

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. LASCAR

**Propagation des singularités Gevrey pour des opérateurs hyperboliques**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1985-1986), exp. n° 6, p. 1-9

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1985-1986\\_\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986___A6_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°  
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

PROPAGATION DES SINGULARITES GEVREY POUR DES OPERATEURS HYPERBOLIQUES.

par B. LASCAR



## **0. Introduction. Énoncé des résultats.**

On considère dans ce travail des résultats de propagation de singularités Gevrey pour des équations hyperboliques.

Le problème de Cauchy hyperbolique dans les classes de Gevrey est un problème classique, pour lequel il existe une très vaste bibliographie, dont il est impossible ici de faire état. Du reste, nous ne nous intéresserons ici qu'à l'aspect purement microlocal; on peut ainsi considérer qu'un théorème de propagation de singularités hyperbolique est une version microlocale du résultat d'unicité correspondant.

L'avantage de ce point de vue est, qu'au prix de certaines difficultés, il permet un énoncé pour un opérateur pseudo-différentiel de régularité  $G^s$  en  $(x, \xi)$  sur le front d'onde  $G^s$  pour le même  $s$ , des solutions.

Notre méthode présente la particularité d'obtenir la régularité Gevrey, à partir d'une estimation d'énergie, sans itérations mais en utilisant des poids d'ordre infini et variables. Ceci nous permet de discuter le rôle des termes d'ordre inférieurs, pour les différentes valeurs de  $s$ , dans le cadre d'une même méthode. Nous pensons que ceci représente une simplification conceptuelle substantielle pour ce problème.

Nous ne considérons ici que des cas où la multiplicité  $\mu$  des caractéristiques est au plus double; l'indice  $s$  critique vaut donc 2. Ceci essentiellement parce que pour les opérateurs à caractéristique de multiplicité plus grande, on ne sait dans un cadre général (par exemple quand les caractéristiques ne sont pas  $C^\infty$ ) à peu près rien sur le rôle des termes d'ordre inférieur.

La preuve consiste à appliquer une transformation canonique complexe, qui respecte les opérateurs pseudo-différentiels de régularité Gevrey, qui exprime dans ce contexte le fait de conjuguer l'opérateur par des poids microlocaux d'ordre infini et variables. La formalisation que nous préférons

est, convenablement adaptée au cadre Gevrey, celle due à Sjöstrand qui consiste à introduire une fonction de poids dans une réalisation de l'identité. Dans le cadre  $C^\infty$ , il s'agit du calcul de l'opérateur  $P_s = e^s P e^{-s}$  où  $e_s = \text{op}_{1/2}(\exp(s(x, \xi) L g \langle \xi \rangle))$ ,  $e^s$  étant une paramétrix de  $e_s$ ; qui résulte du calcul de Weyl d'Hörmander [6].

Notre travail s'appuie d'une part sur les méthodes d'énergies: Hörmander [4], Ivrii [5] (1) et (2), Lascar et Lascar [7]; d'autre part sur des travaux de Sjöstrand [12] et [13] concernant les résolutions de l'identité et les singularités analytiques.

On va maintenant énoncer les résultats.

On dit que  $\sigma(x, \xi)$  est un symbole Gevrey  $s$  de degré  $m$  si:

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C A^{|\alpha|+|\beta|} (\alpha!)^s (\beta!)^s \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}. \quad (0.1).$$

On considère dans la suite un opérateur pseudo-différentiel  $P$  dont le symbole de Weyl s'écrit:

$\sigma(x, \xi) = p_m(x, \xi) + p_{m-1}(x, \xi) + q(x, \xi)$  pour  $\xi$  grand; où  $q$  est symbole Gevrey  $s$  de degré  $m-2$ ,  $p_m$  (resp  $p_{m-1}$ ) est positivement homogène de degré  $m$  (resp  $m-1$ ).

Soit  $\Sigma$  une variété  $G^s$  homogène passant par  $\rho_0 \in T^*\mathbb{R}^n$  privé de la fibre nulle. On envisage les hypothèses suivantes:

$(H_1)_a$  En tout point  $\rho \in \Sigma$ ,  $dp(\rho) = p(\rho) = 0$ ,  $\nabla^2 p(\rho)$  a la signature hyperbolique; si  $F_p(\rho)$  est la matrice fondamentale, on a  $\text{Ker} F_p(\rho) = T_\rho \Sigma$ .

On rappelle que  $\nabla^2 p(\rho)(t, t') = \sigma(t, F_p(\rho)t')$  définit la matrice fondamentale.

$(H_1)_b$  En tout point  $\rho \in \Sigma$ ,  $\text{Sp}(F_p(\rho)) \subset i\mathbb{R}$ ; en  $\rho_0$  il n'y a pas de sous espace spectral de dimension quatre relatif à la valeur propre 0.

Voir [5] pour la classification des formes quadratiques hyperboliques dans

un espace symplectique.

$(H_1)_c$  La dimension de  $T_{\rho} \Sigma \cap (T_{\rho} \Sigma)^{\perp}$  est constante.

Les hypothèses sur les termes d'ordre inférieur sont notées  $(H_2)$ .

$(H_2)_s$  Si  $\rho \in \Sigma$ ,  $\text{Im} p_{m-1}^s(\rho) = 0$ , et  $\text{Re} p_{m-1}^s + 1/2 \text{tr}^+(F_{\rho}) > 0$ .

Ce qui est la condition d'Ivrii-Petkov stricte.

$(H_2)_1$  Si  $\rho \in \Sigma$ ,  $\text{Im} p_{m-1}^s(\rho) = 0$ , et  $\text{Re} p_{m-1}^s + 1/2 \text{tr}^+(F_{\rho}) \geq 0$ .

Ce qui est la condition nécessaire d'Ivrii-Petkov.

On notera  $\text{WF}^{(s)}(u)$  le front d'onde Gevrey  $s$  de  $u$ .

On dit que la direction  $H_{\psi}$  est micro-hyperbolique pour  $p$  en  $\rho \in \Sigma$  si:

$$\nabla^2 p(\rho)(H_{\psi}, H_{\psi}) < 0 \quad (0.2).$$

**Théorème.** Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel Gevrey  $s$  de degré  $m$  admettant un symbole principal  $p$  et un symbole sous-principal homogènes.

Soit  $\psi \in C^2$ ,  $\psi(\rho_0) = 0$ , une fonction telle que  $H_{\psi}$  est une direction

micro-hyperbolique. Sous les hypothèses:

$(H_1)_a, (H_1)_b, (H_1)_c$  et  $(H_2)_s$  si  $s > 2$ ;

$(H_1)_a, (H_1)_b, (H_1)_c$  et  $(H_2)_1$  si  $s = 2$ ;

$(H_1)_a$  si  $s < 2$ ;

si  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\omega$  un voisinage conique de  $\rho_0$

$\rho_0 \notin \text{WF}^{(s)}(Pu)$  et  $\text{WF}^{(s)}(u) \cap \{\psi > 0\} \cap \omega = \emptyset$  entraînent  $\rho_0 \notin \text{WF}^{(s)}(u)$ .

### 1. Esquisse de la preuve.

La preuve comprend quatre étapes que nous évoquerons brièvement. La première consiste à décrire les relations canoniques complexes que nous utilisons. La deuxième consiste en un calcul sur des O.I.F. associés à ces relations; on doit notamment calculer comment un o.p.d. est transformé par conjugaison. La troisième est de prouver une estimation d'énergie. Enfin on conclut en prouvant le théorème.

#### 1.1 Description des relations canoniques.

Soit  $\varepsilon > 0$  un petit paramètre;  $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$  on décrit une transformation canonique réelle et analytique  $\alpha \rightarrow \mathcal{K}(\alpha)$  à l'aide de la phase:

$$\Phi_\varepsilon(x, y, \alpha) = -\chi(y) \cdot \alpha_\xi + x \cdot \xi(\alpha) + g(\alpha) + i\varepsilon/2((\chi(y) - \alpha_x)^2 + (x - x(\alpha))^2);$$

si  $\chi$  désigne un changement de variables quadratique à fixer plus loin pour assurer des conditions de transversalité,  $\alpha \rightarrow \mathcal{K}_1(\alpha) = (x(\alpha), \xi(\alpha))$  est une transformation canonique réelle et analytique,  $g(\alpha)$  est déterminée par:

$$\omega = dg = -{}^t \partial \xi / \partial y(\alpha) \cdot x(\alpha) d\alpha_x + (\alpha_x - {}^t \partial \xi / \partial \eta(\alpha) \cdot x(\alpha)) d\alpha_\xi.$$

$g(\alpha)$  est ainsi déterminée à une constante près. On fixera  $\mathcal{K}_1$  par  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \circ \bar{\chi}^{-1}$ ,

$$\bar{\chi}(\alpha) = (\chi(\alpha), {}^t \chi^{-1}(\alpha_x) \alpha_\xi).$$

On a trouvé ici une manière de paramétrer une relation canonique réelle à l'aide d'une phase complexe, mais d'une façon plus commode et plus globale que ne le permet, en général la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase réelle.

On introduit la relation canonique complexe associée à la phase:

$$\Phi_{\varepsilon, \mu}(x, y, \alpha) = \Phi_\varepsilon(x, y, \alpha) + i\varepsilon \mu_0 \varphi(\alpha); \mu = \varepsilon \mu_0 \text{ où } \mu_0 \text{ est un petit paramètre.}$$

Le résultat du premier paragraphe est qu'il y a une fonction  $\varphi_\mu(\beta)$  telle que la relation canonique associée à:

$\Psi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\beta) = \Psi_{\varepsilon}(x,y,\beta) + i\varepsilon\mu_0\varphi_{\mu}(\beta)$  où  $\Psi_{\varepsilon}(x,y,\beta) = -\varphi(y,x,\beta) + i\varepsilon\psi(y,x,\beta)$ ;  $\varphi$  et  $\psi$  étant les parties réelles et imaginaires de  $\Phi_{\varepsilon}$ ; inverse la relation associée à  $\Phi_{\varepsilon,\mu}$  au moins pour  $\mathcal{K} = \text{Id}$ . De plus on peut assurer que  $\varphi_{\mu}$  dépend analytiquement de  $(\varepsilon, \mu_0, \beta)$  et que  $\varphi_{\mu}(\beta) = -\varphi(\beta) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

### 1.2. Calcul des opérateurs.

On introduit un grand paramètre  $\lambda$ , on prendra  $\varepsilon = \lambda^{-1+1/s}$   $s > 1$ . De sorte que la partie imaginaire des phases introduites plus haut a été aplatie.

On dit que  $a(x,\lambda)$  est un symbole de degré  $m$  Gevrey  $s$  si:

$$|\text{D}_x^{\alpha} a(x,\lambda)| \leq C A^{|\alpha|} (\alpha!)^m \lambda^{|\alpha|s} \text{ pour tout } \lambda > 1.$$

Soit

$$F = \int a(x,y,\alpha,\lambda) e^{i\lambda\Phi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\alpha)} \lambda^{3n/2} d\alpha;$$

un O.I.F. associé à  $\Phi_{\varepsilon,\mu}$  et à un symbole  $a$  Gevrey  $s$  de degré  $m$ .

Un opérateur pseudo-différentiel s'écrit:

$$P = \int p(x+y/2,\xi,\lambda) e^{i\lambda(x-y)\xi} (\lambda/2\pi)^{n/2} d\xi.$$

$$G = \int b(x,y,\beta,\lambda) e^{i\lambda\Psi_{\varepsilon,\mu}(x,y,\beta)} \lambda^{3n/2} d\beta.$$

Le résultat de ce paragraphe est que:

$$\text{GPF} = \int \sigma(x+y/2,\xi,\lambda) e^{i\lambda(x-y)\xi} (\lambda/2\pi)^{n/2} d\xi.$$

Où  $\sigma$  est la somme d'un symbole Gevrey  $s$  de degré  $m$   $q$  et d'un reste  $r(x,\xi,\lambda)$  satisfaisant à:

$\exists C > 0$  et  $\forall (\alpha,\beta,n) \exists C_{\alpha,\beta,n}$  telle que:

$$|\text{D}_x^{\alpha} \text{D}_{\xi}^{\beta} r(x,\xi,\lambda)| \leq C_{\alpha,\beta,n} \langle x,\xi \rangle^{-n} e^{-1/C\lambda^{1/s}}.$$

On dit alors que  $r$  est à décroissance exponentielle  $1/s$  dans  $\mathcal{S}$ .

On trouve qu'au voisinage de  $\rho_0$

$$a(x,\xi,\lambda,\varepsilon,\mu) = \lambda^m [p(x,\xi) - i\mu dp(x,\xi) \cdot H_{\psi}(x,\xi) - \mu^2/2\nabla^2 p(x,\xi)(H_{\psi}(x,\xi), H_{\psi}(x,\xi))] +$$

$$\mathcal{O}(\mu^2 \varepsilon) + \mathcal{O}(\mu^3)]_+$$

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi) \mathcal{O}(\lambda^{m-1} + \lambda^m \varepsilon \mu) + \lambda^{m-1} p_{m-1}(x, \xi) + \mathcal{O}(\lambda^{m-1} \varepsilon).$$

Avec la relation  $\psi = \varphi \circ \bar{\chi}$ .

On voit apparaître ici la condition de micro-hyperbolicité dans le troisième terme, on voit en comparant  $\mu^2$  et  $\lambda^{-1}$  intervenir l'indice critique  $s=2$ .

La méthode consiste à réduire par une méthode de phase stationnaire l'intégrale donnant  $\sigma$  à partir du noyau de GPF. On a fait ce qu'il fallait pour que le point critique complexe ne soit pas trop loin du réel, en outre il faudra par des changements de contours se ramener à une phase réelle non dégénérée (et pas à  $ix^2$  comme dans la méthode utilisée en  $C^\infty$  ou en analytique), enfin utiliser les extensions presque analytiques que l'on peut construire à l'aide du résultat de Carleson [3], pour obtenir des restes à décroissance exponentielle  $1/s$ .

### 1.3. Estimation d'énergie.

On obtient une estimation d'énergie pour l'opérateur  $Q$  de symbole  $q$ , en calculant  $\text{Im}(Qu, Mu)$ , pour un multiplicateur  $M$  convenablement choisi. Pour le choix de  $M$ , on fait intervenir la discussion géométrique que permettent les hypothèses  $(H_1)_a \dots (H_1)_c$  dans le cas  $s \geq 2$ , si  $s < 2$  on choisira directement

$M$ . Il faut analyser les termes que l'on obtient, utiliser selon les cas les inégalités de Melin ou de Gårding pour discuter du rôle des termes d'ordre inférieur. Nous n'avons pas la place ici de détailler ces arguments.

### 1.4. Fin de la preuve.

On modifie par un argument de "convexification" la fonction  $\psi$  de l'énoncé du théorème. On introduit dans l'estimation d'énergie obtenue plus haut  $G_1 u$  où  $G_1$  est de la même forme que  $G$  mais est une paramétrix à droite de  $F$ . Il

y a ensuite des arguments assez classiques pour contrôler des commutateurs et obtenir la propagation de la régularité Gevrey.

Bibliographie.

- [1] L.Boutet de Monvel-P.Krée.Pseudo-differential operators and Gevrey classes. Ann. Institut Fourier. 17.1.(1967).295-323.
- [2] M.D.Bronstein.The Cauchy problem for hyperbolic operators with variable multiple characteristics.Math. Obsc.41.(1980).83-99.
- [3] L.Carleson.On universal moment problems.Math. Scand.9.(1961).197-206.
- [4] V.Ja.Ivrïi.Wave fronts of solutions of certain hyperbolic pseudo-differential operators.(1) et (2).Trudi Mosk Obs.39.(1979).49-82 et 83-112.
- [5] L.Hörmander.On the Cauchy problem for differential operators with double characteristics.Journal d'Analyse Mathématique.(1977).
- [6] L.Hörmander.Weyl calculus of pseudo-differential operators.Cours d'été à Stanford en 1977.
- [7] B.Lascar-R.Lascar.Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à symboles réels.C. R. Acad. Sc. Paris. t 300.1.n° 12.(1985).389-391.
- [8] R.Lascar.Distributions de Denjoy Carleman. C. R.Acad.Sc.Paris.A.283.(1976).
- [9] A.Melin.Lower bounds for pseudo-differential operators.Arkiv for Matematik.9.1.(1971).117-140.
- [10] A.Melin-J.Sjöstrand.Fourier integral operators with complex phase function.Springer Lecture Notes in Maths.459.121-223.
- [11] Y.Morimoto-K.Taniguchi.Propagation of wave front sets fo solutions of the Cauchy problem for hyperbolic systems in Gevrey classes.Preprint 1984.
- [12] J.Sjöstrand.Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems.Comm. in P.D.E.5.1.(1980).41-94.

- [13] J.Sjöstrand. Analytic singularities and micro-hyperbolic boundary value problems. *Mat. Ann.* 254. (1981). 499-567.
- [14] S.Wakabayashi. Singularities of solutions of hyperbolic Cauchy problem in Gevrey classes. *Proc. Japan. Acad.* 59 Ser. A. (1983). 182-185.