ ,  $(y)^2\lambda_1$ ,  $y\tau$ ,  $(\tau)^2/\lambda_1$ ,  $y\eta$ ,  $\tau y\lambda_1$ ,  $\eta\tau/\lambda_1$ ,  $\tau\tau$ . Si on définit  $\lambda_3$  comme la racine carrée de la somme de ces fonctions augmentée de 1, la matricule  $g_3$  est exactement donnée par l'expression (9.1.).

9.5. Troisième microlocalisation associée à un élément de contact d'ordre (p-1). On se place pour simplifier dans  $\mathbb{R}^2$ , avec la seconde microlocalisation relative au conormal de l'origine :  $\lambda_2 = \lambda_1(x^2+y^2)^{1/2}$  et

$$g_2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} (dx^2+dy^2) + \frac{1}{\lambda_1} (d\xi^2+d\eta^2)$$

Le module  $\mathfrak{M}$  sera constitué des symboles d'ordre (0,1) dont la restriction au conormal de l'axe des  $x$  s'annule d'ordre  $p$  à l'origine, où  $p > 1$  est un nombre réel donné. Il est engendré par  $x\xi$ ,  $y\xi$ ,  $y\eta$ ,  $x^p\eta$ . On a

$$\lambda_3 = (1+x^2\xi^2 + y^2\xi^2 + y^2\eta^2 + x^{2p}\eta^2)^{1/2}$$

$$g_3 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} dx^2 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_3} dy^2 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_3} d\xi^2 + \frac{1}{\lambda_1} d\eta^2 .$$

En fait, lorsque  $\lambda_3 \geq c > 1$ , les métriques  $g_2$  et  $g_3$  sont équivalentes en dehors d'une zone  $|y| < |x|$  et  $|\xi| < |\eta|$ , et on a dans cette zone

$$g_3 \cong \frac{dx^2}{x^2} + \frac{dy^2}{s^2 x^2} + \frac{d\xi^2}{s^2 \eta^2} + \frac{d\eta^2}{\eta^2}$$

avec  $s = |x|^{p-1} + |y|/|x| + |\xi|/|\eta|$  ;  $\lambda_3 \cong s|x||\eta|$

9.6. Distributions conormales associées à la réunion de plusieurs courbes ayant un contact d'ordre (p-1). Soit  $C$  la réunion d'un nombre fini de (demi)-courbes  $C_1, \dots, C_N$ , d'équations  $y = f_j(x)$  (pour  $x > 0$  ou  $x < 0$ ). On suppose  $f_j(x) = \alpha_j x^p + o(x^p)$  et  $(d/dx)^\ell f_j(x) = o(x^{p-\ell})$ . On suppose en outre que les  $\alpha_j$  relatifs à  $x > 0$  (resp.  $x < 0$ ) sont distincts et, pour simplifier, que si  $\alpha_j = 0$ , alors  $C_j$  est l'axe des  $x$ .

On définit les espaces  $H^{s_1, s_2, s_3}(C, k)$  par la propriété :

$$(9.2) \quad Z_1 \circ Z_2 \dots \circ Z_\ell u \in H^{s_1, s_2, s_3} ; \ell = 0, \dots, k$$

où les  $Z_j$  parcourent l'espace des opérateurs 3-microdifférentiels de poids

$\lambda_3$  [i.e. de tri-ordre (0,0,1)] dont le symbole s'annule sur le conormal des  $C_j$ . Les exemples typiques de tels opérateurs sont ceux de symbole  $x\xi + \frac{xf'_j(x)}{f_j(x)} y\eta$  ou  $[y-f_j(x)]\eta$ , tronqués hors d'un petit voisinage  $g_3$ -conique du conormal de  $C_j$ .

Dans le cas particulier où  $C$  est la cubique d'équation  $y^2 - x^3 = 0$ , ( $p = 3/2$ ), on peut définir cet espace par la condition (9.2) où les  $Z_i$  sont l'un des deux opérateurs de symbole  $(2x\xi+3y\eta)$  et  $(\lambda_2/\lambda_3)(2y\xi+3x^2\eta)$ . C'est ce facteur  $(\lambda_2/\lambda_3)$  qui fait que la définition ci-dessus est strictement plus forte qu'une définition fondée sur une formule (9.2) pour les  $Z_i$  champs de vecteurs  $C^\infty$  tangents à  $C$  (ou, ce qui est équivalent, pour les  $Z_i$  pseudo-différentiels d'ordre 1, dont le symbole principal s'annule sur les conormaux de  $C$  et de 0). Le champ de vecteurs  $2y D_x + 3x^2 D_y$  est "trop plat" à l'origine, et ce n'est qu'en 3ème microlocalisation qu'on peut le remplacer par un opérateur de symbole moins plat.

La situation est analogue dans le cas particulier où  $C$  est constitué de plusieurs courbes lisses simplement tangentes ( $p=2$ ). Pour  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ , la définition (9.2) redonne les espaces introduits par Melrose et Ritter [6], et pour lesquels ils démontrent un théorème de propagation non linéaire.

Plus généralement, lorsque des courbes  $C_j$  sont tangentes à l'axe des  $x$  à des ordres pouvant être différents :  $p_1 < \dots < p_k$ , on définit les espaces de distributions conormales par le même procédé, en utilisant la  $(k+2)^e$  microlocalisation associée à  $g_1 \leq g_2 \leq g_{3,1} \leq \dots \leq g_{3,k}$  où  $g_{3,i}$  est la métrique notée  $g_3$  ci-dessus, pour  $p = p_i$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J.M. BONY : Interaction des singularités pour les équations de Klein Gordon non linéaires. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-84, n°10
- [2] J.M. BONY : Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations, Proc Int. Workshop and Symposium on hyperbolic equations, Kyoto (1984), (à paraître).
- [3] L. HÖRMANDER : The analysis of linear partial differential operators III, Springer-Verlag, 1985.

- [4] Y. LAURENT : Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe. Progress in Math, vol.53, Birkhäuser, 1985.
- [5] G. LEBEAU : Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes. Ann. Inst. Fourier Grenoble 35, 2 (1985), 145-216.
- [6] R. MELROSE et N. RITTER : Interaction of progressing waves for semi-linear wave equation II (preprint).
- [7] J. SJÖSTRAND : Singularités analytiques microlocales. Astérisque 95, S.M.F., 1982.
- [8] A. UNTERBERGER : Quantification de certains espaces hermitiens symétriques Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-80, n°16 .
- [9] N. DENCKER : The Weyl calculus with locally temperate metrics and Weights (preprint).

\*  
\* \*  
\*