

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. DUCHON

R. ROBERT

Solutions globales avec nappe de tourbillon pour les équations d'Euler dans le plan

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 7,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986___A7_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

SOLUTIONS GLOBALES AVEC NAPPE DE TOURBILLON
POUR LES EQUATIONS D'EULER DANS LE PLAN

par J. DUCHON et R. ROBERT

Résumé. Nous montrons que pour toute courbe assez proche d'une droite, il existe une solution globale des équations d'Euler ayant pour tout $t \geq 0$ une nappe de tourbillon et admettant la courbe donnée comme nappe de tourbillon initiale.

§ 1. INTRODUCTION.

Nous considérons les équations d'Euler pour un fluide parfait incompressible dans le plan :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u) = - \nabla q , \\ \operatorname{div} u = 0 , \end{cases}$$

où $u = (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$ est la vitesse à l'instant t au point de coordonnées (x_1, x_2) et q est la pression.

Nous nous intéressons à des solutions singulières, dont le tourbillon, c'est-

à-dire le rotationnel du champ de vitesse, $\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, est une mesure portée par une courbe Γ_t d'équation $x_2 = y(t, x_1)$. La densité de tourbillon $\Omega(t, x_1)$ est alors définie par $\langle \operatorname{rot} u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Omega(t, x_1) \varphi(x_1, y(t, x_1)) dx_1$, pour toute fonction test $\varphi \in C^\infty$ à support compact.

Un exemple est l'écoulement stationnaire donné par

$$u_1 = \frac{\Omega_0}{2} \text{ et } u_2 = 0 \text{ pour } x_2 < 0, \quad u_1 = -\frac{\Omega_0}{2} \text{ et } u_2 = 0 \text{ pour } x_2 > 0 .$$

Dans ce cas le tourbillon est la mesure de densité constante Ω_0 sur la droite $x_2 = 0$. Cet écoulement est instable (instabilité de Kelvin-Helmholtz) parce qu'une perturbation initiale δy_0 de la courbe, ou $\delta \Omega_0$ de la densité de tourbillon, de fréquence k , est amplifiée par un facteur e^{ckt} [2,4].

Il en résulte que c'est en général seulement pour des données initiales (courbe et densité de tourbillon) analytiques que l'on obtient l'existence, localement en temps, de la courbe Γ_t et de la densité de tourbillon $\Omega(t, x_1)$, par un théorème du type de Cauchy-Kowalewski (nous renvoyons au travail de C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos et U. Frisch [4]).

Notre but dans cet article est de montrer que pour une densité initiale de tourbillon non pas quelconque mais choisie en fonction de la courbe $\Gamma_0 = \{(x, y_0(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, la courbe Γ_t existe pour tout $t > 0$.

Nous supposons seulement que $\frac{dy_0}{dx}$ est la transformée de Fourier d'une mesure de masse totale assez petite.

Nous montrerons en outre que Γ_t et $\Omega(t)$ deviennent analytiques pour $t > 0$, dans une bande de largeur proportionnelle à t , et tendent vers une droite et vers une constante, respectivement, pour t infini.

§ 2. EQUATIONS ET NOTATIONS.

Les équations régissant l'évolution de la nappe de tourbillon ont été établies dans [2], elles s'écrivent :

$$\begin{cases} y_t = -y_x V_1 + V_2, \\ \Omega_t + (\Omega V_1)_x = 0, \end{cases}$$

où les indices t, x indiquent la dérivation par rapport à t, x ,

$$V_1(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{y(t, x) - y(t, x')}{(x - x')^2 + (y(t, x) - y(t, x'))^2} \Omega(t, x') dx'$$

et

$$V_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{x - x'}{(x - x')^2 + (y(t, x) - y(t, x'))^2} \Omega(t, x') dx'$$

sont les composantes de la moyenne des deux vecteurs vitesses du fluide au point $(x, y(t, x))$, de part et d'autre de Γ_t . Le signe \int indique que l'intégrale est une valeur principale de Cauchy. Nous écrivons Ω sous la forme $\Omega = \Omega_0(1 + \omega)$, où Ω_0 est une constante que, sans perdre de généralité, nous supposons égale à 2 (faire un changement de l'échelle des temps).

En prenant pour inconnues y_x et ω , les équations deviennent :

$$(E) \quad \begin{cases} y_{xt} - \Lambda\omega = F(y_x, \omega)_x, \\ \omega_t - \Lambda y_x = G(y_x, \omega)_x, \end{cases}$$

où Λ est l'opérateur défini par $\Lambda u(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{u(x) - u(x')}{(x - x')^2} dx'$;

(si on note $\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} u(x) dx$ la transformée de Fourier, on a

$$(\widehat{\Lambda u})(\xi) = 2\pi |\xi| \hat{u}(\xi) ;$$

$$\text{et } F = \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{1}{1+p} - 1\right) \frac{1+\omega(x')}{x-x'} dx' + \frac{1}{\pi} y_x \int \frac{p}{1+p} \frac{1+\omega(x')}{x-x'} dx' ,$$

$$G = \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{p}{1+p} - p\right) \frac{dx'}{x-x'} + \frac{1}{\pi} \omega(x) \int \frac{p}{1+p} \frac{1+\omega(x')}{x-x'} dx' + \frac{1}{\pi} \int \frac{p}{1+p} \frac{\omega(x') dx'}{x-x'} ,$$

où on a posé $p = p(x, x') = \frac{y(x) - y(x')}{x - x'}$ (en oubliant la variable t).

Nous traiterons le système (E), en y ajoutant la condition initiale $y_x(0, x) = y_{0x}$, comme un problème de point fixe

$$(y_x, \omega) = T(y_x, \omega) ,$$

pour une application T définie sur $B_\alpha \times B_\alpha$ un espace de (couples de) fonctions des variables $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, défini plus loin.

Définition 1. On note B_0 l'espace de Banach des fonctions d'une variable $x \in \mathbb{R}$ qui sont transformée de Fourier d'une mesure de Radon bornée, avec la norme correspondante $\|u\| = \int_{\mathbb{R}} d|\hat{u}|$. Et pour $\rho \geq 0$, B_ρ désignera

l'espace des $u \in B_0$ telles que la mesure $|u|_\rho = |e^{\rho r} \hat{u}(\xi)|$ soit bornée ($r = 2\pi |\xi|$) ; sa norme est $\|u\|_\rho = \int d|u|_\rho$. Il est clair que B_ρ est formé de fonctions qui sont analytiques dans la bande $\{x+iy : |y| < \rho\}$ et que c'est une algèbre pour la multiplication ; plus précisément, on a $|uv|_\rho \leq |u|_\rho * |v|_\rho$ (où $*$ désigne la convolution des mesures bornées).

Pour $u \in B_0$, on utilisera aussi la notation $|u|_{-\rho} = |e^{-\rho r} \hat{u}|$.

Définition 2. Pour $\alpha \geq 0$, B_α est l'espace formé des fonctions u continues de $t \geq 0$ à valeurs dans B_0 , telles qu'il existe une mesure de Radon μ positive et bornée qui majore $|e^{\alpha t r} u(t)|$ pour $t \geq 0$. On note $|u|_\alpha$ l'inf des μ ayant cette propriété, et B_α est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_\alpha = \int d|u|_\alpha$.

Nous allons maintenant décrire l'opérateur T , c'est à dire exprimer la solution du système linéaire

$$(EL) \quad \begin{cases} v_t - \Lambda w = F_x, \\ w_t - \Lambda v = G_x, \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

pour F, G données dans \mathcal{B}_0 et v_0 dans B_0 .

Pour ce faire, nous introduisons les opérateurs S, I_0, I^+, I^- ci-dessous.

Définition 3. Soit $S : B_0 \rightarrow \mathcal{B}_0$ l'opérateur défini par $Sv_0(t) = e^{-t\Lambda}v_0$.

On a $|Sv_0|_1 = |\hat{v}_0|$, on dira que S est contractant en "mesure-norme" de B_0 dans \mathcal{B}_1 .

L'opérateur S permet de résoudre (EL) pour $F = G = 0$, puisque $v = Sv_0, w = -v$ sont solution (au sens des distributions).

Définition 4. Pour $h \in \mathcal{B}_0$ et $t \geq 0$, on pose : $I^+h(t) = \int_0^t S(t-\tau)h(\tau)_x d\tau$.

On vérifie que $I^+h(t)$ est une fonction continue de $t \geq 0$ à valeurs dans B_0 et que si $|h(\tau)| \leq \mu$ on a $|I^+h(t)| \leq \mu \forall t$. Cela définit I^+ comme un opérateur contractant en mesure-norme sur \mathcal{B}_0 . Pour $0 \leq \alpha < 1$, I^+ opère sur \mathcal{B}_α avec $|I^+h|_\alpha \leq \frac{1}{1-\alpha} |h|_\alpha$.

L'opérateur I^+ donne la solution nulle en $t = 0$ de l'équation $u_t + \Lambda u = h_x$, par $u = I^+h$, pour $h \in \mathcal{B}_0$.

On obtiendra de même la solution "nulle à l'infini" de l'équation $u_t - \Lambda u = h_x$, par $u = -I^-h$, où I^- est un autre opérateur contractant sur \mathcal{B}_0 .

Définition 5. Pour $h \in \mathcal{B}_0$ et $t \geq 0$, on pose :

$I^-h(t) = \int_t^\infty S(\tau-t)h(\tau)_x d\tau$. On vérifie également que $I^-h(t)$ est une fonction continue de $t \geq 0$ à valeurs dans B_0 et que $|h(\tau)| \leq \mu$ implique $|I^-h(t)| \leq \mu \forall t$. Pour tout $\alpha \geq 0$, I^- opère sur \mathcal{B}_α avec $|I^-h|_\alpha \leq \frac{1}{1+\alpha} |h|_\alpha$.

Enfin l'opérateur $I_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow B_0$ est défini par $I_0h = I^-h(0)$.

Munis de ces notations, nous pouvons résoudre le système (EL) par les formules :

$$\begin{cases} v = Sv_0 + \frac{1}{2} SI_0(F+G) + \frac{1}{2} I^+(F-G) - \frac{1}{2} I^-(F+G), \\ -w = Sv_0 + \frac{1}{2} SI_0(F+G) + \frac{1}{2} I^+(F-G) + \frac{1}{2} I^-(F+G). \end{cases}$$

En effet, d'une part on vérifie facilement que si F et G sont

données dans B_0 ces expressions donnent bien une solution au sens des distributions du système (EL) ; d'autre part une telle solution est unique dans $B_0 \times B_0$ à une constante additive près pour w . Cette solution est donc la seule qui vérifie $\hat{w}(\{0\}) = -\hat{v}(\{0\})$.

Si nous résumons les formules ci-dessus par la notation $(v,w) = S(F,G,v_0)$, nous obtenons la formulation de (E) comme problème de point fixe :

$$(y_x, \omega) = T(y_x, \omega) = S(F(y_x, \omega), G(y_x, \omega), y_{0x}) .$$

La suite de cet article consiste à montrer que pour $y_{0x} \in B_0$ de norme assez petite, l'opérateur T est contractant sur une boule de $B_\alpha \times B_\alpha$ muni de la norme $\|(v,w)\|_\alpha = \sup(\|v\|_\alpha, \|w\|_\alpha)$.

Cela résultera d'une estimation ponctuelle sur la transformée de Fourier de $F(y_x, \omega)$ et $G(y_x, \omega)$ qui sera l'objet des paragraphes qui suivent.

§ 3. DECOMPOSITION DE F ET G .

Nous allons décomposer $F(y_x, \omega)$ et $G(y_x, \omega)$ en série d'opérateurs intégraux singuliers appliqués à l et à ω . Chaque opérateur sera ensuite décomposé en une partie singulière triviale (transformation de Hilbert) et une somme d'opérateurs à noyaux réguliers.

Pour y_x donné dans B_0 , et $j = 0, 1, \dots$, notons $T_j(y_x)$ l'opérateur intégral singulier de noyau $\frac{1}{\pi} \frac{P^j}{x-x'}$, c'est à dire défini par :

$$T_j(y_x) \Omega(x) = \frac{1}{\pi} \int \left(\frac{y(x) - y(x')}{x - x'} \right)^j \frac{\Omega(x')}{x - x'} dx' .$$

Remarquons que $T_0(y_x)$ est simplement la transformation de Hilbert :

$$H\Omega(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\Omega(x')}{x - x'} dx' ,$$

on sait que $H\hat{\Omega}(\xi) = -i \operatorname{sgn} \xi \hat{\Omega}(\xi)$ ($\operatorname{sgn} \xi$ est le signe de ξ) et en convenant que $\operatorname{sgn} 0 = 0$, il vient $H1 = 0$.

On a alors (formellement) les décompositions en série

$$F(y_x, \omega) = \sum_{j=2}^{\infty} \epsilon_j T_j(y_x) (1+\omega) + y_x \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon'_j T_j(y_x) (1+\omega) ,$$

$$G(y_x, \omega) = \omega H y_x + (1+\omega) T_1(y_x) \omega + (1+\omega) \sum_{j=3}^{\infty} \epsilon''_j T_j(y_x) (1+\omega) ,$$

où ε_j , ε_j' , ε_j'' valent -1 , 0 ou 1 .

Décomposons maintenant chaque $T_j(y_x)$ ($j = 1, 2, \dots$) :

$$T_j(y_x) \Omega = y_x^j H\Omega - \sum_{k=1}^j y_x^{j-k} R_k(y_x) \Omega,$$

où $R_k(y_x) \Omega(x) = \frac{1}{\pi} \int (\frac{1}{k} p^k)_x \Omega(x') dx'$.

En effet $\frac{p^{j-y_x}(x)^j}{x-x'} = \frac{p-y_x(x)}{x-x'} \sum_{k=1}^j y_x(x)^{j-k} p^{k-1}$,

et $\frac{p-y_x(x)}{x-x'} = -p_x$, $p^{k-1} p_x = (\frac{1}{k} p^k)_x$.

Remarque. On verra au paragraphe suivant que pour $y_x \in B_0$ les $T_j(y_x)$ définissent

des opérateurs continus sur B_0 avec $\sum_{j=1}^{\infty} \|T_j(y_x)\|_{\mathcal{L}(B_0)} < +\infty$ lorsque $\|y_x\| < 1$.

Il s'ensuit que pour $\|y_x\| < 1$ et $\omega \in B_0$ les séries définissant F et G convergent normalement dans B_0 .

§ 4. L'INEGALITE DE BASE.

Le point fixe contractant repose sur une majoration de

$|F(y_{1x}, \omega_1) - F(y_{2x}, \omega_2)|_{\rho}$ donnée par le lemme suivant.

Lemme. Soient y_{1x} , y_{2x} , ω_1 , ω_2 des éléments de B_{ρ} . On suppose $|y_{ix}|_{\rho}$, $|\omega_i|_{\rho} \leq \mu$ ($i = 1, 2$), ainsi que $|y_{1x} - y_{2x}|_{\rho}$, $|\omega_1 - \omega_2|_{\rho} \leq \nu$,

où μ et ν sont deux mesures positives bornées, μ de norme < 1 . On a alors :

$$|F(y_{1x}, \omega_1) - F(y_{2x}, \omega_2)|_{\rho} \leq A(\mu) * \nu,$$

où A est une application continue de la boule ouverte de rayon 1 de M_+ (ensemble des mesures positives bornées) dans M_+ telle que $A(0) = 0$.

On a la même inégalité pour G .

Avant de démontrer ce lemme, introduisons les opérateurs

$R_k(y_{1x}, \dots, y_{kx})$ définis formellement par :

$$R_k(y_{1x}, \dots, y_{kx}) \Omega(x) = \frac{1}{\pi} \int (\frac{1}{k} p_1 \dots p_k)_x \Omega(x') dx',$$

où $P_i(x, x') = \frac{y_i(x) - y_i(x')}{x - x'}$.

On a alors :

Proposition. Si les y_{ix} , $i = 1, \dots, k$, sont des éléments de B_ρ $R_k(y_{1x}, \dots, y_{kx})$ est un opérateur borné de B_0 dans B_ρ , et on a :

$$|R_k(y_{1x}, \dots, y_{kx})_\Omega|_\rho \leq 2|y_{1x}|_\rho * \dots * |y_{kx}|_\rho * |\Omega|_{-\rho} .$$

Démonstration de la Proposition.

L'opérateur $R_k(y_{1x}, \dots, y_{kx})$ se définit commodément via la transformation de Fourier.

La transformée de Fourier du noyau est en effet

$$\frac{2i\xi}{k} (\hat{p}_1 * \dots * \hat{p}_k) ,$$

or on calcule facilement, en notant $\hat{y}_{ix} = \mu_i$:

$$\hat{p}_i = \int I_\lambda d\mu_i(\lambda) ,$$

où I_λ est la mesure de masse 1 uniformément répartie sur le segment $\{(\xi, \xi') : \xi + \xi' = \lambda, |\xi| + |\xi'| \leq |\lambda|\}$.

La transformée de Fourier du noyau est donc la mesure

$$M_k = \frac{2i\xi}{k} \int \dots \int I_{\lambda_1} * \dots * I_{\lambda_k} d\mu_1(\lambda_1) \dots d\mu_k(\lambda_k) .$$

$I_{\lambda_1} * \dots * I_{\lambda_k}$ est une mesure positive de masse 1 portée par la droite

$\xi + \xi' = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ dont la densité (en ξ) sera notée $\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(\xi)$.

On vérifie que $\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(\xi) \leq \frac{1}{\max_i |\lambda_i|}$ et que cette fonction est nulle pour

$$|\xi| + |\Sigma \lambda_i - \xi| > \Sigma |\lambda_i| .$$

Ce noyau mesure M_k permet de définir un opérateur continu M_k sur les mesures bornées par la formule :

$$\langle M_k \nu, \varphi \rangle = \frac{2i}{k} \int \dots \int (\Sigma \lambda_i + a) \sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(\Sigma \lambda_i + a) \varphi(\Sigma \lambda_i + a) d\mu_1(\lambda_1) \dots d\mu_k(\lambda_k) d\nu(a) ,$$

où φ désigne une fonction test continue à support compact.

En effet, de l'inégalité $|\xi \sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(\xi)| \leq k$, on déduit

$$|M_k v| \leq 2|\mu_1| * \dots * |\mu_k| * |v| .$$

L'opérateur R_k sur B_o se définit par $\widehat{R_k \Omega} = M_k \widehat{\Omega}$. Ecrivons donc

$$|R_k(y_{1x}, \dots, y_{kx}) \Omega|_\rho = |e^{\rho r} M_k \widehat{\Omega}| , \text{ or on a pour une fonction test positive } \varphi$$

$$\langle |e^{\rho r} M_k \widehat{\Omega}|, \varphi \rangle \leq \frac{2}{k} \int \dots \int |\Sigma \lambda_i + a| \sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(\Sigma \lambda_i + a) \varphi(\Sigma \lambda_i + a) e^{\rho 2\pi |\Sigma \lambda_i + a|} d|\mu_1|(\lambda_1) \dots d|\widehat{\Omega}|(a) ;$$

mais puisque $\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}(\xi)$ est nul pour $|\xi| + |\Sigma \lambda_i - \xi| > \Sigma |\lambda_i|$,

on peut majorer dans l'intégrale $|\Sigma \lambda_i + a|$ par $\Sigma |\lambda_i| - |a|$,
d'où il vient :

$$|e^{\rho r} M_k \widehat{\Omega}| \leq 2 e^{\rho r} |\mu_1| * e^{\rho r} |\mu_2| * \dots * e^{-\rho r} |\widehat{\Omega}| ,$$

d'où le résultat. ■

Montrons maintenant le Lemme.

De la proposition on déduit immédiatement l'inégalité

$$\|T_j(y_x) \Omega\| \leq (1+2j) \|y_x\|^j \|\Omega\| , \text{ et donc les séries définissant } F \text{ et } G \text{ convergent dans } B_o .$$

$$\begin{aligned} \text{On a } F(y_{1x}, \omega_1) - F(y_{2x}, \omega_2) &= \sum_{j=2}^{\infty} \epsilon_j [T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2}] + \\ &+ (y_{1x} - y_{2x}) \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j' T_j(y_{1x})_{\Omega_1} + y_{2x} \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j' [T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2}] , \end{aligned}$$

où on a noté $\Omega_i = 1 + \omega_i$.

Ce qui donne, en mesure norme $|\cdot|_\rho$:

$$\begin{aligned} |F(y_{1x}, \omega_1) - F(y_{2x}, \omega_2)|_\rho &\leq \sum_{j=2}^{\infty} |T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2}|_\rho + \\ &+ |y_{1x} - y_{2x}|_\rho * \sum_{j=1}^{\infty} |T_j(y_{1x})_{\Omega_1}|_\rho + |y_{2x}|_\rho * \sum_{j=1}^{\infty} |T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2}|_\rho . \end{aligned}$$

En utilisant la décomposition de T_j et la proposition, on obtient :

$$|T_j(y_x) \Omega|_\rho \leq (1+2j) |y_x|_\rho^{*j} * |\Omega|_\rho ,$$

où on note

$$\mu^{*j} = \mu * \dots * \mu \quad (j \text{ fois}).$$

Majorons $|T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2}|_{\rho}$, on a :

$$\begin{aligned} T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2} &= (y_{1x}^j - y_{2x}^j) H_{\Omega_1} + y_{2x}^j H(\Omega_1 - \Omega_2) + \\ &+ \sum_{k=1}^j (y_{2x}^{j-k} - y_{1x}^{j-k}) R_k(y_{2x})_{\Omega_2} + y_{1x}^{j-k} [R_k(y_{2x})_{\Omega_2} - R_k(y_{1x})_{\Omega_1}] . \end{aligned}$$

En écrivant $y_{1x}^i - y_{2x}^i = (y_{1x} - y_{2x}) \left(\sum_{k=1}^i y_{1x}^{i-k} y_{2x}^{k-1} \right)$, il vient

$$|y_{1x}^i - y_{2x}^i|_{\rho} \leq i \mu^{*(i-1)} * \nu .$$

De même en utilisant $p_2^k - p_1^k = (p_2 - p_1) \left(\sum_{i=1}^k p_2^{k-i} p_1^{i-1} \right)$ et la proposition, on obtient

$$|R_k(y_{2x})_{\Omega_2} - R_k(y_{1x})_{\Omega_1}|_{\rho} \leq 2k \mu^{*(k-1)} * \nu + 2(k+1) \mu^{*k} * \nu ,$$

ceci en remarquant que $|\Omega_i|_{\rho} \leq \delta + \mu$ (où δ est la masse de Dirac à l'origine).

Un calcul direct donne alors

$$|T_j(y_{1x})_{\Omega_1} - T_j(y_{2x})_{\Omega_2}|_{\rho} \leq C(j) (\mu^{*(j-1)} + \mu^{*j}) * \nu ,$$

où $C(j) = 2j^2 + 3j + 1$.

On en déduit $|F(y_{1x}, \omega_1) - F(y_{2x}, \omega_2)| \leq A(\mu) * \nu$,

où $A(\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} a(j) \mu^{*j}$, avec

$$a(1) = 24, \quad a(j) = 8(j+1)^2 \quad \text{pour } j = 2, 3, \dots$$

$A(\mu)$ est définie pour toute mesure bornée μ de norme < 1 ; c'est une application continue nulle en 0.

Le calcul est analogue pour G . ■

§ 5. LE RESULTAT

Théorème. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $y_{0x} \in B_0$ de moyenne nulle (i.e. $\hat{y}_{0x}(\{0\}) = 0$) et de norme $\leq \varepsilon$, il existe $\alpha > 0$ et (y_x, ω) dans $B_{\alpha} \times B_{\alpha}$ solution (au sens des distributions) du système :

$$\begin{cases} y_{xt} - \Lambda \omega = F(y_x, \omega)_x, \\ \omega_t - \Lambda y_x = G(y_x, \omega)_x, \\ y_x(0) = y_{0x}, \quad \omega(0) \text{ de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Une telle solution est unique dans une boule convenable de l'espace $B_0 \times B_0$. Et $y_x(t), \omega(t)$ tendent vers 0 uniformément lorsque t tend vers l'infini.

Démonstration. Grâce à l'estimation du paragraphe précédent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|y_{0x}\| \leq \varepsilon$ il existe $\alpha > 0$ et une boule de $B_\alpha \times B_\alpha$ que T envoie dans elle-même de façon contractante. Le point fixe de T dans cette boule est solution du système avec $y_x(0) = y_{0x}$, et $\omega(0) = -y_{0x} + I_0(F+G)$ est de moyenne nulle si y_{0x} est de moyenne nulle.

Puisque $y_x \in B_\alpha$, on a $|\hat{y}_x(t)| \leq e^{-\alpha t} \int |\xi| d\mu$, où μ est une mesure positive bornée qu'on peut supposer sans masse en 0 ; on a alors

$$\|y_x(t)\| \leq \int e^{-\alpha t} |\xi| d\mu(\xi),$$

et cette dernière intégrale tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Même chose pour ω .

L'unicité est évidente du fait de la contraction. ■

Remarque. L'idée d'estimer les opérateurs intégraux par des majorations ponctuelles sur la transformée de Fourier, qui joue ici un rôle essentiel, n'est pas nouvelle. A quelques variantes de présentation près, on la trouvera dans Coifman et Meyer [3].

Nous remercions tout particulièrement Michelle Schatzman d'avoir attiré notre attention sur cette question. Nous remercions également Yves Meyer et Claude Bardos pour de fructueuses et stimulantes conversations.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] K.I. Babenko, V.H. Petrovich, Dolk. Akad. Nauk. SSSR 245, 1979, 551-554.
- [2] G. Birkhoff, Helmholtz and Taylor instability, in Proc. Symp. Appl. Math. Vol 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1962.
- [3] R.R. Coifman, Y. Meyer, On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. Trans. Amer. Math. Soc 212, 1975, 315-331.

- [4] C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos, U. Frisch, Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability. Comm. Math. Phys. 80, 1981, 485-516.

*
* *
*