Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B.-W. Schulze

Opérateurs pseudo-différentiels et asymptotique sur des variétés à singularités

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 3, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET ASYMPTOTIQUE SUR DES VARIETES A SINGULARITES

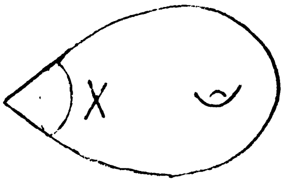
par B.-W. SCHULZE

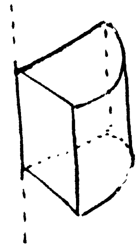
Exposé n°III

19 Novembre 1985

§ 1. INTRODUCTION.

Soit M une variété à singularités Y de type du cône ou du dièdre, Y étant les points exceptionnels, où $M \setminus Y$ est une variété de classe C^∞ non compacte.

$Y = \{y_o\}$ 

$Y = \mathbb{R}^k$ 

On considère alors le problème suivant :

(i) Construire une algèbre $A(M)$ d'opérateurs pseudo-différentiels sur $M \setminus Y$ dégénérés sur Y de façon naturelle avec un calcul symbolique complet et continuité des applications $A : H^s(M) \to H^{s-\mu}(M)$, $A \in A(M)$, $\mu = \text{ord } A$, où $H^s(M)$, $s \in \mathbb{R}$, est un système d'espaces analogues aux espaces de Sobolev,

(ii) Etudier des notions convenables d'ellipticité et construire des paramétrices, basées sur le calcul symbolique, et la régularité elliptique.

Cette note contient une construction pour des singularités coniques et des dièdres. La méthode pour le cône est motivée par la question de détermination de l'asymptotique des solutions d'équations elliptiques au voisinage d'une arête , qui est de la forme

$$(1.1) \qquad u(t,x,y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_j(y)} \zeta_{jk}(x,y)\, t^{-p_j(y)} \log^k t$$

quand t tend vers zéro, $y \in Y$ = arête (localement $\simeq \mathbb{R}^k$), $x \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$. Ici la variété est localement identifiée avec $Y \times K$, K un cône, $K \simeq \mathbb{R}_+ \times X$, X, la base du cône, étant une variété compacte de classe C^∞ .

La démonstration de (1.1) en général est difficile à cause de bifurcation des exposants $p_j(y) \in \mathbb{C}$. L'asymptotique (1.1) était donnée dans l'article [R3]. Les opérateurs sont interprétés comme opérateurs pseudo-différentiels avec des symboles à valeurs dans $A(\mathbb{R}_+ \times X)$, où $A(\mathbb{R}_+ \times X)$ est une algèbre d'opérateurs de Mellin avec asymptotique continue, définie par des suites de fonctionnelles analytiques dans $\mathbb{C}$, et par des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}_+ \times X$ strictement dégénérés en $t = 0$, cf. [S1].

Une sous-algèbre plus particulière avec asymptotique discrète était analysée par Rempel et l'auteur dans [R4],[R6]. Les asymptotiques continue et discrète sont très naturelles aussi pour les solutions de problèmes aux limites elliptiques mixtes ou d'équations qui ne vérifient pas la condition de transmission par rapport au bord. Un calcul d'opérateurs pseudo-différentiels et de Mellin dans ce cas était élaboré dans la monographie [R6]. Si l'opérateur vérifie la condition de transmission (cf.[B1]), alors l'asymptotique discrète est le développement de Taylor au voisinage du bord par rapport à la variable normale, et l'asymptotique n'est pas spécifique de l'opérateur. (L'algèbre de Boutet de Monvel [B1] est une sous-algèbre d'opérateurs ne possédant pas forcément la propriété de transmission). En général, la situation est complètement différente : la forme des développements asymptotiques dépend de l'opérateur. Les pairs (p_j, m_j+1) correspondent aux zéros (avec multiplicités) du symbole principal de Mellin, qui est une partie du symbole frontière dépendant de y. Par conséquent, (en $\dim Y \geqslant 1$) il est naturel de s'attendre à ce que les zéros dépendent du paramètre y, où y est le variable d'arête Y. Le problème de la bifurcation rend plus difficile la détermination d'une classe d'opérateurs régularisants, que l'on appelle opérateurs de Green. On désigne par $\mathcal{A}_G(M)$ l'espace des opérateurs de Green G dans $\mathcal{A}(M)$.

Pour le cône M, par exemple, ils sont caractérisés par la propriété que $G\mathcal{H}^s(M)$ et $G^*\mathcal{H}^s(M)$ est contenu dans l'espace des fonctions de classe $C^\infty(M\setminus Y)$ avec asymptotique au voisinage de Y, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Le schéma de preuve de la régularité elliptique est classique : En effet, si $A \in \mathcal{A}(M)$ est elliptique et $P \in \mathcal{A}(M)$ une paramétrix obtenue par inversion des symboles complets, alors $AP-I$, $PA-I \in \mathcal{A}_G(M)$. En particulier, pour $Au = f$, $u \in \mathcal{H}^{-\infty}(M)$ et $f \in C^\infty$ avec asymptotique, on obtient $PAu = Pf$, où Pf est C^∞ avec asymptotique ainsi que $(PA-I)u$, par conséquent la solution u est de cette sorte. De plus, on obtient la même chose dans des classes de Sobolev avec asymptotique.

Le cas des dièdres est plus complexe. Pour construire une théorie elliptique satisfaisante, on introduit des conditions supplémentaires de type de traces et potentiels par rapport à Y, comme dans l'algèbre de Boutet de Monvel.

Remarquons qu'il existe de nombreux travaux au sujet des opérateurs ou des problèmes aux limites sur un cône ou un dièdre, cf. Kondrat'ev [K1], Maz'ja, Plamenevskij [M1],[M2],[M3], Plamenevskij [P1], Baouendi, Sjöstrand [B2], Nikiščin [N1], Grisvard [G1],[G2], Cheeger [C1], Pham The Lai [P2],[P3], Costabel [C2], Dauge [D1], Melrose, Mendoza [M2], Rempel, Schulze [R3],[R4], [R5], Bolley, Dauge, Camus [B3].
La plupart est consacrée à la question de régularité des solutions. Une certaine notion de symbole principal de Mellin et d'algèbres d'opérateurs était étudiée dans [P1] et sur la demi-droite dans [L1]. L'article [M5] basé sur [M4] utilise des symboles complets. La structure du calcul de [M4],[M5] est complètement différente de [R3],[R4],[R5]. La théorie de [R3],... emploie des symboles de Mellin complets à valeurs dans $L^{\infty}_{cl}(X)$ et des développements asymptotiques par rapport à l'ordre conormal, qui tend vers $-\infty$.

Acknowledgement : The author is greatly indepted to M. Dauge (Univ. Nantes) and A. Grigis (Ecole Polytechnique) for helping to write this article in french.

§ 2. <u>CONSTRUCTIONS SUR LA DEMI-DROITE</u> : Si $\dim X = 0$ le cône infini est la demi-droite $\mathbb{R}_+$. Dans le cas de $\mathbb{R}_+$ on a déjà certains phénomènes généraux. On demande que l'algèbre $A(\mathbb{R}_+)$ contienne la classe des opérateurs différentiels

$$A(t,\partial_t) = \sum_{k=0}^{\mu} a_k(t)\left(-t\frac{d}{dt}\right)^k , \tag{2.1}$$

où $a_k \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On étudie l'équation $Au = f$ seulement au voisinage de l'origine. Alors si A est elliptique au sens $a_{\mu}(t) \neq 0$ pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et $\sigma^{o}_{M}(A)(z) := \sum_{k=0}^{\mu} a_k(0)z^k \neq 0$ pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, on peut exprimer une paramétrix P de A sous une forme, que nous allons introduire.
Pour cela, soit M la transformation de Mellin $Mu(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, u(t)\,dt$, qui est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\operatorname{Re} z = \frac{1}{2})$ et M^{-1} son inverse. On pose

$$op_M^{-j}(h,\gamma)\, u(t) = t^{j-\gamma} M^{-1} h(z+\gamma)\, t^{\gamma}\, u(t) , \tag{2.2}$$

$j \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq \gamma \leq j$, $h(z)$ étant une fonction holomorphe au voisinage de $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}+\gamma$
Soit $\omega \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ une fonction de troncature qui vaut 1 pour $t < 1$. Alors il

existe une suite de fonctions $h_j(z)$ méromorphes et une suite de nombres réels γ_j , $0 \leq \gamma_j \leq j$, $\gamma_j \to \infty$, $j - \gamma_j \to \infty$ quand $j \to \infty$, telles que la paramétrix P puisse s'écrire sous la forme

$$(2.3) \qquad P = \sum_{j=o}^{\infty} \omega(c_j t)\, op_M^{-j}(h_j, \gamma_j)\, \omega(c_j t) + K + G \quad ,$$

où c_j tend vers l'infini assez rapidement quand $j \to \infty$, K est un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}_+$ strictement dégénéré à $t=0$ (i.e. indéfiniment plat en $t=0$), et G est un opérateur de Green, c'est-à-dire un opérateur tel que G et G^* soient continus $L^2_{(b)}(\mathbb{R}_+) \to C^\infty_P(\mathbb{R}_+)$, où $L^2_{(b)}(\mathbb{R}_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+) :$ supp u borné $\}$ et $C^\infty_P(\mathbb{R}_+)$ est défini comme la limite inductive d'espaces $C^\infty_P(\mathbb{R}_+)$ pour toutes suites $P = \{(p_j, m_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$, $p_j \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p_j < \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} p_j \to -\infty$ pour $j \to \infty$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, et

$$C^\infty_P(\mathbb{R}_+) = \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}_+) : u(t) \sim \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{k=o}^{m_j} \zeta_{jk}\, t^{-p_j} \log^k t \quad \text{pour} \quad t \to 0$$

avec certains coefficients $\zeta_{jk} \}$.

Ce résultat est un cas particulier de [R4]. La paramétrix P est ainsi un opérateur pseudo-différentiel classique sur $\mathbb{R}_+$ avec un symbole $\sigma_\psi(P)(t,\tau)$ complet qui est singulier en $t=0$.

1. <u>Définition</u> : La fonction

$$\sigma_M^{-j}(P)(z) := h_j(z)$$

est le symbole de Mellin d'ordre conormal -j de P .

Utilisant le développement de Taylor $a_k(t) \sim \sum_{j=o}^{\infty} t^j a_{k,j}$ pour $t \to 0$, on peut exprimer l'opérateur A sous une forme analogue à (2.3), où $\sigma_M^{-j}(A)(z) = \sum_{k=o}^{\mu} a_{k,j} z^k$, $j = 0,1,2,\ldots$.

Les opérateurs de cette sorte constituent l'algèbre $A(\mathbb{R}_+)$. De plus, on a comme analogue de la formule de Leibniz de composition le

2. Théorème : Pour $A,B \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+)$ on a

(2.4) $$\sigma_M^{-\ell}(AB)(z) = \sum_{j+k=\ell} \sigma_M^{-j}(A)(z-k)\,\sigma_M^{-k}(B)(z) \quad .$$

Cette formule permet de déterminer les fonctions $h_j(z)$ dans (2.3) à partir du symbole complet de Mellin de A .

§ 3. ESPACES DE SOBOLEV AVEC ASYMPTOTIQUE CONTINUE ET OPERATEURS DE GREEN :

Soit K un cône infini identifié à $\mathbb{R}_+ \times X$, où X est une variété compacte sans bord de classe C^∞ . Pour obtenir un calcul convenable, il est nécessaire de se donner une classe d'espaces et la notion d'asymptotique. Tout d'abord, pour tout s réel fixé, on cosidère un opérateur pseudo-différentiel classique $\Lambda^s_{(z)}$ sur X avec un symbole principal $(|\xi|^2 + |z|^2)^{s/2}$ dépendant au paramètre $z \in \mathbb{C}$, ξ étant la variable duale sur X , tel que les applications $\Lambda^s_{(z)} : H^t(X) \to H^{t-s}(X)$ soient inversibles pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $H^t(X)$ étant l'espace de Sobolev classique sur X . Alors on pose

(3.1) $$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+ \times X)} = \left\{ \int_{\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}} \|\Lambda^s_{(z)}(Mu)(z,.)\|^2_{L^2(X)}\, d|z| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

pour $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}_+ \times X)$, et l'espace $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+ \times X)$, $s \in \mathbb{R}$, est défini par fermeture de $C_o^\infty(\mathbb{R}_+ \times X)$ par rapport à (3.1).

De plus, on pose $\mathcal{H}^{s,\gamma}(\mathbb{R}_+ \times X) = t^{-\gamma}\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+ \times X)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant $\mathcal{W}_o$ l'ensemble de tous les sous-ensembles $V \subset \mathbb{C}$ possédant les propriétés suivantes

(i) $V \in \mathcal{W}_o \Rightarrow V \cap \{\mathrm{Re}\ z = \frac{1}{2}\} = \emptyset$,

(ii) $V = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$, où V_j est compact, $V_j \subset \{z : \frac{1}{2} - \delta_{j+1} < \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2} - \delta_j\}$

pour certain $\delta_j \in \mathbb{R}$, $\delta_o = 0$, $\delta_j \to \pm\infty$ pour $j \to \pm\infty$,

(iii) V_j est de complémentaire connexe (autrement dit, sans cavités) et pour tous $\varepsilon > 0$, les ensembles $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z,V) = \varepsilon\}$ sont réguliers par morceaux, $j \in \mathbb{Z}$.

Par $\mathcal{H}_V^s(\mathbb{R}_+ \times X)$ on désigne l'espace défini par sa transformée de Mellin $M\mathcal{H}_V^s(\mathbb{R}_+ \times X)$, qui est l'espace des fonctions $\tilde{u}(z,x) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\setminus V, H^s(X))$ (c'est-à-dire $\tilde{u}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus V$ à valeurs dans $H^s(X)$) avec

$$\left\{ \int_{\mathrm{Re}\, z=\rho} \|\chi(z)\, \Lambda^s_{(z)}\, \tilde{u}(z,x)\|^2_{L^2(X)}\, d|z| \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{3.2}$$

pour tout $\rho \in \mathbb{R}$ et tout $\chi \in C^\infty(\mathbb{C})$, $|\chi| \leqslant 1$, $\chi = 0$ au voisinage de V, et

$$< \zeta_j[u], h > := \int_{C_j} \tilde{u}(z,x)\, h(z)\, dz \in C^\infty(X) \tag{3.3}$$

pour tout $h \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, C_j étant une courbe lisse dans $\{\frac{1}{2} - \delta_{j+1} < \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2} - \delta_j\}$ entourant V_j, $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$.

On considère l'image réciproque $\mathcal{H}_V^s(\mathbb{R}_+ \times X)$ de $M\,\mathcal{H}_V^s(\mathbb{R}_+ \times X)$ par rapport à la transformation de Mellin comme espace de Sobolev avec asymptotique de type V. La fonctionnelle analytique $\zeta_j[u]$ (à valeurs dans $C^\infty(X)$) est la "quantité asymptotique" de u sur V_j pour $t \to 0$ si $j \geqslant 0$ et $t \to \infty$ si $j < 0$. L'espace $\mathcal{H}_V^s(\mathbb{R}_+ \times X)$ muni d'une topologie naturelle est un espace de Fréchet, et $\mathcal{H}_V^\infty(\mathbb{R}_+ \times X)$ est nucléaire. $\mathcal{H}_V^s(\mathbb{R}_+ \times X)$ donne une notion d'asymptotique continue au sens que

$$u(t,x) - \sum_{j=o}^{N} < \zeta_j[u], t^{-z} > \omega(t) - \sum_{j=-1}^{-N'} < \zeta_j[u], t^{-z} > (1 - \omega(t))$$

est plat en $t = o$ d'ordre δ_{N+1} et en $t = \infty$ d'ordre $-\delta_{-N}$.

La notion de platitude est définie au sens de l'holomorphie de la tranformée de Mellin dans une bande parallèle à la droite imaginaire. On retrouve une notion d'asymptotique discrète plus classique lorsque $V_j = \{p_j\}$,

$$< \zeta_j[u], t^{-z} > = \sum_{k=o}^{m_j} \zeta_{jk}(x)\, t^{-p_j} \log^k t \quad ,$$

$\zeta_{jk} \in C^\infty(X)$, $p_j \in \mathbb{C}$ (cf.[R4]), et dans ce cas, on peut introduire la classe des sous-espaces $H^s_R(\mathbb{R}_+\times X)$, où R est une suite de triplets (p_j, m_j, L_j) avec L_j sous-espace de dimension finie de $C^\infty(X)$, et $\zeta_{jk} \in L_j$, $0 \leqslant k \leqslant m_j$. On considère R comme type de singularité discrète. Soit $R_o(X)$ l'ensemble de tous les R de cette sorte.

On considère aussi la somme des espaces

$$(3.4)\ H^s_{V^1}(\mathbb{R}_+\times X) + H^s_{V^2}(\mathbb{R}_+\times X) = \{u = u_1 + u_2 : u_i \in H^s_{V^i}(\mathbb{R}_+\times X),\ i = 1,2\}$$

notée $H^s_V(\mathbb{R}_+\times X)$, où $V = V^1 + V^2$ est le plus petit ensemble sans cavités contenant $V^1 \cup V^2$. Si $V \in W_o$, on retrouve l'ancienne définition. Soit $V_o = \{V = V^1 + V^2 : V^1, V^2 \in W_o\}$. H^s_V est un espace de Fréchet de la manière naturelle, et H^∞_V est nucléaire.

On peut choisir une suite d'espaces de Hilbert $H^{s,(\ell)}_V$, $\ell \in \mathbb{Z}_+$, telle que $H^{s,(\ell+1)}_V \hookrightarrow H^{s,(\ell)}_V$ est continue, $u \in H^{s,(\ell)}_V \Rightarrow M\,u(z,x)$ est holomorphe dans

$$\{\tfrac{1}{2} - \ell < \operatorname{Re} z < \tfrac{1}{2} + \ell\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z,V) < (1+\ell)^{-1}\}, \quad \text{et} \quad H^s_V = \varprojlim_{\ell} H^{s,(\ell)}_V .$$

Soit I la transformation $u(t,x) \to t^{-1}\,u(t^{-1},x)$. Alors I définit des isomorphismes

$$I : H^s(\mathbb{R}_+\times X) \to H^s(\mathbb{R}_+\times X),\quad H^s_V(\mathbb{R}_+\times X) \to H^s_W(\mathbb{R}_+\times X), \quad \text{où } W = \{z \in \mathbb{C} : 1 - z \in V\}.$$

Ainsi par conjugaison avec I, on peut échanger les rôles de $t = 0$ et $t = \infty$.

1. Définition. $G \in L(L^2(\mathbb{R}_+\times X))$ est appelé un opérateur de Green, si il existe $V, W \in V_o$ tels que

$$(3.5)\qquad G : L^2(\mathbb{R}_+\times X) \to H^\infty_V(\mathbb{R}_+\times X),\ G^* : L^2(\mathbb{R}_+\times X) \to H^\infty_W(\mathbb{R}_+\times X)$$

sont continues. On désigne par $A_G(\mathbb{R}_+\times X)$ l'ensemble des opérateurs de Green et par $A^\bullet_G(\mathbb{R}_+\times X)$ le sous-ensemble des G qui vérifient (3.5) avec V et W dans $R_o(X)$.

On peut démontrer facilement que (3.5) peut être prolongé en des applications continues $H^s \to H^\infty_V$, $H^s \to H^\infty_W$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, et de même pour les singularités discrètes. D'après la définition 1 il est clair que l'inverse d'une bijection $1 + G : L^2(\mathbb{R}_+ \times X) \to L^2(\mathbb{R}_+ \times X)$, $G \in A_G(\mathbb{R}_+ \times X)$, est aussi de la forme $1 + G_1$, où $G_1 \in A_G(\mathbb{R}_+ \times X)$.

§ 4. SINGULARITES A VARIETES CONIQUES :

Pour construire une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels sur une variété avec singularités coniques, il suffit de considérer le cône infini $\mathbb{R}_+ \times X$. L'algèbre $A(\mathbb{R}_+ \times X)$ consiste en les opérateurs de la forme

$$A = S_{(o)} + S_{(\infty)} + K + G \tag{4.1}$$

où G est un opérateurs de Green, K un opérateur pseudo-différentiel classique, strictement dégénéré en $t = 0$ et $t = \infty$, $S_{(o)}$ est un opérateur de Mellin par rapport à $t = 0$, $S_{(\infty)}$ par rapport à $t = \infty$. L'opérateur $S_{(\infty)}$ est égal à $I \tilde{S}_{(o)} I^{-1}$ avec $\tilde{S}_{(o)}$ un autre opérateur de Mellin en $t = 0$. Ainsi, il suffit de considérer les objets par rapport à $t = 0$.

Dans la suite, nous désignerons par $\mathring{A}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times X)$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels strictement dégénérés en $t = 0$ et $t = \infty$.

D'abord on définit les classes des symboles de Mellin $M^\mu_V(X)$, $V \in \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble de tous les $V \subset \mathbb{C}$ telles que $V \cap \{\delta \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \gamma\}$ est compact pour tous $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$, V étant sans cavités et suffisant régulier (cf. § 3 la définition de $\mathcal{W}_o$). Nous ne donnons pas ici la définition précise (voir [S1]) mais indiquons seulement que $h(z) \in M^\mu_V(X)$ entraîne $h \in A(\mathbb{C} \setminus V, L^\mu_{cl}(X))$. En outre, h(z) est un opérateur pseudo-différentiel avec paramètre z avec un symbole principal homogène en (z,ξ) d'ordre μ (cf. § 2 pour la demi-droite).
Alors pour $V \in \mathcal{V}_o$ on peut encore définir $op_M^{-j}(h,\gamma)$ par (2.2). On obtient pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $B \in \mathcal{V}_o$ une application continue

$$\omega(t)\ op_M^{-j}(h,\gamma)\ \omega(t) : H^s_B(\mathbb{R}_+ \times X) \to H^{s-\mu}_C(\mathbb{R}_+ \times X) \tag{4.2}$$

avec un $C = C(B,h,\gamma,j) \in \mathcal{V}_o$.

Une sous-classe des symboles de Mellin est la classe $M_R^\mu(X)$ avec asymptotique discrète, $R \in R(X \times X)$, où $R(X\times X)$ désigne l'ensemble de toutes les suites $R = \{(r_j, n_j, M_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $(r_j, n_j) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}_+$, Re $r_j \to \pm\infty$ pour $\to \pm\infty$, M_j sous-espace de dimension finie de $C^\infty(X\times X)$. Si $h(z)$ appartient à $M_R^\mu(X)$, il est méromorphe avec pôles à $z = r_j$ de multiplicité $n_j + 1$ et coefficients en $(z - r_j)^{-k}$ dans M_j, $k = 0, \dots, n_j$.

Pour $V \in V$ on prolongera le sens de la notation $op_M^{-j}(h,\gamma)$ d'une manière convenable, en faisant intervenir une décomposition $V = V^1 + \dots + V^N$, où $\{\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2} + \gamma^k\} \cap V^k = \emptyset$ pour certain $\gamma^k \in [0,j]$, $h = h_1 + \dots + h_N$, $h_k \in M_{V^k}^\mu(X)$

$$op_M^{-j}(h,\gamma) := \sum_{k=1}^{N} t^{j\cdot\gamma^k}\, op_M(h_k(z+\gamma^k))\, t^{\gamma^k} ,$$

où γ est une abréviations pour les décompositions de V et h et de multiplet $\{\gamma^k\}$. On désigne le système de tous les γ par déc(V,h,j).
Les applications (4.2) sont continues. Pour $\gamma, \tilde{\gamma} \in$ déc(V,h,j) et des fonctions de troncature ω_i, $i = 1,2,3,4$, égales à 1 au voisinage de 0, on a

$$\omega_1\, op_M^{-j}(h,\gamma)\, \omega_2 - \omega_3\, op_M^{-j}(h,\tilde{\gamma})\, \omega_4 = K + G ,$$

où $K \in \mathring{A}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times X)$, $G \in A_G(\mathbb{R}_+ \times X)$.

1. <u>Théorème</u> : Soit $\{(h_j, \gamma_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ une suite, $h_j \in M_{V_j}^\mu(X)$, $V_j \in V$, $\gamma_j = \{(V_j^k, h_j^k, \gamma_j^k)\} \in$ déc(V_j, h_j, j) avec $\min_k \gamma_j^k \to \infty$, $\min_k (j-\gamma_j^k) \to \infty$ quand $j\to\infty$. Alors il existe des constantes $c_j > 0$, telles que pour tout ℓ il existe un $N = N(\ell)$ tel que

$$m_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} \omega(c_j t)\, op_M^{-j}(h_j,\gamma_j)\omega(c_j t)$$

ainsi que la somme des adjoints converge dans $L(H^s(\mathbb{R}_+\times X), H_\emptyset^{s-\mu,(\ell)}(\mathbb{R}_+ \times X))$.

2. <u>Corollaire</u> : Soit $\{(h_j, \gamma_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ comme précédemment.
Alors pour tout $B \in V_o$ il existe des éléments minimaux C et D dans V_o tels que

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} S_{(o)} &:= \sum_{j=0}^{\infty} s^{-j}(h_j,\gamma_j,c_j) \in \mathcal{L}(H^s_B, H^{s-\mu}_C), \\ S^*_{(o)} &= \sum_{j=o}^{\infty} s^{-j}(h_j,\gamma_j,c_j)^* \in \mathcal{L}(H^s_B, H^{s-\mu}_D), \end{aligned}$$

où $s^{-j}(h_j,\gamma_j,c_j) := \omega(c_j t)\, op_M^{-j}(h_j,\gamma_j)\, \omega(c_j t)$. Lorsque $\widetilde{S}_{(o)}$ est défini par $\{(h_j,\widetilde{\gamma}_j)\}$ et d'autres constantes $\widetilde{c}_j$, alors $S_{(o)} - \widetilde{S}_{(o)} \in \mathring{A}(\overline{\mathbb{R}}_+\times X) + A_G(\mathbb{R}_+\times X)$.

3. <u>Définition</u> : Les opérateurs définis par (4.3) sont appelés opérateurs de Mellin par rapport à $t=0$.
Soit $A(\mathbb{R}_+\times X)$ l'ensemble des opérateurs (4.1), $S_{(\infty)} = I\widetilde{S}_{(o)}I^{-1}$, $\widetilde{S}_{(o)}$ défini par $\widetilde{h}_k \in M^{\mu}_{V_k}(X)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Posons

$$\sigma^{-j}_{M,(o)}(A)(z) = h_j(z)\ ,\ \sigma^{-k}_{M,(\infty)}(A)(z) = \widetilde{h}_k(1-z),\quad j,k\in\mathbb{Z}_+ .$$ $h_j(z)$ est appelé le symbole de Mellin de A d'ordre conormal $-j$ en 0 et $\widetilde{h}_k(1-z)$ le symbole de Mellin d'ordre conormal $-k$ en ∞.

On a aussi un symbole principal pseudo-différentiel $\sigma^{\mu}_{\psi}(A)(t,x,\tau,\xi)$, qui est de la forme

$$\sigma^{\mu}_{\psi}(A)(t,x,\tau,\xi) = \sigma^{\mu}_{\psi}(K)(t,x,\tau,\xi) + \sum_{j=o}^{\infty} \omega^2(c_j t) h_{j,\psi}(-it\tau,x,\xi) + \sum_{k=o}^{\infty} \omega^2(c'_k t^{-1}) \widetilde{h}_{k,\psi}(it\tau,x,\xi),$$

où $h_{j,\psi}$ désigne le symbole homogène principal de l'opérateur h_j et de même pour $\widetilde{h}_{k,\psi}$.

4. <u>Théorème</u> : Soit $A,B \in A(\mathbb{R}_+\times X)$, alors les propriétés suivantes sont équivalente

(i) $A - B \in \mathring{A}(\overline{\mathbb{R}}_+\times X) + A_G(\mathbb{R}_+\times X)$,

(ii) $\sigma^{-j}_{M,(o)}(A) = \sigma^{-j}_{M,(o)}(B)$, $\sigma^{-k}_{M,(\infty)}(A) = \sigma^{-k}_{M,(\infty)}(B)$ pour tous $j,k\in\mathbb{Z}_+$.

5. <u>Théorème</u> : $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+ \times X)$ est une $*$ algèbre, et la composition AB vérifie la formule (2.4) avec $\sigma_M^{-j} = \sigma_{M,(o)}^{-j}$ et l'analogue pour $t = \infty$. Les sous-espaces $\mathring{\mathcal{A}}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times X) + \mathcal{A}_G(\mathbb{R}_+ \times X)$ et $\mathcal{A}_G(\mathbb{R}_+ \times X)$ sont des idéaux dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+ \times X)$.

Il est clair qu'à l'intérieur de $\mathbb{R}_+ \times X$ on a le calcul symbolique usuel. Le symbole homogène principal $\sigma_\psi^\mu(A)$ peut se représenter comme une fonction invariante $\tilde{\sigma}_\psi^\mu(A)$ sur le fibré cotangent comprimé $\tilde{T}^*(\overline{\mathbb{R}}_+ \times X)$, cf.[M4],[R4]. Alors $\tilde{\sigma}_\psi^{\mu_1+\mu_2}(AB) = \tilde{\sigma}_\psi^{\mu_1}(A)\ \tilde{\sigma}_\psi^{\mu_2}(B)$.

L'algèbre $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+ \times X)$ est graduée par l'ordre μ (aussi par l'ordre conormal). Soit $\mathcal{A}^\mu(\mathbb{R}_+ \times X)$ l'espace d'opérateurs d'ordre $\leqslant \mu$.

6. <u>Proposition</u> : Soit $A,B \in \mathcal{A}^\mu(\mathbb{R}_+ \times X)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $A - B \in \mathring{\mathcal{A}}^{\mu-1}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times X) + \mathcal{A}_G(\mathbb{R}_+ \times X)$,

(ii) on a la condition (ii) du Théorème 4 , et en outre $\tilde{\sigma}_\psi^\mu(A) = \tilde{\sigma}_\psi^\mu(B)$.

On peut montrer facilement que l'opérateur de Laplace-Betrami

$t^{-2}\left(-\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - (\dim X-1)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right) + \Delta_X\right)$ associé à une métrique Riémannienne $dt^2 + t^2 g$, g étant une métrique sur X, appartient à $t^{-2}\mathcal{A}(\mathbb{R}_+ \times X)$. Le poids t^{-2} n'est pas essentiel pour le calcul. [R6] contient un chapitre au sujet des complexes elliptiques et de la régularité dans C^∞ avec asymptotique des formes harmoniques.

7. <u>Définition</u> : Un opérateur $A \in \mathcal{A}^\mu(\mathbb{R}_+ \times X)$ est appelé elliptique si

(i) $\tilde{\sigma}_\psi^\mu(A)$ est inversible sur $\tilde{T}^*(\overline{\mathbb{R}}_+ \times X) \setminus 0$,

(ii) $\sigma_{M,(o)}^{\circ}(A)(z)$, $\sigma_{M,(\infty)}^{\circ}(A)(z)$ sont des opérateurs bijectifs $H^s(X) \to H^{s-\mu}(X)$ pour tous z , $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ et $s \in \mathbb{R}$.

8. <u>Définition</u> : On appelle $P \in \mathcal{A}^{-\mu}(\mathbb{R}_+ \times X)$ une paramétrix de $A \in \mathcal{A}^\mu(\mathbb{R}_+ \times X)$ si $AP - I$, $PA - I \in \mathcal{A}_G(\mathbb{R}_+ \times X)$.

Si P est une paramétrix de A , il est clair que $P + G$ est aussi une paramétrix pour tout $G \in \mathcal{A}_G(\mathbb{R}_+ \times X)$.

9. Théorème : Pour $A \in A^{\mu}(\mathbb{R}_+ \times X)$ et $s \in \mathbb{R}$ fixé les conditions suivantes sont équivalentes

(i) A est elliptique

(ii) $A_s : H^s(\mathbb{R}_+ \times X) \to H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+ \times X)$ est un opérateur de Fredholm (A_s étant la réalisation de A dans H^s).

De plus si A est elliptique, il existe une paramétrix $A^{(-1)} \in A^{-\mu}(\mathbb{R}_+ \times X)$ au sens de la définition 8. ker A_s est contenu dans $H^{\infty}_B(\mathbb{R}_+ \times X)$ pour un certain $B \in V_o$ et il existe un espace $N \subset H^{\infty}_C(\mathbb{R}_+ \times X)$ de dimension finie pour un certain $C \in V_o$, tel que $\operatorname{im} A_s \oplus N = H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+ \times X)$.
Enfin $Au = f \in H^t_D(\mathbb{R}_+ \times X)$, $t \in \mathbb{R}$, $D \in V_o$, $u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}_+ \times X)$ entraîne $u \in H^{t+\mu}_B(\mathbb{R}_+ \times X)$ pour certain $B = B(A,D) \in V_o$.

10. Corollaire : Si $A \in A^{\mu}(\mathbb{R}_+ \times X)$ est elliptique, il existe des entiers N,M et une matrice d'opérateurs

$$(4.4) \qquad a = \begin{pmatrix} A & P \\ T & Q \end{pmatrix} : \begin{matrix} H^s(\mathbb{R}_+ \times X) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-\mu}(\mathbb{R}_+ \times X) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^M \end{matrix}$$

qui est bijective, avec $\{$ noyau de $P\} \in H^{\infty}_C(\mathbb{R}_+ \times X) \otimes \mathbb{C}^N$, $\{$noyau de $T\} \in \mathbb{C}^M \otimes H^{\infty}_B(\mathbb{R}_+ \times X)$ pour certain $B, C \in V_o$.

11. Proposition : Si (4.4) est bijective, l'inverse a^{-1} est de la forme $a^{-1} = \begin{pmatrix} A^{(-1)} & P_1 \\ T_1 & Q_1 \end{pmatrix}$, où $A^{(-1)}$ est une paramétrix de A particulière et les opérateurs P_1, T_1 sont comme dans le corollaire 10.

12. Remarque : Lorsqu'on définit la sous-algèbre $A^{\bullet}(\mathbb{R}_+ \times X)$ à l'aide des symboles de Mellin dans $M^{\infty}_R(X)$, $R \in R(X \times X)$, et des opérateurs de Green dans $A^{\bullet}_G(\mathbb{R}_+ \times X)$, alors on obtient des applications continues entre les espaces $H^s_Q(\mathbb{R}_+ \times X)$, $Q \in R_o(X)$, c'est-à-dire avec asymptotique discrète. Tous les résultats précédents sont valides sous une forme analogue pour cette classe, cf. [R4].

§ 5. OPERATEURS SUR $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times X$:

Si M est une variété avec arêtes, elle s'identifie localement avec $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times X$ pour certain k. On peut considérer la situation locale, et le problème est de construire l'algèbre $A(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times X)$. Il n'est pas possible pour nous de donner les détails ici, aussi nous nous contenterons de quelques remarques.

L'algèbre $A(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times X)$ consiste en matrices d'opérateurs

$$A = \begin{pmatrix} A & K \\ \Gamma & Q \end{pmatrix} : \begin{matrix} H^s(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times X) \\ \oplus \\ H^{s'}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^N) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^t(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times X) \\ \oplus \\ H^{t'}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^M) \end{matrix}$$

qui sont pseudo-différentiels dans la direction $\mathbb{R}^k$ avec un symbole

$$\sigma(A)(y,\eta) = \begin{pmatrix} \sigma(A) & \sigma(P) \\ \sigma(T) & \sigma(Q) \end{pmatrix} (y,\eta) : \begin{matrix} H^s(\mathbb{R}_+ \times X) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^N \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^t(\mathbb{R}_+ \times X) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^M \end{matrix}$$

de la forme (4.4) pour tous $(y,\eta) \in T^*\mathbb{R}^k$ (mais qui ne sont pas des isomorphismes en général). Sous une condition d'ellipticité naturelle, on peut construire une paramétrix qui est d'une forme analogue et on a un théorème de régularité elliptique dans les espaces de Sobolev, et aussi dans les espaces avec asymptotique.

On peut faire cela aussi pour des problèmes aux limites, i.e. lorsque X est une variété à bord, où les symboles de Mellin et les autres parties de l'algèbre ont des valeurs dans l'algèbre de Boutet de Monvel [B1](cf.[R5] pour l'asymptotique discrète). Alors, une réduction à la frontière donne la classe sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+ \times \partial X$. La structure du calcul symbolique pour des arêtes ressemble à celui pour des problèmes mixtes, cf. [R6]. Remarquons que le résultat (1.1) peut être obtenu sans la construction d'une paramétrix exacte par des arguments plus simples que dans [R3]. Ceci fait l'objet d'un article en préparation.

BIBLIOGRAPHIE :

[A1] M.S. Agranovič, M.I. Višik : Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. Uspechi Mat. Nauk 19, 3 (1964) 53-161 (English transl. in Russian Math. Surveys 19 (1964))

[B1] L. Boutet de Monvel : Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. 126 (1971) 11-51.

[B2] M.S. Baouendi, J. Sjöstrand : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point. Ark. for Math. 14 (1976) 9-33.

[B3] P. Bolley, M. Dauge, J. Camus : Régularité Gevrey pour le problème de Dirichlet dans des domaines à singularités coniques. Comm. Part. Diff. Equ. 10, 4 (1985) 391-432.

[C1] J. Cheeger : Spectral geometry of spaces with cone-like singularities. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 76 (1979) 2103-2106.

[C2] M. Costabel : Singular integral operators on curves with corners. Int. Equ. and Operator Theory 3 (1980) 323-349.

[D1] M. Dauge : Second membre analytique pour un problème aux limites elliptique d'ordre 2m sur un polygône. Comm. Part. Diff. Equ. 9 , 2 (1984) 169-195.

[G1] P. Grisvard : Boundary value problems in domains with non smooth boundaries. Lecture Notes 19 , Univ. of Maryland 1980.

[G2] P. Grisvard : Singularités des problèmes aux limites dans des polyèdres. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1981/82, n°8.

[J1] P. Jeanquartier : Transformation de Mellin et développements asymptotiques. L'Enseignement Mathématique 25, 3-4 (1980) 285-308.

[K1] V.A. Kondrat'ev : Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical points. Trudy Mosk. Mat. Obšč. 16 (1967) 209-292 (Transactions Moscow Math. Soc. (1967) 227-313).

[L1] J.E. Lewis, C. Parenti : Pseudodifferential operators of Mellin type. Comm. Part. Diff. Equ. 8, 5 (1983) 477-544.

[M1] V.G. Maz'ja, B.A. Plamenevskij : On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems in domains with conical points. Math. Nach. 76 (1977) 29-60 (Amer. Math. Soc. Transl. (2) 123, 1984, pp. 57-88).

[M2] V.G. Maz'ja, B.A. Plamenevskij : Weighted spaces with nonhomogeneous norms, and boundary value problems in domains with conical points. Ellipt. Diff. gleichungen, Meeting Rostock 1977, Univ. Rostock 1978, 161-189 (Amer. Math. Soc. Transl. (2) 123, 1984, pp 89-108).

[M3] V.G. Maz'ja, B.A. Plamenevskij : Schauder estimates of solutions of elliptic boundary value problems in domains with edges on the boundary. Part. Diff. Equ., Proc. Sem. S.L. Sobolev 1978, 2, Institut Math. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk 1978, 69-102 (Amer. Math. Soc. Transl. (2) 123, 1984, pp.141-170).

[M4] R. Melrose : Transformation of boundary problems. Acta Math. 147 (1981) 149-236.

[M5] R. Melrose, G.A. Mendoza : Elliptic boundary problems in spaces with conical points. Proc. Journées "Equ. Dériv. Part." St. Jean de Monts 1981, Conf.4 .

[N1] V.A. Nikiščin : Singularities of the solution to the Dirichlet problem for a second order equation in a neighbourhood of an edge. Vestnik Moscov Univ. Mat. 34, 2 (1979) 51-62 (Moscov Univ. Math. Bull. 34, 2 (1979) 53-64).

[P1] B.A. Plamenevskij : On algebras generated by pseudodifferential operators with isolated singularities of symbols. Dokl. Akad. Nauk SSSR 248, 2 (1979) (Soviet Math. Dokl. 20, 5 (1979) 1013-1017).

[P2] Pham The Lai : Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids. Comm. Part. Diff. Equ. 4 (1979) 389-445.

[P3] Pham The Lai : Nouveau regard sur un travail de Kondrat'ev. Séminaire Equ. aux Dériv. Part. Nantes 1981/82, I.6.

[R1] S. Rempel,B.-W. Schulze : Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property. Math. Nachr. 105 (1982) 45-149.

[R2] S. Rempel,B.-W. Schulze : Complete Mellin symbols and the conormal asymptotics in boundary value problems. Proc. Journees"Equ. Dériv. Part." St-Jean de Monts 1984, Conf.5.

[R3] S. Rempel, B.-W. Schulze : Branching of asymptotics for elliptic operators on manifolds with edges. Banach Center Publ. Proc. of the Semester "Part. Diff. Equ." 1984, vol. 19 (to appear).

[R4] S. Rempel, B.-W. Schulze : Complete Mellin and Green symbolic calculus in spaces with conormal asymptotics. Ann. Global Anal. and Geometry (to appear 1986).

[R5] S. Rempel, B.-W. Schulze : Mellin symbolic calculus and asymptotics for boundary value problems. Seminar Analysis 1984/85 des Karl-Weierstrass-Instituts, Berlin 1985.

[R6] S. Rempel, B.-W. Schulze : Asymptotics for elliptic mixed boundary problems (pseudo-differential and Mellin operators in spaces with conormal singularity). Math. Research Series, Akademie-Verlag Berlin (to appear 1986).

[S1] B.-W. Schulze : Ellipticity and continuous conormal asymptotics on manifolds with conical singularities. Preprint 1985.

***

La formule (2.2) est la suivante :

$$op_M^{-j}(h,\gamma)u(t) = t^{j-\gamma}M^{-1}h(z+\gamma)Mt^{\gamma}u(t) .$$