

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. LEBEAU

## **Problème de Cauchy semi-linéaire en 3 dimensions d'espace. Un résultat de finitude**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. n° 1, p. 1-5*

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1986-1987\\_\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987___A1_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

PROBLEME DE CAUCHY SEMI-LINEAIRE EN 3 DIMENSIONS D'ESPACE.

UN RESULTAT DE FINITUDE.

par G. LEBEAU



## I ENONCE DU RESULTAT.

Soit  $(x_0, x') \in \mathbb{R}^4$ ,  $x' = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\square$  l'opérateur des ondes :  
 $\square = \partial_{x_0}^2 - \Delta_{x'}$ , et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  qui est un domaine d'influence pour  
 $\omega = \Omega \cap x_0 = 0$ .

Soit  $u \in H_{loc}^s(\Omega)$ ,  $s > 2$ , vérifiant l'équation des ondes semi-linéaire

$$(1) \quad \begin{cases} \square u = p(u) & \text{dans } \Omega \\ u|_{x_0=0} = u_0 \in H_{loc}^s(\omega) \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}|_{x_0=0} = u_1 \in H_{loc}^{s-1}(\omega) \end{cases}$$

où  $p(u) = \sum_{j=0}^d p_j(x) u^j$  est un polynôme de  $u$ , les fonctions  $p_j(x)$  étant de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

Théorème. On suppose que  $u_0$  et  $u_1$  sont des distributions intégrales de Fourier de Hörmander sur une lagrangienne  $\Lambda \subset T^*\omega$ , analytique. Alors pour tout réel  $\sigma$ , il existe un ensemble sous-analytique, homogène, isotrope  $L_\sigma \subset T^*\Omega$  (ne dépendant que de  $\Lambda$ ) tel que  $WF^\sigma(u) \subset L_\sigma$  ( $WF^\sigma$  est le front d'onde Sobolev d'indice  $\sigma$ ).

Corollaire : Pour tout entier  $k$ ,  $u$  est de classe  $C^k$  sur un ouvert dense de  $\Omega$ .

Le contre exemple de M. Beals ne se produit donc jamais avec des traces distributions lagrangiennes analytiques.

[Un ensemble sous-analytique  $L \subset T^*\mathbb{R}^n$ , homogène, est isotrope ssi la 1-forme  $\xi dx$  s'annule sur toute courbe analytique tracée dans  $L$ ].

## II IDEE DE LA PREUVE.

Soit  $v$  la solution du problème linéaire :

$$(2) \quad \begin{cases} \square v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v|_{x_0=u_0} \quad \frac{\partial v}{\partial x_0}|_{x_0=0} = u_1 \end{cases}$$

Alors  $v \in H^s(\Omega)$  et est une distribution intégrale de Fourier de Hörmander sur la lagrangienne  $L$ , réunion des bicaractéristiques de  $\square$  passant au-dessus de  $\Lambda$ . On pose

$$(3) \quad u = v + f ; f = f_+ + f_- \quad f_{\pm} = f \cdot 1_{\pm x_0 \geq 0}$$

On est donc ramené à prouver le théorème pour  $f_+$ . On désigne par  $E_+$  (resp  $E_-$ ) la parametrix de  $\square$  propageant vers le futur ( $x_0 \geq 0$ ), (resp le passé). On suppose dans la suite qu'on a  $s < 5/2$ , de sorte que si  $g \in H_{loc}^s(\Omega)$ , on a  $E_+(g \cdot 1_{x_0 \geq 0}) \in H_{loc}^s(\Omega)$ . Pour tout entier  $\ell$ , on décompose  $f_+$  sous la forme :

$$(4) \quad f_+ = a_\ell + s_\ell$$

où  $a_\ell, s_\ell$  sont des éléments de  $H_{loc}^s(\Omega)$ , à support dans  $x_0 \geq 0$ , définis par récurrence par :

$$(5) \quad \begin{cases} a_0 = 0 & s_0 = f_+ \\ a_{\ell+1} = E_+ \left( \sum_{j,k} p_j C_j^k v^{j-k} \cdot 1_{x_0 \geq 0} a_\ell^k \right) \\ s_{\ell+1} = E_+ \left( \sum_{j,k,m \geq 1} p_j C_j^k v^{j-k} C_k^m a_\ell^{k-m} s_\ell^m \right) \end{cases}$$

On obtient (5) en remplaçant  $f_+$  par  $a_\ell + s_\ell$  dans l'identité  $f_+ = E_+(p(v \cdot 1_{x_0 \geq 0} + f_+))$ . Les  $a_\ell$  sont calculables à partir de la solution  $v$  du problème linéaire. Pour étudier les  $s_\ell$ , on utilise des espaces de Sobolev sur l'espace produit  $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \dots \times \mathbb{R}^4$  ( $k+1$  facteurs).

Définition 1. Soit  $\underline{X}^k = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{4k}$ ,  $\bar{y}^* = (\bar{y}, \bar{\eta}) \in T^*\mathbb{R}^4 \setminus 0$  et  $\sigma \geq 0$ . Une distribution  $b(x^1, \dots, x^k; y)$  appartient à  $B_k^\sigma$  au point  $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$  s'il existe  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{4k})$  égale à 1 près de  $\underline{X}^k$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$  égale à 1 près de  $\bar{y}$  et  $\Gamma$  voisinage conique de  $\bar{\eta}$  tels que

$$\widehat{\phi \cdot \varphi b}(\xi^1, \dots, \xi^k; \eta) \prod_{j=1}^k (1 + |\xi^j|)^{-s} (1 + |\eta|)^\sigma \in L^2(\mathbb{R}^{4k} \times \Gamma)$$

On note  $\dot{B}_{k, \bar{y}^*}^\sigma = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega^{k+1})\}$ , support  $(u) \subset \{\forall j, x_j \in \text{cône rétrograde issu de } y\}$  et  $u \in B_k^\sigma$  en tout point  $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$

Ces espaces vérifient les propriétés suivantes

(6) 1) Si  $a(x^j) \in H^s(\mathbb{R}^4)$  près de  $\underline{x}^j$  et  $b \in B_k^\sigma$  au point  $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$ , alors  $ab \in B_k^\sigma$  au point  $(\underline{X}^k, \bar{y}^*)$ .

(7) 2) Si  $b \in \dot{B}_{k,y}^\sigma$  est à support compact en  $x$

$$\int b(x^1, \dots, x^k; y) dx^1 \dots dx^k \in H_{y^*}^\sigma(\mathbb{R}^4)$$

où l'espace de droite est le Sobolev microlocal usuel.

(8) 3) Si  $b \in \dot{B}_{k,y^*}^\sigma$ , on note  $E_-^{\otimes k}(b)$  l'unique distribution qui vérifie  $\square_{x_1} \dots \square_{x_k} E_-^{\otimes k}(b) = b$  et support  $(E_-^{\otimes k} b) \subset \{V_j x^j \in \text{cône rétrograde issu de } y\}$ .

Alors  $E_-^{\otimes k}(b) \in \dot{B}_{k,y^*}^\sigma$ . Si de plus

$$\forall X^k (X^k; \xi^1 = \dots = \xi^k = 0, \bar{y}^*) \notin WF(b)$$

alors  $E_-^{\otimes k}(b) \in \dot{B}_{k,y^*}^{\sigma+1}$

(9) 4) Soit  $\pi_{x^j, \ell_j}^{\delta_j}$  l'opérateur de  $\mathcal{D}'(\Omega^{k+1})$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega^{\ell_1 + \dots + \ell_k + 1})$

défini par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega^{\ell_1 + \dots + \ell_k + 1}) \quad \pi_{x^j, \ell_j}^{\delta_j} (b) \cdot \varphi = \int b(x^1, \dots, x^k; y) \underbrace{\varphi(x^1, \dots, x^1; \dots; x^k, \dots, x^k, y)}_{\ell_1 \text{ fois}} \underbrace{\varphi(x^1, \dots, x^1; \dots; x^k, \dots, x^k, y)}_{\ell_k \text{ fois}}$$

Alors si  $b \in \dot{B}_{k,y^*}^\sigma$ ,  $\pi_{x^j, \ell_j}^{\delta_j} (b) \in \dot{B}_{\ell_1 + \dots + \ell_k, y^*}^\sigma$

On pose à présent  $B_{y^*}^\sigma = \bigoplus_{k=1}^\infty \dot{B}_{k,y^*}^\sigma$ , et on définit par récurrence des

sous- $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels  $V_\ell^\nu$   $0 \leq \nu \leq \ell$  de  $B_{y^*}^0$ , (indépendants de  $\bar{y}^*$ ) en posant

$$(10) \quad \begin{cases} V_\ell^0 = \mathbb{C} \cdot \delta_{x=y} \\ V_\ell^\nu = \mathbb{C} \cdot e.v \text{ engendré par les distributions de la forme} \\ \pi_{x^j, \ell_j}^{\delta_j} \prod_{j=1}^k a_{\ell-\nu}^{k_j} (x^j)_{\nu_j}^{n_j-k_j} (x^j)_{n_j}^{\otimes k} (b) \end{cases}$$

où  $b(x^1, \dots, x^k; y) \in V_\ell^{\nu-1}$  et  $\ell_j \leq k_j \leq n_j \leq d$ .

En utilisant des intégrations par parties successives, on montre alors :

Lemme 1.  $\forall i \in \{0, \dots, \ell\}$ ,  $s_\ell(y)$  est combinaison linéaire finie de fonctions de la forme

$$(11) \quad \int s_{\ell-i}(x^1) \dots s_{\ell-i}(x^k) b(x^1, \dots, x^k; y) dx^1 \dots dx^k$$

avec  $b \in V_\ell^i$ .

Soit alors  $Z_\ell^i$  les sous-ensembles de  $T^*\Omega$  :

$$(12) \quad Z_\ell^i = \{ \bar{y}^* \in T^*\Omega, \exists b(x^1, \dots, x^k; y) \in V_\ell^i, \exists (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k) \}$$

tels que  $\forall j, \underline{x}_0^j \geq 0$  et  $(\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k; \xi^1 = \dots = \xi^k = 0; \bar{y}^*) \in \text{WF}(b)$

En utilisant les propriétés des espaces  $B_{k, \bar{y}^*}^\sigma$ , et la définition des  $V_\ell^i$ , on obtient :

Lemme 2. Si  $\bar{y}^* \in Z_\ell^0 \cup \dots \cup Z_\ell^{\ell-1}$  on a  $s_\ell \in H_{\bar{y}^*}^\ell(\Omega)$

A ce stade, on n'a pas encore utilisé l'hypothèse sur les traces.

Définition 2. Une distribution  $T$  vérifie l'hypothèse (I) ssi le front d'onde de  $T$  est contenu dans un ensemble homogène, sous-analytique, isotrope.

L'hypothèse (I) est stable par image directe : en effet si  $Z \subset T^*(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n)$  est sous-analytique, homogène, isotrope et contenu dans  $|x| \leq M$ ,  $\{(y, \eta), \exists x, (x, 0; y, \eta) \in Z\}$  est sous-analytique, homogène, isotrope.

Pour démontrer le théorème, il suffit donc, d'après (4) et le lemme 2, de prouver que les  $a_\ell$  vérifient l'hypothèse (I), ainsi que tous les éléments des  $V_\ell^i$ . En utilisant un grand nombre de fois la stabilité de l'hypothèse (I) par produit-tensoriel et image directe, on est ramené à prouver le résultat suivant, conséquence du théorème de désingularisation analytique réel de Hironaka :

Lemme 3. Soit  $f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N$  des fonctions analytiques  $\sigma_1(x, \lambda_1), \dots, \sigma_N(x, \lambda_N)$  des symboles  $C^\infty$  de degré  $< -1$ . Alors

$$u(x) = 1_{\{g_1 \geq 0, \dots, g_N \geq 0\}} \int_{\pi} e^{i \sum_{j=1}^N \lambda_j f_j(x)} \sigma_j(x, \lambda_j) d\lambda_j$$

vérifie l'hypothèse (I).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] M. BEALS : "Self spreading..." Ann. of Math 118.
- [2] J.M. BONY : "Interaction des singularités..." Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 81-82 n°2 et 83-84 n°10.
- [3] J.M. BONY : "Singularités de  $P^b$  de Cauchy..." Advances in Microlocal Analysis. Congrès Nato. Castelvechio 1985 Reidel Ed. H.G. Garnir.
- [4] Y. CHEMIN : Thèse 3ème cycle 1986 Orsay.
- [5] R. MELROSE : "Conormal Rings..." Advances in Microlocal Analysis. Congrès Nato Castelvechio 1985 Reidel Ed. H.G. Garnir.

\*  
\* \*  
\*