Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

S. Alinhac

Existence d'ondes de raréfaction pour des écoulements isentropiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 16, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

EXISTENCE D'ONDES DE RAREFACTION POUR DES ECOULEMENTS ISENTROPIQUES

par S. ALINHAC

Exposé n°XVI

28 Avril 1987

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de Cauchy local pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires. Bien que nos résultats s'étendent à des cas plus généraux [0], nous nous limiterons ici au système 3×3 des équations d'Euler qui régit un écoulement en dimension deux d'espace (les inconnues étant la densité et la vélocité), dans le cas isentropique où la pression est fonction de la densité (cf. par exemple [4]).

Les données de Cauchy seront choisies discontinues à travers une ligne C^∞ Γ et C^∞ de chaque côté de Γ. Pour un tel "problème de Riemann", les seuls travaux établissant l'existence de solutions locales sont, à notre connaissance, ceux de Majda [11] et de Métivier [14] qui concernent seulement des solutions de type "choc" (voir également Chen [3] pour un problème voisin). Sous des hypothèses de stabilité et de compatibilité convenable sur les données (garantissant la présence d'un unique choc dans la solution envisagée) Majda [11] prouve l'existence locale d'une solution discontinue à travers une seule surface issue de Γ, dans les espaces de Sobolev usuels (cf. également [17]), et pour des systèmes généraux. Dans le cas spécial d'un système 2×2, Métivier [14] résoud complètement le problème de Riemann, lorsque la solution est discontinue à travers deux surfaces de chocs "stables". Ici, nous montrons que, sous des hypothèses de compatibilité des données, l'on peut construire une solution présentant une seule onde de raréfaction, relativement à l'une des deux valeurs propres extrêmes du système d'Euler.

Comme Majda l'avait déjà observé [12], les surfaces issues de Γ qui délimitent (dans l'espace-temps) le dièdre de l'onde de raréfaction, étant caractéristiques, sont beaucoup plus difficiles à contrôler, dans un processus d'approximation, que des surfaces de chocs "vraiment non-linéaires" (cf. Lax [9]), qui sont non-caractéristiques : ce fait nous conduit à utiliser une technique de Nash-Moser, convenablement adaptée au cas présent, pour obtenir la solution.

1. ONDES DE RAREFACTION ET SOLUTION APPROCHEE DU PROBLEME.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, nous notons (x,y,t) les coordonnées, et la ligne Γ de $\{t=0\}$ aura pour équation

$$(1.1) \qquad x = \varphi_o(y), \text{ pour un } \varphi_o \text{ réel } C^\infty, \ \varphi_o(0) = \varphi_o'(0) = 0 .$$

Des fonctions $v_\pm(x,y)$, C^∞ pour $\pm x \geqslant \pm\varphi_o(y)$, sont données, et l'on cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + A_1(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} + A_2(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v(x,y,0) = v_\pm(x,y) \quad \text{pour} \quad \pm x > \pm\varphi_o(y) . \end{cases}$$

Dans le cas présent des équations d'Euler isentropiques, on prendra
$v = (\rho,v_1,v_2)$, $\rho > 0$, $c^2 = c^2(\rho) = \dfrac{dp}{d\rho} > 0$,

$$A_1(v) = \begin{pmatrix} v_1 & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix} , \quad A_2(v) = \begin{pmatrix} v_2 & 0 & \rho \\ 0 & v_2 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v_2 \end{pmatrix} .$$

On notera dans la suite $\tilde{A}(\xi,\eta,\mu) = \xi A_1 + \eta A_2 - \mu$, $\omega = \xi v_1 + \eta v_2$, en sorte que les valeurs propres $\lambda > \lambda_1 > \lambda_2$ de $\tilde{A}(\xi,\eta,0)$ sont $\lambda = \omega + c\ell$, $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = \omega - c\ell$ $(\ell = (\xi^2+\eta^2)^{1/2})$. Le vecteur propre $r(\xi,\eta)$ de $\tilde{A}(\xi,\eta,0)$ correspondant à λ, normalisé par la condition $\lambda_v'.r = 1$, est $r = \dfrac{1}{k\ell}\left(\rho, \dfrac{c\xi}{\ell}, \dfrac{c\eta}{\ell}\right)$, où $k = \rho c' + c > 0$ (cf.[4]).

Remarquons enfin que, pour $S = \begin{pmatrix} c^2 & & 0 \\ & \rho^2 & \\ 0 & & \rho^2 \end{pmatrix}$, SA_1 et SA_2 sont symétriques, en sorte que pour un certain choix de P (avec ${}^tPP = \mathrm{id}$), on a

$$P^{-1}S\tilde{A}P = D = \begin{pmatrix} \Lambda & & 0 \\ & \Lambda_1 & \\ 0 & & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda > \Lambda_1 > \Lambda_2 .$$

1.1. <u>Qu'est ce qu'une onde de raréfaction</u> ?

1.1.1. Rappel du cas "constant".

Lorsque $v_\pm$ sont constantes et $\varphi_o \equiv 0$, une solution $v = h(x/t)$ satisfaisant (1.2) existe, avec

$$\frac{dh}{ds} = r(h(s),1,0), \quad h(\lambda_\pm) = v_\pm , \quad \lambda_\pm = \lambda(v_\pm,1,0)$$

dans le dièdre $\lambda_- < x/t < \lambda_+$, pourvu que les états v_+ et v_- soient sur la même courbe intégrale de r , et satisfassent $\lambda_- < \lambda_+$.

La solution complète de (1.2) est alors la juxtaposition de v_- pour $x/t < \lambda_-$, $h(x/t)$ pour $\lambda_- < x/t < \lambda_+$, et v_+ pour $x/t > \lambda_+$.

1.1.2. Cas général.

Soit R le domaine $\{(X,Y,T),\ 0 < X < 1,\ T > 0\}$, et $\psi(X,Y,T)$, de classe C^1 sur $\overline{R}$, vérifiant $\psi(X,Y,0) = \varphi_o(Y)$ et $\psi_X = CT$ (C fonction positive dans $\overline{R}$); l'application ($\sim$) $\{x = \psi(X,Y,T),\ y = Y,\ t = T$ est alors une bijection de R sur le dièdre d'arête Γ

$$S = \{(x,y,t),\ \psi(0,y,t) < x < \psi(1,y,t),\ t > 0\} .$$

et si W(X,Y,T) vérifie dans R le système

$$L(W,\psi)W \equiv \frac{\partial W}{\partial T} + \frac{1}{\psi_X}\left(A_1(W) - \psi_T - A_2(W)\psi_Y\right)\frac{\partial W}{\partial X} + A_2(W)\frac{\partial W}{\partial Y} = 0 , \tag{1.3}$$

alors $\widetilde{W}(x,y,t)$ vérifie dans S le système

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} + A_1(\widetilde{W})\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x} + A_2(\widetilde{W})\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial y} = 0 .$$

Le cas 1.1.1 correspond à $\psi = X(\lambda_+ - \lambda_-)\,T + \lambda_-\,T$.
Nous appellerons ici "onde de raréfaction" la juxtaposition d'une solution de type $\widetilde{W}$ à des solutions régulières v (pour $x < \psi(0,y,t)$) et u (pour $x > \psi(1,y,t)$) de (1.2).

1.2. Solution approchée du problème.

Comme nous considérons une onde de raréfaction relative à la plus grande valeur propre du système, la partie u de la solution est connue d'emblée, ainsi que la surface $x = \psi(1,y,t) = \psi_1(y,t)$, en résolvant le problème de Cauchy avec la donnée v_+ .

En transportant v sur $X < 0$ par un changement $\{x = \varphi(X,Y,T),\ y = Y,\ t = T$ où $\varphi(0,Y,T) = \psi(0,Y,T)$, et $\varphi_X > 0$, on voit que notre problème peut finalement se formuler ainsi :

Trouver v,φ (définies dans un voisinage de 0 dans $x \leqslant 0$, $t \geqslant 0$) et w , ψ (définies dans un voisinage de $y = 0$, $t = 0$, $x \in [0,1]$ dans $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$) telles que

(1.4) $$L(v,\varphi)v = 0 \quad , \quad L(w,\psi)w = 0$$

(1.5) $$v(x,y,0) = v_-(x+\varphi_o(y),y),$$

(1.6) $$v(0,y,t) = w(0,y,t) \ ,$$

(1.7) $$w(1,y,t) = u(1,y,t) \quad (u \text{ donnée})$$

(1.8) $$\psi(0,y,t) = \varphi(0,y,t)$$

(1.9) $$\psi(1,y,t) = \psi_1(y,t) \quad (\psi_1 \text{ donnée})$$

(1.10) $$\psi(x,y,0) = \varphi_o(y) \ , \ \psi_x(x,y,t) = Ct \ (C \text{ fonction positive})$$

(1.11) $$\varphi_x(0,0,0) > 0 \ .$$

Bien entendu, comme dans 1.1.1, cela suppose une relation entre les états v_+ et v_- , que nous traduirons par l'hypothèse suivante :

(1.12) $$\begin{cases} \text{Il existe une fonction } C^\infty \ s<0 \text{ telle que } v_-(\varphi_o(y),y)=h(s(y),y), \\ \text{où } h(s,y) \text{ est la solution de } \dfrac{\partial h}{\partial s} = r(h,1,-\varphi_o'), \text{ avec} \\ h(0,y) = v_+(\varphi_o(y),y). \end{cases}$$

Plus généralement, on peut montrer ceci :

Proposition 1.2. Pour tout entier $k \geq 0$, et pour tout jet $\{\partial_x^\ell v_+|_\Gamma , \ell \leq k\}$ donné, il existe un jet $\{\partial_x^\ell v_-|_\Gamma , \ell \leq k\}$ tel que pour tous v_+ et v_- possédant ces jets, il existe des fonctions C^∞ $\bar{v},\bar{\varphi},\bar{w},\bar{\psi}$ solutions approchées de (1.4) → (1.11) au sens suivant :

$$\begin{aligned}
&L(\bar{v},\bar{\varphi})\bar{v} = \bar{f} = O(t^{k+1}), \ t \ L(\bar{w},\bar{\psi})\bar{w} = \bar{g} = O(t^{k+1}) \\
&\bar{v}(x,y,0) = v_-(x+\varphi_o(y),y) \\
&\bar{v}(0,y,t) = \bar{w}(0,y,t) \\
&\bar{w}(1,y,t) = u(1,y,t) \\
&\bar{\psi}(0,y,t) = \bar{\varphi}(0,y,t) \\
&\bar{\psi}(1,y,t) = \psi_1(y,t) \\
&\bar{\psi}(x,y,0) = \varphi_o(y), \ \bar{\psi}_x = Ct \ , \ \bar{\psi}_t - \lambda(\bar{w},1,-\bar{\psi}_y) = O(t^{k+1}) \ . \\
&\bar{\varphi}(x,y,t) = x + \bar{\varphi}(0,y,t) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

2. EXISTENCE D'ONDES DE RAREFACTION.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal, pour lequel nous supposons (pour simplifier) que l'équation d'état $p = p(\rho)$ est de la forme

$$p = A\rho^{\gamma} \quad , A > 0 \; , \; \gamma > 0 \; .$$

Théorème. Considérons le système (1.2) des équations d'Euler pour un écoulement isentropique.

Supposons que les données $v_{\pm}$ vérifient (1.12) ainsi que les relations de compatibilités sur Γ données par la prop.1.2, pour un $k \geqslant 7$.

Il existe alors, au voisinage de l'origine, une "onde raréfaction" (au sens de 1.1) solution de (1.2), qui possède la régularité suivante :

i) Pour $x < 0$ (resp. $0 < x < 1$), les fonctions v et φ (resp. w et ψ) de (1.4) $\rightarrow$ (1.11) sont de classe H^s $(s < k+1)$.

ii) Près de $x = 0$ (resp. $x = 0$ et $x = 1$), les fonctions v et φ (resp. w et ψ) sont de classe C^{ρ} $(\rho < \frac{k-1}{2})$.

iii) La surface "libre" a pour équation $x = \varphi(0,y,t)$, et $\varphi(0,y,t) \in H^s (s < k)$ ■

Dans le cas d'une équation d'état $p(\rho)$ quelconque, nous pouvons établir un théorème d'existence en modifiant légèrement l'argument, et on obtient en général une régularité plus faible des solutions, dépendant des valeurs initiales $v_{\pm}$.

Par ailleurs, la régularité (cf.ii)) des solutions au voisinage des surfaces caractéristiques bordant l'onde de raréfaction est en fait de type "conormal" (cf.[6] par exemple), et peut être décrite précisément (cf. § 5.1, 5.2).

Remarquons enfin qu'un théorème analogue peut-être prouvé pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques symétriques généraux [0], relativement à une valeur propre extrême "vraiment non-linéaire".

3. SCHEMA DE RESOLUTION (1ère partie).

3.1. Généralités.

Le problème (1.4) $\rightarrow$ (1.11) possède comme inconnues non seulement v et w , mais encore φ et ψ . Dans [11], l'observation fondamentale de Majda concernant les chocs est que la relation de Rankine-Hugoniot fournit, dans certaines conditions, à la fois un très bon contrôle de la surface de choc et des conditions de transmission raisonnables pour l'opérateur considéré.

Ici, la surface libre d'équation $x = \psi(0,y,t)$ n'est controlée qu'à travers les traces de w sur $x = 0$: comme la surface $\{x = 0\}$ est caractéristique, cela entraîne une perte de différentiabilité.

Nous sommes donc conduits à employer une technique de Nash-Moser [7],[18], qui consiste à combiner la méthode d'itération de Newton avec une régularisation convenable des solutions approchées obtenues à chaque étape de l'itération.

3.2. Structure du linéarisé.

Partant d'une solution approchée (prop.1.2) de (1.4) $\to$ (1.11), il faut tout d'abord calculer le linéarisé $\ell(w,\psi)(\dot{w},\dot{\psi})$ ($\dot{w}$ et $\dot{\psi}$ désignent des "variations" de w et ψ) de $L(w,\psi)w$ sur l'état (w,ψ) : sa structure est remarquable, comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 3.2. On a $\ell(w,\psi)(\dot{w},\dot{\psi}) = L(w,\psi)\dot{W} + B(w,\psi)\dot{W} + \frac{\partial}{\partial x}(L(w,\psi)w)\dot{\psi}$, où $\dot{W} = \dot{w} - \frac{w_x}{\psi_x}\dot{\psi}$, $B(w,\psi) = \frac{1}{\psi_x} B_1(w,\psi) + B_2(w,\psi)$, B_1 et B_2 étant des matrices (3×3) dont les coefficients dépendent de façon C^∞ de w, ∇w, $\nabla\psi$. ∎

L'introduction de $\dot{W}$ est, bien entendu, à rapprocher de [1].

Cette proposition donne immédiatement une des clés de la méthode : pour résoudre $\ell(w,\psi)(\dot{w},\dot{\psi}) = \dot{G}$ lorsque (w,ψ) est proche d'une solution, il suffira de résoudre le système d'opérateur $L(w,\psi) + B(w,\psi)$, le terme $\frac{\partial}{\partial x}(L(w,\psi)w)\dot{\psi}$ étant considéré comme une "erreur quadratique". A ce stade, seul $\dot{W}$ est calculé, $\dot{\psi}$ choisi arbitrairement déterminant $\dot{w}$.

Pour résoudre $L(w,\psi)\dot{W} + B(w,\psi)\dot{W} = \dot{G}$, on pose $\dot{W} = P\dot{Y}$ (P est définie en 1. et diagonalise $S\tilde{A}$, où $\tilde{A} = A_1(w)-\psi_t-A_2(w)\psi_y$), et le système devient

$$(3.2) \qquad \psi_x P^{-1}SP\partial_t\dot{Y} + D\partial_x\dot{Y} + \psi_x P^{-1} SA_2P\partial_y\dot{Y} + C\dot{Y} = \psi_x P^{-1}S\dot{G} ,$$

où
$$C = \psi_x P^{-1}S(P_t+A_2P_y+B_2P) + P^{-1}S\tilde{A}P_x + P^{-1}SB_1P .$$

Il importe de remarquer trois faits :

i) Le système (3.2) est symétrique.

ii) A cause de (1.10), le système (3.2) correspondant à (w,ψ) est singulier, tandis que le système correspondant à (v,φ) ne l'est pas (cf.(1.11)).

iii) $D = \begin{pmatrix} \Lambda & & 0 \\ & \Lambda_1 & \\ 0 & & \Lambda_2 \end{pmatrix}$, et $\Lambda_{|x=0}$ (resp.$\Lambda_{|x=1}$) est petite dans la mesure où (1.4), (1.6) et (1.8) (resp.(1.4) (1.7) et (1.9)) sont approximativement vérifiées. Comme l'on désire travailler avec des systèmes symétriques pour lesquels la "matrice de bord" est de rang constant (cf. par exemple Rauch [20]), on choisira $\bar{\Lambda}$ telle que

$$\bar{\Lambda} - \Lambda = 0 \quad \text{pour } x = 0,\ x = 1, \text{ et l'on résoudra le système}$$

$$(3.3) \qquad \bar{L}(w,\psi)\dot{Y} = \psi_x P^{-1}SP\partial_t\dot{Y} + \bar{D}\,\partial_x\dot{Y} + \psi_x P^{-1}SA_2P\partial_y\dot{Y} + C\dot{Y} = \psi_x P^{-1}S\dot{G},$$

où $\bar{D} = \begin{pmatrix} \Lambda-\bar{\Lambda} & & 0 \\ & \Lambda_1 & \\ 0 & & \Lambda_2 \end{pmatrix}$; le terme $\begin{pmatrix} \bar{\Lambda} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \partial_x\dot{Y}$ sera considéré comme une "erreur quadratique".

3.3. <u>Nature des difficultés rencontrées.</u>

A chaque étape, le schéma de Newton nécessite donc de résoudre le système

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \bar{L}(v,\varphi)\dot{X} = \varphi_x P^{-1}S\dot{F} \\ \bar{L}(w,\psi)\dot{Y} = \psi_x P^{-1}S\dot{G} \end{cases},$$

avec des conditions aux limites sur $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ choisies afin d'améliorer l'approximation de (1.6) $\to$ (1.9).

3.3.1. <u>Conditions aux limites</u>. Sur $x = 0$ l'on choisit $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$ (ce qui est raisonnable vu que $\bar{\varphi}(0,y,t) = \bar{\psi}(0,y,t)$ et (18)); la relation sur $\dot{v}$ et $\dot{w}$ correspondant à (1.6) s'écrit alors, compte tenu des définitions de $\dot{X}$ et $\dot{Y}$, comme deux relations scalaires sur $\dot{X}$ et $\dot{Y}$ (où $\dot{\varphi}$ ne figure pas), plus une relation déterminant $\dot{\varphi}$ en fonction de $\dot{X}$ et $\dot{Y}$.
La difficulté est alors qu'on ne peut pas espérer résoudre un système caractéristique tel que (3.4) en imposant des conditions qui font intervenir les premières composantes $\dot{X}_0$ et $\dot{Y}_0$ de $\dot{X} = (\dot{X}_0,\dot{X}')$, et $\dot{Y} = (\dot{Y}_0,\dot{Y}')$.

Une difficulté analogue apparaît pour obtenir (1.7) sur $x = 1$.

Nous reviendrons au §4 sur ce problème des conditions aux limites pour (3.4).

3.3.2. Résolution dans une chaîne d'espaces. La procédure de Nash-Moser fait intervenir une "chaîne" convenable d'espaces E_s (par exemple les espaces de Sobolev H^s), et repose sur la possibilité d'obtenir pour le linéarisé ℓ une estimation "trame" dans cette chaîne (cf. la présentation de [7], ou [5] pour une discussion détaillée de ces concepts).

Une estimation "tame" implique en particulier que la norme de la solution dans un certain E_s est estimée par la norme des données dans E_{s+s_o}, où le "décalage" s_o est fixe (cf.§5 pour la forme de l'estimation obtenue sur (3.4)).

Si l'on choisit comme chaîne les espaces de Sobolev usuels H^s, on ne peut obtenir, pour un système caractéristique de la structure de (3.4), une telle estimation : cela ressort de l'analyse fine de Majda et Osher [13]. Pire encore, on n'obtient, en gros qu'une estimation où la norme $H^{s/2}$ de la solution est contrôlée par la norme H^s des données, l'indice 1/2 $(s/2=s\times 1/2)$ rendant sans espoir un aménagement de la technique de Nash-Moser dans l'esprit de [10]. La construction d'une chaîne E_s bien adaptée sera esquissée au §5 .

4. SCHEMA DE RESOLUTION (2ème partie).

Nous supposerons fixé un domaine D (resp.$\tilde{D}$), voisinage de 0 dans $x\leqslant 0$, $t\geqslant 0$ (resp. voisinage du segment $x\in[0,1]$ dans $0\leqslant x\leqslant 1$, $t\geqslant 0$), de géométrie convenable, sur lequel seront définies les fonctions v,φ (resp.w,ψ) que l'on considérera.

On notera (un peu abusivement) S_θ une famille d'opérateurs régularisants dont les propriétés seront précisées au §5, et E_T un opérateur de "restriction-extension" vérifiant (pour $T>0$ petit)

$$(E_T v)\big|_{t\in[0,T]} = v\big|_{t\in[0,T]} \quad , \quad |E_T v|_{E_s} \leqslant C\big|v|_{[0,T]}\big|_{E_s}$$

avec une constante C indépendante de T .

Pour une suite de paramètres $\theta_n = (\theta_o^{1/\varepsilon}+n)^{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ et $\frac{1}{\theta_o} > 0$ seront ultérieurement choisis petits), on note

$$\Delta_n = \theta_{n+1} - \theta_n \ , \ S_{\theta_n} = S_n \ , \ v_{n+1} = v_n + \Delta_n \dot{v}_n \ , \ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta_n \dot{\varphi}_n \ \text{etc...}$$

avec $v_o = \bar{v}$, $\varphi_o = \bar{\varphi}$, etc...

4.1. Ecriture détaillée du schéma de résolution.

Dans ce schéma, toutes les "variations", notées avec un "." au-dessus, sont des fonctions C^∞ plates sur $t=0$.

4.1.1. Equations à l'intérieur. On établit facilement, compte tenu de la forme de ℓ et de la discussion suivant la prop.3.2 (cf. en particulier (3.3)), l'expression

$$L(v_{n+1},\varphi_{n+1})v_{n+1} - L(v_n,\varphi_n)v_n = \Delta_n \dot{F}_n + \Delta_n e_n + R_n \quad ,$$

où l'on a posé

$$\dot{V}_n = \dot{v}_n - \frac{(S_n v_n)_x}{(S_n\varphi_n)x}\quad \dot{\varphi}_n \ , \ \dot{V}_n = P(S_n v_n, S_n\varphi_n)\dot{X}_n \ ,$$

$$\dot{F}_n = \frac{1}{(S_n\varphi_n)_x}\ (S^{-1}P)\ (S_n v_n, S_n\varphi_n)\dot{\bar{F}}_n \quad , \quad \dot{\bar{F}}_n = \bar{L}(S_n v_n, S_n\varphi_n)\dot{X}_n \quad ,$$

$e_n = e'_n + e''_n + \bar{e}'_n + \bar{e}''_n$ avec :

- $e'_n = \ell(v_n,\varphi_n)\ (\dot{v}_n,\dot{\varphi}_n) - \ell(S_n v_n, S_n\varphi_n)\ (\dot{v}_n,\dot{\varphi}_n)$
- $e''_n = \frac{1}{\Delta_n}\ \{L(v_{n+1},\varphi_{n+1})v_{n+1} - L(v_n,\varphi_n)v_n - \ell(v_n,\varphi_n)\ (\dot{v}_n,\dot{\varphi}_n)\Delta_n\}$
- $\bar{e}'_n = E_T\ \{\frac{\partial}{\partial x}\ (L(S_n v_n, S_n\varphi_n)S_n v_n)\}\ \dot{\varphi}_n$
- $\bar{e}''_n = \frac{1}{(S_n\varphi_n)_x}\ (S^{-1}P)(S_n v_n, S_n\varphi_n)\begin{pmatrix}\partial_x\ \dot{X}_{n,0}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ E_T(\bar{\Lambda}(S_n v_n, S_n\varphi_n))$

et enfin $R_n|_{[0,T]} = 0$.

En notant l' "erreur cumulée" $E_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k e_k$, on en déduit

$$L(v_{n+1},\varphi_{n+1})v_{n+1} = \bar{f} + E_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} R_k + \sum_{k=0}^{n} \Delta_k\ \dot{F}_k \quad ,$$

en sorte que le choix des $\dot{F}_k$ selon la formule $\sum_{k=0}^{n} \Delta_k\dot{F}_k = - S_n E_T \bar{f} - S_n E_n$

garantit formellement $L(v_{n+1},\varphi_{n+1})v_{n+1}|_{[0,T]} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

De même, on écrira

$t\ L(w_{n+1},\psi_{n+1})w_{n+1} - t\ L(w_n,\psi_n)w_n = \Delta_n\dot{G}_n + \Delta_n d_n + R'_n$, où l'on a posé

$$\dot{W}_n = \dot{w}_n - \frac{(S_n w_n)_x}{(S_n \psi_n)_x} \dot{\psi}_n \quad , \quad \dot{W}_n = P(S_n w_n, S_n \psi_n)\dot{Y}_n \quad ,$$

$$\dot{G}_n = \frac{t}{(S_n \psi_n)_x} (S^{-1} P)\ (S_n w_n, S_n \psi_n)\dot{\overline{G}}_n \quad , \quad \dot{\overline{G}}_n = \overline{L}(S_n w_n, S_n \psi_n)\dot{Y}_n \quad ,$$

$d_n = t\, e_n$ (étant entendu ici que dans l'expression de e_n on a remplacé v_n par w_n, φ_n par ψ_n , $\dot{X}_n$ par $\dot{Y}_n$, etc...), et enfin $R'_{n|[0,T]} = 0$, et le choix des $\dot{G}_k$ se fait de façon analogue à celui des $\dot{F}_k$.

4.1.2. Conditions aux limites.

a) Avec les notations de 4.1.2, on peut écrire sur $x = 0$,
$v_{n+1} - w_{n+1} = v_n - w_n + \Delta_n \dot{T}_n + \Delta_n s_n + R''_n$, où l'on a posé

$\dot{T}_n = P(S_n v_n, S_n \varphi_n)\dot{\overline{T}}_n$, $s_n = s'_n + s''_n$ avec :

- $s'_n = E_T \{P(S_n v_n, S_n \varphi_n) - P(S_n w_n, S_n \psi_n)\}\ P^{-1}(S_n w_n, S_n \psi_n)\dot{w}_n$
- $s''_n = P(S_n v_n, S_n \varphi_n) \begin{pmatrix} 0 \\ E_T\ t(S_n Z_n)' \end{pmatrix} \dfrac{\dot{\varphi}_n}{t}$

et $\dot{X}'_n - \dot{Y}'_n = \dot{\overline{T}}'_n$, $\dot{X}_{n,o} - \dot{Y}_{n,o} + (S_n Z_n)_o \dot{\varphi}_n = \dot{\overline{T}}_{n,o}$, $R''_{n\,[0,T]} = 0$.

Ici la quantité clé est

$$S_n Z_n = P^{-1}(S_n v_n, S_n \varphi_n)\ \frac{(S_n v_n)_x}{(S_n \varphi_n)_x} - P^{-1}(S_n w_n, S_n \psi_n)\ \frac{(S_n w_n)_x}{(S_n \psi_n)_x}$$

pour laquelle $t(S_n Z_n)_o \neq 0$ à l'origine (en admettant que $S_n v_n$, $S_n \varphi_n$ ... sont assez proches de $\overline{v}$, $\overline{\varphi}$ etc.)
Comme en 4.1.1., on choisit les $\dot{T}_k$ selon la formule

$$\sum_{k=o}^{n} \Delta_k \dot{T}_k = - S_n \overline{s}_n \quad , \quad \overline{s}_n = \sum_{k=o}^{n-1} \Delta_k s_k \quad .$$

b) Sur $x = 1$, on connait déjà les "bonnes" valeurs de ψ et w , qui sont aussi celles de $\overline{\psi} = \psi_o$, $\overline{w} = w_o$. On choisira donc $\dot{\psi}_n = 0$, $\dot{Y}'_n = 0$ sur $x = 1$: il est possible, en choisissant soigneusement S_θ , de montrer que ceci implique en fait $\dot{Y}_n = 0$. Les relations (1.7) et (1.9) restent donc exactement vérifiées au cours de la résolution (ainsi d'ailleurs que (1.5), (1.8), (1.10), (1.11)).

4.2. Caractère quadratique des erreurs.

Le schéma décrit en 4.1. est construit de telle sorte qu'à chaque étape on ait à résoudre le système

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \bar{L}(S_n v_n, S_n \varphi_n)\dot{X}_n = \dot{\bar{F}}_n \\ \bar{L}(S_n w_n, S_n \psi_n)\dot{Y}_n = \dot{\bar{G}}_n \\ \dot{X}'_n - \dot{Y}'_n = \dot{\bar{T}}'_n \qquad \text{sur } x = 0 \, , \\ \dot{Y}'_n = 0 \qquad\qquad \text{sur } x = 1 \end{cases}$$

dans lequel les données $\dot{\bar{F}}_n$, $\dot{\bar{G}}_n$, $\dot{\bar{T}}_n$ sont des fonctions C^∞ plates sur $t = 0$.

Bien entendu, un tel schéma ne peut converger que si les erreurs e_n , d_n et s_n sont effectivement "quadratiques".

a) Passons en revue les termes de e_n (cf.4.1.1) : Les erreurs e'_n ("de substitution") et e''_n ("reste de Taylor") sont celles que l'on rencontre toujours dans un schéma de Nash-Moser, et elles se traitent ici comme d'habitude.

L'erreur $\bar{e}'_n$ (cf. la discussion en 3.2) est significativement plus petite que $\dot{\varphi}_n$, car $L(S_n v_n, S_n\varphi_n)S_n v_n{}_{|[0,T]} \to 0$.

Quant à $\bar{e}''_n$, elle est significativement plus petite que $\dot{X}_n$, car $\Lambda(S_n v_n, S_n\varphi_n)$ est petite sur $x = 0$, $t \in [0,T]$: remarquons ici que ce fait est obtenu comme une conséquence de ce que $L(v_n,\varphi_n)v_n$, $L(w_n,\psi_n)w_n$ et $v_n - w_n$ sont petits pour $t \in [0,T]$.

L'analyse est analogue pour d_n .

b) Etudions les termes de s_n (cf.4.1.2) : L'erreur s'_n est significativement plus petite que $\dot{w}_n$ car, sur $x = 0$, $\varphi_n - \psi_n = 0$ et $v_n - w_n$ est petit.

L'étude de s''_n est plus délicate : on peut montrer que le fait d'avoir $L(v_n,\varphi_n)v_n$, $L(w_n,\psi_n)w_n$ et $v_n - w_n$ petits implique $t(S_n Z_n)'$ petit pour $t \in [0,T]$, d'où le caractère quadratique de s''_n .

Autrement dit, le "découplage" des conditions aux limites dans (4.2), qui résoud la difficulté soulevée en 3.3.1, s'effectue non pas exactement, mais approximativement modulo l'erreur s''_n .

4.3. Récapitulation et résolution du système (4.2).

a) Si l'on parvient à résoudre (4.2), on choisira $\dot{\varphi}_n = \dot{\psi}_n$ sur $x = 0$ par l'équation

$$\dot{X}_{n,o} - \dot{Y}_{n,o} + t(S_n Z_n)_o \frac{\dot{\varphi}_n}{t} = \dot{\bar{T}}_{n,o} \qquad \text{(cf.4.1.2 a)).}$$

On prendra alors pour $\dot{\varphi}_n$ une extension convenable de $\dot{\varphi}_n|_{x=o}$ dans $x \leqslant 0$, et on en déduira $\dot{v}_n$ par les formules du §4.1.1 ; de même, on prendra pour $\dot{\psi}_n$ une extension convenable de $\dot{\psi}_n|_{x=o}$ dans $0 \leqslant x \leqslant 1$, nulle pour $x=1$ (cf.4.1.2 b)), et on en déduira $\dot{w}_n$.

b) Pour résoudre (4.2) on peut toujours se ramener au cas $\dot{\bar{T}}'_n = 0$; on remarque alors que pour $t \neq 0$, il s'agit d'un système symétrique pour lequel les conditions au limites sont "maximales positives" (cf. par exemple [20]), pourvu que $\widetilde{D}$ soit choisi "cylindrique" dans la direction x . Par ailleurs, on peut démontrer pour (4.2) une estimation (cf.§5) dans des espaces "avec poids" en $t^{-\gamma}$, moyennant une condition de positivité convenable sur les coefficients des systèmes : on peut donc résoudre (4.2) dans les fonctions C^∞ plates sur $t = 0$.

5. CHAINE D'ESPACES ET ESTIMATION "TAME" POUR (4.2).

5.1. <u>La chaîne $\widetilde{E}_s$</u> .

La construction est inspirée des travaux de Rauch-Reed [21] , Chen [3] et Métivier [15] : $\widetilde{E}_s$ est formé de fonctions qui sont, en gros, conormales $H^{o,s}$ par rapport à $x = 0$ (ou $x = 0$ et $x = 1$ pour le domaine $\widetilde{D}$), et qui possèdent de plus s/2 dérivées en x dans L^2 . Plus précisément, si s pair,

$$\widetilde{E}_s(D) = \{u \in L^2(D),\ x^\ell \partial_x^m \partial_t^{r'} \partial_y^{r''} u \in L^2 \ \text{ pour } r'+r''+2m-\ell \leqslant s,\ 0 \leqslant \ell \leqslant m\}$$

Par les techniques habituelles utilisant la décomposition de Littlewood-Paley (cf. par exemple [2],[16]),il est possible de définir $\widetilde{E}_s$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$.

Remarquons de plus que $\widetilde{E}_s \subset C^\rho$ si $s > 2+2\rho$.

Il est facile d'établir pour des fonctions de $L^\infty \cap \widetilde{E}_s$ une inégalité du type "Gagliardo-Nirenberg" (cf. par exemple [19]), avec les conséquences habituelles ($|\ |_s$ est la norme dans E_s)

$$|uv|_s \leqslant C(|u|_{L^\infty}|v|_s + |v|_{L^\infty}|u|_s)$$

$$|F(u)|_s \leqslant C(1+|u|_s) \quad \text{(C ne dépendant que de F et } |u|_{L^\infty})$$

(pour plus de détails sur ce type d'estimations, voir [8], [18] ou mieux encore [2], [16]).

5.2. La chaîne E_s .

Nous désignerons par E_s les restrictions à D de fonctions de $\tilde{E}_s$ supportées dans $t \geqslant 0$.

On peut construire pour E_s une famille S_θ d'opérateurs régularisants telle que chaque S_θ applique E_s dans les fonctions C^∞ plates sur $t = 0$, avec les propriétés classiques suivantes (cf.[7]) :

i) $|S_\theta u|_a \leqslant C|u|_b \quad , \ a \leqslant b$.

ii) $|S_\theta u|_a \leqslant C\theta^{a-b}|u|_b \ , \quad a \geqslant b$.

iii) $|S_\theta u-u|_a \leqslant C\theta^{a-b}|u|_b \quad , \ a \leqslant b$.

iv) $|\frac{d}{d\theta} S_\theta u|_a \leqslant C\theta^{a-b-1}|u|_b$.

Ces opérateurs sont déduits d'opérateurs analogues $\tilde{S}_\theta$ opérant sur $\tilde{E}_s$ par une "recoupe" des fonctions C^∞ en des fonctions C^∞ à support dans $t \geqslant 0$.

L'action des S_θ sur v_n , φ_n etc... est définie par

$$S_\theta v_n = \bar{v} + S_\theta(v_n - \bar{v}) , \ S_\theta\varphi_n = \bar{\varphi} + S_\theta(\varphi_n - \bar{\varphi}) \text{ etc...}$$

5.3. L'estimation "tame" du système (4.2).

Elle est obtenue en appliquant la proposition suivante.

Proposition 5.3. Soit le système (3×3) symétrique réel hyperbolique (i.e. $\Sigma_j \gg 0$)

$$(5.3) \qquad \begin{cases} L_1X = \Sigma_1\partial_tX + D_1\partial_xX + A_1\partial_yX + C_1X = F \ , \text{ dans } D \ , \\ L_2Y = t\Sigma_2\partial_tY + D_2\partial_xY + tA_2\partial_y Y + C_2 Y = G \ , \text{ dans } \tilde{D} \ , \\ X' - Y' = h \qquad \text{sur } x = 0 \\ Y' = 0 \quad \text{sur } x = 1 \end{cases}$$

où les coefficients sont C^∞ , $D_j = \begin{pmatrix} d_j & 0 \\ 0 & -\Delta_j \end{pmatrix}$, les matrices (2×2) Δ_j étant définies positives, $d_1 = x\tilde{d}_1$, $d_2 = x(x-1)\tilde{d}_2$.

Supposons vérifiée la condition de positivité

$$(5.4) \qquad -\partial_xD_2 + {}^tC_2 + C_2 \geqslant c_o > 0 \ ,$$

et les domaines D et $\tilde{D}$ suffisamment "aplatis" ($\tilde{D}$ étant cylindrique, cf.4.3.b))

Supposons enfin que, pour un $s_o > 4$, la norme E_{s_o} des coefficients des L_j (y compris les $\tilde{d}_j$) soit bornée.

Si D et $\tilde{D}$ sont assez petits, pour tout s entier pair $\geqslant 4$, et toutes fonctions X,Y C^∞ plates sur $t = 0$, on a l'estimation

$$(5.5)\quad |X|_s + \left|\frac{Y}{\sqrt{t}}\right|_s \leqslant C\left\{\left|\frac{h}{\sqrt{t}}\right|_{H^s} + |F|_s + \left|\frac{G}{\sqrt{t}}\right|_s + \left(\left|\frac{h}{\sqrt{t}}\right|_{H^4} + |F|_4 + \left|\frac{G}{\sqrt{t}}\right|_4\right)(1+|\mathrm{coeff}|)_s\right\}$$

où $|\mathrm{coeff}|_s$ désigne la somme des normes E_s des coefficients des L_j (y compris les $\tilde{d}_j$) ■

Comme, au cours de la résolution, les valeurs des coefficients de (4.2) diffèrent arbitrairement peu de celles correspondant à $\bar{v},\bar{\varphi}$ ... dans une norme convenable, on pourra appliquer la prop.5.3 et il suffira de vérifier (5.4) pour les valeurs de départ $\bar{v},\bar{\varphi}$ ... et $t = 0$.

Pour le système (4.2) correspondant aux équations d'Euler isentropiques, on trouve que (5.4) est vérifiée indépendamment des valeurs initiales $v_\pm$. Pour des systèmes plus généraux, il faut modifier les "poids" dans (5.5) de façon à obtenir une condition telle que (5.4), le poids dépendant des valeurs de $v_\pm$.

5.4. Fin de la preuve.

Une fois précisés le schéma (4.1) et l'estimation tame (5.3), la preuve de la convergence est assez simple.

Le point crucial en est le choix de T : on trouve que la convergence a lieu dans E_α si, essentiellement, les normes $|E_T\bar{f}|_\beta$ et $|E_T \frac{\bar{g}}{\sqrt{t}}|_\beta$ sont assez petites, pour un certain β voisin de α ; ceci est obtenu en choisissant T petit pourvu que $\beta < k+1$: c'est ainsi que l'ordre de la compatibilité entre les données $v_\pm$ est lié à α . Comme d'autre part la contrainte $\alpha > 7$ est imposée pour réaliser la convergence, cela explique l'hypothèse $k \geqslant 7$ du théorème.

BIBLIOGRAPHIE.

[0] S. ALINHAC, Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires, article à paraître.

[1] S. ALINHAC, Paracomposition et opérateurs paradifférentiels Comm. in PDE 11 (1), (1986), 87-121.

[2] J.M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Ann. Sci. Ecole Normale Sup., 4ème série, 14, 1981, 209-246.

[3] CHEN SHU-XING, Existence of local solution to supersonic flow around three dimensional wing, preprint.

[4] R. COURANT et K.O. FRIEDRICHS, Supersonic flow and Shock waves Springer-Verlag, New-York, 1949.

[5] R.S. HAMILTON, The inverse function theorem of Nash and Moser Bull. of the Amer. Math. Soc., 7 (1), 1982.

[6] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential operators, Springer-Verlag (1986).

[7] L. HÖRMANDER, The boundary problems of physical geodesy, Arch. Rat. Mech. and Anal. 62 (1976), 1-52.

[8] S. KLAINERMAN et A. MAJDA, Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 481-524.

[9] P.D. LAX, Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure. Appl. Math. 10 (1957), 537-567.

[10] S. LOJASIEWICZ et E. ZEHNDER, An inverse function theorem in Fréchet spaces, J. Funct. Analysis 33 (1979), 165-174.

[11] A. MAJDA, "The stability of multi dimensional shock fronts" and "The existence of multi dimensional shock fronts", Memoirs of the Amer. Math. Soc. 275 et 281 (1983).

[12] A. MAJDA, Compressible Fluid-Flow and Systems of Conservation Laws in several space variables, Applied Math. Sc., Springer-Verlag (1984).

[13] A. MAJDA and S. OSHER, Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 607-676.

[14] G. METIVIER, Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace. A paraître Trans. Amer. Math. Soc. (1987).

[15] G. METIVIER, The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data, à paraître Duke Math J. (1987).

[16] Y. MEYER, Remarques sur un théorème de J.M. Bony, Supplemento al rendiconti der circolo mat. di Palermo atti del seminario di analisi armonica, série II (1), (1981).

[17] A. MOKRANE, Problèmes mixtes hyperboliques non-linéaires, Thèse de 3ème cycle, Rennes, 1987.

[18] J. MOSER, A rapidly convergent iteration method and non linear differential equations, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa (3) 20, 1966, 265-315.

[19] L. NIRENBERG, On elliptic partial differential equations Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3, 13 (1959), 116-162.

[20] J. RAUCH, Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, Trans. of the Amer. Math. Soc. 291 (1), 1985, 167-187.

[21] J. RAUCH and M. REED, Striated solutions to semilinear, two speed wave equations, Ind. Univ. Math. J 34 (1985), p.337-353.

*
* *

Faculté des Sciences d'Orsay
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 ORSAY CEDEX