Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Robert

Asymptotique semi-classique pour la densité spectrale locale d'opérateurs de Schrödinger (d'après D. Robert et H. Tamura)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

ASYMPTOTIQUE SEMI-CLASSIQUE POUR LA DENSITE SPECTRALE LOCALE D'OPERATEURS DE SCHRÖDINGER.

(d'après D. ROBERT et H. TAMURA)

par D. ROBERT

Exposé n°IV

19 Novembre 1985

§ 1. NOTIONS DE DENSITE SPECTRALE.

Considérons un opérateur autoadjoint H (non nécessairement borné) opérant sur un espace de Hilbert (complexe) $\mathcal{H}$. Si $]a,b[$ est un intervalle réel tel que spectre $H \cap]a,b[$ est discret (i.e. constitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie) on définit naturellement la densité spectrale de H sur $]a,b[$ comme étant la mesure positive :

(1) $$d\sigma(\lambda) = \sum_j m_j . \delta(\lambda_j - \lambda) \quad \text{où} \quad \{\lambda_j\} = \text{spectre } H \cap]a,b[$$

et m_j est la multiplicité de λ_j.

On peut écrire (1) sous la forme :

(1') $\int f(\lambda) d\sigma(\lambda) = \mathrm{tr}(f(H))$ pour tout $f \in C_c^\circ(]a,b[)$ (espace des fonctions continues à support compact sur $]a,b[$).

Lorsque le spectre de H n'est plus discret sur $[a,b]$ on procède de la manière suivante (Bérézenskii[BE], Guelfand-Vilenkin [G-V]) :

Soit $\{E(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ la résolution spectrale de H. Pour tout intervalle $I = [\alpha,\beta]$ on pose : $E(I) = E(\beta+0) - E(\alpha)$.

On se donne un opérateur positif T, borné sur $\mathcal{H}$ tel que l'opérateur $T.E.([a,b])$ soit de classe Hilbert-Schmidt.

On définit alors une densité spectrale pour H sur $[a,b]$ par :

(2) $$\sigma_T(B) = \mathrm{tr}(T.E(B).T) \ , \ B \text{ borélien de } [a,b] \ .$$

(2) définit une mesure positive finie sur $[a,b]$ qui s'écrit encore :

(2') $$\int f(\lambda) d\sigma_T(\lambda) = \mathrm{tr}(T.f(H).T) \ , \ f \in C([a,b]) \ .$$

La terminologie est justifiée par le théorème de Radon-Nikodym qui permet d'écrire que l'on a :

(3) $$T.E(B).T = \int_B F_T(\lambda) . d\sigma_T(\lambda)$$

où $\lambda \to F_T(\lambda)$ est une application borélienne à valeurs opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. On peut alors retrouver H à partir de σ_T et F_T si T est inversible (T^{-1} sera en général non borné).

Exemple élémentaire :

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, $H = -\Delta$, opérateur de Laplace de domaine l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^n)$. Ce qui précède s'applique pour $[a,b] \subset]0,+\infty[$ et T l'opérateur de multiplication par $(1+|x|^2)^{s/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, pour $s > n/2$ ∎

Dans la suite on supposera toujours que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Suivant R. Lavine [La] on localise la notion de densité spectrale de la manière suivante : Supposons qu'il existe un entier k tel que $W.(H+i)^{-k}$ soit de classe Hilbert-Schmidt pour tout $W \in C_c^\circ(\mathbb{R}^n)$. On définit alors la densité spectrale locale comme étant la mesure positive $d\sigma(\lambda,x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\int f(\lambda).W^2(x)d\sigma(\lambda,x) = \mathrm{tr}(W.f(H).W) \tag{4}$$

pour toute $f \in C_c^\circ(\mathbb{R})$, $W \in C_c^\circ(\mathbb{R}^n)$.

<u>Exemple de base</u> :

Soit H la réalisation autoadjointe d'un opérateur différentiel d'ordre 2m sur $\mathbb{R}^n$, uniformément elliptique, à coefficients C^∞ , bornés. Alors $(H+i)^{-k} : L^2(\mathbb{R}^n) \to H^{2km}(\mathbb{R}^n)$. D'où $W.(H+i)^{-k}$ est Hilbert-Schmidt pour $k > \frac{n}{4m}$.

<u>Interprétation formelle de la mesure</u> $d\sigma(\lambda,x)$:

Désignons par $e(\lambda,x,y)$ le noyau du projecteur spectral $E(\lambda)$. Un calcul formel sur (4) donne : $d\sigma(\lambda,x) = \frac{\partial e}{\partial\lambda}(\lambda,x,x).d\lambda.dx$.

<u>Lien avec la fonction spectrale de perturbation</u> :

Considérons l'opérateur de Schrödinger :

$H(h) = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$, $h > 0$, où le potentiel V vérifie la condition :

$(V)_\rho$ V est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout multi-indice α on a :

$$\partial_x^\alpha V(x) = O(|x|^{-\rho-|\alpha|}) \quad , \text{ où } \rho \in \mathbb{R} .$$

On pose : $H_o(h) = -\frac{h^2}{2}.\Delta$.

Il résulte de Birman-Krein [B-K] que pour toute $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $f(H(h))-f(H_o(h))$ est de classe trace et que $f \mapsto tr(f(H(h))-f(H_o(h)))$ est une mesure borélienne

(5) $\int f(\lambda)ds(\lambda,h) = tr(f(H(h))-f(H_o h)))$, $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$.

La <u>fonction spectrale de perturbation</u> (appelée encore <u>phase de diffusion</u>) est par définition la fonction de répartition $s(\lambda,h)$ de $ds(\lambda,h)$ (noter que $supp(ds(\lambda\ ,h))$ est limité "à gauche").

On a une relation remarquable avec la densité spectrale locale :

<u>Proposition 1</u> : Sur $]0,+\infty[$ on a :

(6) $$\boxed{ds(\lambda,h) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}_x^n} (2V(x)+x.\nabla V(x)).d\sigma(\lambda,x,h)}$$

où $d\sigma(\lambda,x,h)$ désigne la densité spectrale locale relative à $H(h)$.

<u>Preuve</u> : Nous ne donnerons ici qu'une preuve formelle de (6). La preuve rigoureuse est plus délicate à cause des problèmes de domaine des opérateurs en jeu.

Pour simplifier l'écriture on suppose que $h = 1$.

Introduisons l'opérateur : $A = \frac{1}{2i}(x.\nabla+\nabla.x)$, générateur infinitésimal du groupe unitaire des dilatations dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (i.e. : $\psi \mapsto e^{n\theta/2}.\psi(e^\theta.x), \theta \in \mathbb{R}$) $[.,.]$ désignant le commutateur de deux opérateurs, on a les égalités :

$$i[H_o\ ,\ A] = 2.H_o$$
$$i[A\ ,\ V\ ] = x.\nabla V = i[A,H] + 2H_o$$

Il en résulte, grâce à (5), que (6) équivaut à

(7) $$tr([A,H].f(H) - [A,H_o].f(H_o)) = 0$$

pour tout $f \in C_o^\infty(]0,+\infty[)$.

A supposer que cela ait un sens, on commence par vérifier (7) pour la famille de fonctions : $f_\mu(\lambda) = (\lambda+\mu)^{-1}$, $\mu > 0$ (ou encore supposer que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est de dimension finie !).

On a : $\frac{d}{d\mu}[A,H]\,(H+\mu)^{-1} = -\,[A,H]\,(H+\mu)^{-2}$

d'où : $\frac{d}{d\mu}\,\mathrm{tr}([A,H](H+\mu)^{-1}) = -\,\mathrm{tr}(H+\mu)^{-1}[A,H](H+\mu)^{-1}$
$= \mathrm{tr}\,[A,(H+\mu)^{-1}] = 0$

d'autre part on a : $\lim_{\mu\to+\infty} \mathrm{tr}([A,H](H+\mu)^{-1}) = 0$).
On en déduit facilement (7) par un argument de densité.
Nous nous proposons ici de donner des résultats sur la limite semi-classique (i.e. $h \searrow 0$) des mesures $d\sigma(\lambda,x,h)$ et $ds(\lambda,h)$.

§ 2. ASYMPTOTIQUES FAIBLES :

Rappelons d'abord que sous des conditions assez faibles sur V (continu, borné inférieurement sur $\mathbb{R}^n$) R. Lavine [La] , B. Simon $[SI]_1$ ont établi :

Proposition 2 : $\lim_{h\searrow 0} h^n.d\sigma(\lambda,x,h) = d\sigma_{cl}(\lambda,x)$ au sens de la convergence vague des mesures de Radon sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ où $d\sigma_{cl}(\lambda,x) = [(2\pi)^{-n}\int\delta(p(x,\xi)-\lambda)d\xi]dx\,d\lambda$
avec $p(x,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + V(x)$

Cette proposition signifie que pour tout $W \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n_x)$, $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{h\to o} h^n.\mathrm{tr}(W(x).f(H(h))) = (2\pi)^{-n}.\int f(p(x,\xi)).W(x)dx\,d\xi\ .$$

Sous l'hypothèse $(V)_\rho$, $\rho > 0$, nous avons le résultat plus précis suivant :

Proposition 3 : Soit $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$.

i) Pour tout $h > 0$, $f(H(h))$ a un noyau C^∞ sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$

ii) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$[f(H(h))](x,x) = \sum_{j=0}^{N} h^{2j-N}.K_j(x) + H^{2N+2-n}.r_N(x,h)$$

avec $r_N \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times]0,1])$ et

$$K_j(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{k=2}^{3j} \int P_{2j,k}(p^{(\beta)}_{(\alpha)}).\ f^{(k)}(p)d\xi \quad , \ j \geqslant 1$$

$$K_o(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(p(x,\xi))d\xi \quad (p(x,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + V(x))$$

$P_{2j,k}$ étant des polynômes universels de $p_{(\alpha)}^{(\beta)} = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p$.

Le principe de la preuve de la Proposition 3 utilise la méthode exposée dans [H-R] pour le calcul fonctionnel.

Corollaire 4 : Sous l'hypothèse (V_ρ), $\rho > 0$, la densité spectrale locale $d\sigma(\lambda,x,h)$ admet dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}_x^n)$ le développement asymptotique complet, pour $h \downarrow 0$:

$$d\sigma(\lambda,x,h) \sim \sum_{j=o}^{\infty} h^{2j-n}.T_{2j}(\lambda,x)$$

où : $T_o(x,\lambda) = (2\pi)^{-n}. \int \delta(p(x,\xi)-\lambda)d\xi$

$j \geqslant 1, T_{2j}(x,\lambda) = (2\pi)^{-n}. \sum_{k=2}^{3j} (-1)^k. \int P_{2j,k}(p_{(\alpha)}^{(\beta)})\delta^{(k)}(p(x,\xi)-\lambda)d\xi$

Remarques 5 :

(i) T_{2j} est C^∞ en λ (à valeurs distributions en x) sur $\mathbb{R} \setminus C(V)$ où $C(V)$ est l'ensemble des valeurs critiques de V i.e. :

$$C(V) = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \exists\, x_o \in \mathbb{R}^n , V(x_o) = \mu \text{ et } \nabla V(x_o) = 0\} .$$

(ii) Pour tout $\varepsilon_o > 0$ il existe $R_o > 0$ tel que

$$T_{2j} \in C^\infty(\{x, |x| > R_o\} \times [\varepsilon_o , +\infty[)$$

Il suffit par exemple de choisir R_o de sorte que

$$|x| > R_o \Rightarrow |V(x)| < \varepsilon_o/2 .$$

(iii) Nous verrons plus loin que (V_ρ) implique que $e(\lambda,x,y,h)$ est C^∞ en λ,x,y sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n$ par conséquent le corollaire 4 donne un développement au sens des distributions de $\frac{\partial}{\partial\lambda} e(\lambda,x,x;h)$ lorsque $h \downarrow 0$.

Corollaire 5 : On suppose ici que (V_ρ) est satisfaite pour $\rho > n$. Soit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty$ non valeurs critiques de V . Alors la fonction spectrale de perturbation vérifie :

$$\lim_{h \downarrow 0} h^n \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ds(\mu,h)\right) = (2\pi)^{-n}.\left\{\int\left(\int_{\lambda_1 \leqslant p(x,\xi) \leqslant \lambda_2} d\xi - \int_{\lambda_1 \leqslant p_o(\xi) \leqslant \lambda_2} d\xi\right)dx\right\}$$

où $p_o(\xi) = \dfrac{|\xi|^2}{2}$

Esquisse de preuve : On régularise la fonction indicatrice de $[\lambda_1,\lambda_2]$ et on utilise le corollaire 4 (en testant sur les fonctions régularisées), ainsi que les formules de représentation (5) et (6).

§ 3. LE RESULTAT PRINCIPAL : ASYMPTOTIQUE FORTE

Théorème 6 :

i) Sous l'hypothèse (V_ρ), $\rho > 0$, la densité spectrale locale de $H(h)$, $d\sigma(\lambda,x,h)$ est C^∞ sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n_x$. On a en particulier : $d\sigma(\lambda,x,h) = \frac{\partial e}{\partial\lambda}(\lambda,x,x,h)d\lambda dx$.

ii) Supposons $\rho > \frac{n+1}{2}$ ($\rho > 0$ devrait suffire !).

Soient W vérifiant (V_ν), $\nu > n$ et $\lambda > 0$ un niveau d'énergie ne possédant pas de trajectoire piégée (voir définition plus loin). On a alors le développement asymptotique complet suivant, pour $h \downarrow 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x)\frac{\partial e}{\partial\lambda}(\lambda,x,x;h)dx \sim \sum_{j=o}^{+\infty} h^{2j-n}.F_{2j}(\lambda)$$

où $F_{2j}(\lambda) = \int T_{2j}(\lambda,x).W(x)dx$.

Corollaire 7 : Sous l'hypothèse précédente pour $\lambda > 0$ on a :

$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda,h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^{2j-n}.\gamma_j(\lambda)$ (au sens des séries asymptotiques en h) γ_j étant C^∞ au voisinage de λ.

(*) Définition : Soit $(y,\eta) \mapsto (x(t,y,\eta), \xi(t,y,\eta))$ le flot hamiltonien associé à $p(x,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + V(x)$. On dit qu'il n'y a pas de trajectoire piégée sur le niveau d'énergie $\lambda \in \mathbb{R}$ si pour tout $R > 0$ il existe $T(R) > 0$ tel que :

$$|y| < R\ ,\ p(y,\eta) = \lambda\ ,\ |t| > T(R) \Rightarrow |x(t,y,\eta)| > R$$

Remarques 8 :

(i) Dans un travail précédent ($[R\text{-}T]_1$) nous avions établi une asymptotique du type du Corollaire 7 pour des potentiels $V \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n_x)$. C'est en partie grâce à la formule (6) qu'on a pu étendre ce résultat aux potentiels vérifiant (V_ρ), $\rho > n$.

(ii) Pour la preuve du théorème 6 nous renvoyons le lecteur à $[R.T]_2$.

De la démonstration du théorème 6 on peut déduire l'estimation suivante :

Théorème 6' : Il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout entier N il existe $C_N > 0$ et pour tout $s > n$ il existe $C_{s,N} > 0$ tels que :

$$\int |W(x).\frac{\partial}{\partial\lambda} e(\lambda,x,x,h)|dx \leqslant h^{-n}[C_N\int |W(x)|dx + C_{s,N}.h.^N \operatorname{Sup}|x|^s.|W(x)|$$

pour tout $W \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{Supp} W \subset \{x \in \mathbb{R}^n , |x| \geqslant R_1\}$

Question ouverte : Peut-on prendre $C_{s,N} = 0$ dans le théorème 6' ? Cela reviendrait à établir une estimation uniforme pour $\frac{\partial}{\partial\lambda} e(\lambda,x,x,h)$ en dehors d'un borné de $\mathbb{R}^n$. Sur tout borné de $\mathbb{R}^n$ il y a un résultat pour $h = 1$ et $\lambda \to +\infty$ (Popov-Schubin [P-S])

§ 4. LIENS AVEC LA THEORIE DE LA DIFFUSION

On peut déduire du théorème 6' une estimation de la section efficace de diffusion moyenne à l'énergie $\lambda > 0$, notée : $\sigma_{at}(\lambda,h)$. Pour définir cette quantité nous devons faire quelques rappels sur la théorie de la diffusion. ([R.T] §1 pour une présentation rapide, [R-S] pour les détails). On désigne par $S(\lambda,h)$ la matrice de diffusion à l'énergie λ pour le système $(H(h), H_o(h))$; $\lambda > 0$, $h > 0$. Rappelons que $S(\lambda,h)$ est un opérateur unitaire de $L^2(S^{n-1})$. De plus si $\rho > \frac{n+1}{2}$ on a : $S(\lambda,h) = Id + T(\lambda,h)$ où Id est l'opérateur identité et $T(\lambda,h)$ est un opérateur Hilbert-Schmidt. Des considérations physiques (cf.A-J-S) permettent de définir raisonnablement la quantité $\sigma_{at}(\lambda,h)$ comme étant la section efficace moyenne de diffusion, par :

$$\sigma_{at}(\lambda,h) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} . \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1} .h^{n-1}.\| T(\lambda,h)\|^2_{HS}$$

où σ_{n-1} est l'aire de la sphère unité.

Théorème 7 : Soient V vérifiant (V_ρ) avec $\rho > \frac{n+1}{2}$ et $\lambda > 0$ un niveau d'énergie sans trajectoire piégée. On a alors :

$$\sigma_{at}(\lambda,h) = O(h^{-(n-1)/\rho-1}) , h \searrow 0$$

Remarque 8 : - Enss-Simon ([E-S]) ont obtenu une estimation de ce type en faisant une moyenne en λ

- Yajima ([Ya]), sous certaines hypothèses, a montré que :

$$\lim_{h \searrow 0} h^{(n-1)/\rho-1} \left(\int_a^b \sigma_{at}(\lambda,h)d\lambda\right) > 0 .$$

Revenons maintenant au cas où $\rho > n$.

Dans ce cas $T(\lambda,h)$ est un opérateur de classe trace. On définit alors la phase de diffusion (ou encore le décalage total de phase) $\theta(\lambda,h)$ par :

(8) $$\det S(\lambda,h) = e^{2i\pi\theta(\lambda,h)}$$

On montre de plus que : $\lambda \mapsto T(\lambda,h)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans l'espace des opérateurs de classe trace sur $L^2(S^{n-1})$.

D'où

(9) $$\frac{d}{d\lambda}\theta(\lambda,h) = -\frac{1}{2i\pi}\,\mathrm{tr}\left(S(\lambda,h).\frac{dS^*}{d\lambda}(\lambda,h)\right)$$

Il résulte de la théorie de Birman-Krein que l'on a l'égalité remarquable :

(10) $$\frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda,h) = \frac{ds}{d\lambda}(\lambda,h) \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0 .$$

où $s(.,h)$ est la fonction spectrale de perturbation pour $(H(h), H_o(h))$.

On peut alors interpréter $\frac{ds}{d\lambda}(\lambda,h)$ comme un temps de retard moyen. Pour voir cela rappelons la définition du temps de retard en mécanique quantique.

On considère les groupes unitaires :

$$U(t) = e^{-itH} \quad , \quad U_o(t) = e^{-it H_o} \qquad (h = 1)$$

Les opérateurs d'ondes $\Omega_\pm$ sont définis par les propriétés :

$$\lim_{t\to\mp\infty} \|U(t)\Omega_\pm.\psi - U_o(t).\psi\| = 0 \qquad \text{pour tout } \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

On a de plus : $\mathrm{Im}\Omega_\pm = \mathcal{H}_{ac}(H)$, sous espace absolument continu de H .

(C'est la propriété de complétude - cf[R-S]). L'opérateur de diffusion est alors bien défini par :

$$S = \Omega_-^* . \Omega_+ \quad \text{(opérateur unitaire de } L^2(\mathbb{R}^n))$$

Rappelons que dans la représentation spectrale de H_o : $L^2(]0,+\infty[\ , L^2(S^{n-1}))$, S agit de la manière suivante :

$$(Sf)(\lambda,\omega) = (S(\lambda).f(\lambda,.))(\omega), \qquad \lambda > 0 \ , \ \omega \in S^{n-1}$$

où $S(\lambda)$ est la matrice de diffusion.
Pour un état ψ "assez régulier" on définit le temps de retard par la formule :

$$(11) \quad (\Delta T.\psi,\psi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\| P_R \circ U(t).\Omega_+ \|^2 - \| P_R . U_o(t).\psi\|^2)dt$$

$$\text{où} \quad P_R\varphi(x) = (1_{\{|x|<R\}}.\varphi)(x)$$

Il résulte de [J.e] que (11) définit un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à domaine dense, autoadjoint, commutant avec $U_o(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme pour l'opérateur de diffusion, on en déduit que ΔT est décomposable dans la représentation spectrale de H_o :

$$(\Delta T)f(\lambda\omega) = (\Delta T(\lambda).f(\lambda,.))(\omega) \quad (\lambda > 0 \ , \omega \in S^{n-1})$$

où $\Delta T(\lambda)$ est un opérateur borné sur $L^2(S^{n-1})$.
On a de plus la relation suivante :

$$(12) \qquad \Delta T(\lambda) = iS(\lambda).\frac{dS^*}{d\lambda}(\lambda)(\text{Eisenbud - Wigner})$$

Pour une étude mathématique détaillée des relations (11) et (12) nous renvoyons le lecteur à [Je] .
Il résulte de (9) et (12) que l'on a :

$$\mathrm{tr}(\Delta T(\lambda)) = - 2\pi.\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) \ .$$

On peut donc interpréter la quantité $-2\pi \frac{ds}{d\lambda}(\lambda)$ comme le temps de retard moyen à l'énergie λ du système quantique (H,H_o).

D'autre part il existe également une théorie de la diffusion pour le système classique (p,p_o) , $p_o(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}$, $p(x,\xi) = p_o(\xi) + V(x)$. On peut relier la constante $\gamma_o(\lambda)$ du corollaire 7 au temps de retard moyen du système classique (pour la diffusion classique voir [SI] , [HU],) ∎

BIBLIOGRAPHIE :

[A-J-S] WO. Amrein - J.M. Jauch - K.B. Sinha : Scattering theory in Quantum mechanics. (1977). WA Benjamin.Inc

[Be] J.M. Berezenskü : Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators. Translation AMS (1968)

[B-K] MS Birman - MG. Krein : Dolk Akad Nauk SSSR 144 (1962) 475-478 (en Russe)

[E-W] L. Eisenbud - E.P. Wigner : Phys Rev 72 - 29 - (1947)

[E.S] V. Enss - B. Simon : Comm Math Phys 76, 177-209 (1980)

[G-V] I.M. Guelfand - N.Y. Vilenkin : Les distributions tome 4 Traduction Dunod (1967).

[H.R] B. Helffer - D. Robert : J. of funct. Anal. Vol 53 N° 3 246-268. (1983)

[Hu] W. Hunziker : Comm Math. Phys 8, 282-299 (1968)

[Je] A. Jensen : Commun. Math. Phys. 82 435-456 (1981).

[La] R. Lavine : In Quantum Mechanics in Math, Chemistry and Physics. Ed : K.E Gustafson WP. Reinhardt. Plenum Press (1981).

[P-S] GS. Popov - M.A. Schubin : Funk. Anal. Pril. Vol 17 N°3. 37-45 (1983) (en Russe).

[R-S] M. Reed - B. Simon : Scattering Theory (III) Academic Press (1979)

$[R\text{-}T]_1$ D. Robert - H. Tamura : Comm. in PDE 9 (10) 1017-1058 (1984). Exposé N°V Séminaire Goulaouic Meyer Schwartz (1983).

$[R\text{-}T]_2$ D. Robert - H. Tamura : Article détaillé en préparation

[Si]$_1$ B. Simon : Bull. AMS 7 (3). 447-527 (1982).

[Si]$_2$ B. Simon : Comm. Math Phys 23, 37-48 (1971).

[Ya] K. Yajima : in "Schrödinger Operators" . Lecture Notes in Math N°1159.

****