Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. Bros

Transformations de Laplace sur des sous-variétés de C^n et représentations d'ondes entrantes et sortantes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 22, p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

TRANSFORMATIONS DE LAPLACE SUR DES SOUS-VARIETES DE $\mathbb{C}^n$ ET REPRESENTATIONS D'ONDES ENTRANTES ET SORTANTES. *

par J. BROS

* Cet exposé rend compte de travaux effectués en collaboration avec R. OMNES.

Exposé n°XXII

27 Mai 1986

INTRODUCTION.

Pour une certaine classe d'équations à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$, dont l'équation de Helmholtz $(\Delta+a^2)\psi(x) = 0$ est le prototype, on va représenter des solutions ψ dans un domaine extérieur bordé par une hypersurface compacte et convexe Σ , au moyen d'intégrales du type Fourier-Laplace sur des cycles complexes de la variété caractéristique de l'équation.

Etant donné une hypersurface algébrique S de $\mathbb{C}^n_{(k)}$ d'équation $s(k) = 0$, s étant un polynôme des variables $k = (k_1,\ldots,k_n)$, toute transformation $L_S^{(\Gamma)}$ du type suivant :

$$L_S^{(\Gamma)} \ : \ \psi(x) = {}_{\Gamma}\!\int e^{ik.x} \ F(k) \ \frac{dk_1\wedge\ldots\wedge dk_n}{ds}\Big|_S$$

avec supp. $\Gamma \subset S$, dim $\Gamma = n-1$ et $k.x = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} k_i x_i$, fournit une classe de solutions ψ de l'équation associée à S : $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\psi(x) = 0$.

Lorsque le cycle Γ est contenu dans $S \cap \mathbb{R}^n$, les solutions ψ obtenues (pour des fonctions F suffisamment régulières) sont définies dans tout l'espace $\mathbb{R}^n_{(x)}$.

Par contre, et c'est le cas qui nous intéresse ici, si le cycle Γ possède des branches infinies dans des directions <u>non-réelles</u> de $\mathbb{C}^n_{(k)}$, et si F est une fonction <u>entière de type exponentiel</u> sur S , la solution ψ pourra admettre un certain domaine de définition, sans être prolongeable à tout $\mathbb{R}^n_{(x)}$; ce domaine sera engendré en faisant varier le cycle Γ dans une classe d'homologie $\hat{\Gamma}$ d'un type approprié.

On est amené de façon naturelle a un cadre géométrique "du type Plancherel-Polya" [1] , dans lequel la propriété :

i) existence d'une indicatrice de croissance exponentielle représentée par une surface de niveau I dans $\mathbb{R}^n_{(\mathrm{Im}k)}$ pour la classe de fonctions F considérées, implique :

ii) existence d'un domaine extérieur U_Σ bordé par une hypersurface (convexe) Σ , déduite de I par une transformation polaire, pour la classe de solutions ψ associées (la condition locale $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\ \psi(x) = 0$, vérifiée en tout point de U_Σ , remplacera ici la condition $\psi(x) = 0$ du théorème classique de Plancherel-Polya [1]).

Dans la partie I , on définit des variétés S , dites "P.P. admissibles" comme possédant des classes $\dot{\Gamma}$ appropriées, permettant à la transformation $L_S^{(\dot{\Gamma})}$ (associéeen fait à $\dot{\Gamma}$, et non à un cycle particulier Γ de $\dot{\Gamma}$) de satisfaire à la propriété de type Plancherel-Polya décrite précédemment.

Dans le cas où S est une (n-1)-sphère complexe d'équation $k_1^2+\ldots+k_n^2 = a^2$, le cadre précédent fournit deux transformations $L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ et $L_S^{(\dot{\Gamma}_-)}$ permettant d'engendrer deux classes de solutions de l'équation de Helmholtz, connues respectivement sous le nom d' "ondes sortantes" et d' "ondes entrantes" . Une première version de la transformation $L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ pour l'équation de Helmholtz (en dimension n = 3) se trouve exprimée dans un contexte physique par une formule de Lax et Feshbach [2,3] (cf. formule (6) ci-dessous), s'inspirant de la représentation intégrale des ondes sortantes élémentaires ou "fonctions de Hankel" donnée par Sommerfeld [6a] .

Il se trouve qu'une autre transformation classique faisant intervenir des indicatrices, à savoir la transformation de Laplace-Borel des fonctions entières de type exponentiel (dans $\mathbb{C}$) dont la représentation de Polya [4] réalise l'inversion, apparaît comme le cas particulier le plus simple du cadre précédent.

Le rapprochement de ces deux cas va permettre, dans la partie II, d'obtenir une représentation intégrale (notée (R)) d'un type très maniable pour les ondes sortantes de l'équation de Helmholtz définies à l'extérieur d'une surface de révolution Σ, et invariantes par le sous-groupe orthogonal correspondant. Le noyau de la représentation, calculable explicitement, possède des singularités de type faible, et la surface Σ n'est pas nécessairement convexe.

L'idée du rapprochement précédent, ainsi qu'une première version du calcul * de la représentation (R) (à partir de la formule de Lax-Feshbach-Sommerfeld) se trouvant à l'origine du présent travail, sont dues à R. Omnes dont la motivation originale était le problème physique suivant, au double aspect :

1) améliorer les méthodes de calcul de l'"amplitude d'émission" $\phi(\Omega)$ donnant le comportement asymptotique de l'onde sortante ψ dans chaque direction Ω, à partir de données du type Dirichlet ou Neumann pour ψ sur la surface de révolution Σ , censée représenter par exemple une antenne.

2) inversement, améliorer les méthodes de calcul de $\psi_{|\Sigma}$ en fonction de l'amplitude d'émission ϕ : ceci revient à savoir calculer les caractéristiques de l'émetteur (antenne ou haut-parleur) afin d'obtenir un diagramme de rayonnement prescrit par des conditions de directionnalité ou de performance acoustique.

La nouvelle méthode d'approche de ce problème que fournit la représentation

---
* cf. [5]

(R) sera brièvement commentée à la fin de la partie II, en ce qui concerne le premier aspect. Une discussion plus large des deux aspects du problème sera présentée dans [5] .

Dans les parties suivantes de cet exposé, on considère les transformations $L_S^{(\dot{\Gamma})}$ de cas plus généraux et on traite notamment des questions suivantes :

Dans la partie III, introduction de transformations $L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ permettant de généraliser les solutions du type "onde sortante" satisfaisant à des conditions asymptotiques du type "conditions de radiation" de Sommerfeld [6b]; on fournit des exemples d'équations non-hyperboliques, mais pas nécessairement "purement" elliptiques, satisfaisant au cadre précédent.

Dans la partie IV, on proposera une formule générale d'inversion pour les transformations de type Fourier-Laplace associées à des sous-variétés S de $\mathbb{C}^n$; cette formule inclut, outre l'inversion des transformations de Fourier localisées F_ϕ (cf. [9]) et la représentation de Polya, une formule d'inversion généralisant celle des ondes sortantes de l'équation de Helmholtz à toute une classe de transformations $L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ du type introduit dans la partie III .

Une présentation plus détaillée des résultats décrits dans cet exposé, incluant les démonstrations complètes des différents énoncés, pourra être trouvée dans [7].

I . VARIETES "P.P.ADMISSIBLES" ET TRANSFORMATIONS $L_S^{(\dot{\Gamma})}$ ASSOCIEES.

On considère des variétés algébriques S de codimension 1 dans l'espace $\mathbb{C}^n_{(k)}$ des variables $k = (k_1,\dots,k_n)$. On pose $k = p + iq$, $P = [\sum_{1\leqslant i\leqslant n} p_i^2]^{1/2}$, $Q = [\sum_{1\leqslant i\leqslant n} q_i^2]^{1/2}$ et on utilise dans $\mathbb{R}^n_{(q)}$ les coordonnées polaires :

$$q = Q\Omega \quad , Q \geqslant 0 \ , \Omega \in \mathbb{S}_{n-1} \quad .$$

Une variété S est définie par une équation $s(k) = 0$, où s est un polynôme irréductible de n variables. $H_*^{(\phi)}(S)$ désigne l'homologie de S à supports dans une famille particulière* ϕ de fermés de S , $H_*^{(F)}(S)$ correspondant au choix de la famille de tous les fermés de S .

Définition 1. Une variété S est dite "P.P.admissible" s'il existe au moins un ensemble

$$\dot{\Gamma} = \{ \Gamma(\Omega) \ ; \ \Omega \in \mathbb{S}_{n-1} \} \ ,$$

de (n-1)-cycles $\Gamma(\Omega)$ à supports dans S , satisfaisant aux conditions suivantes :

---

* cf. par exemple [11]

a) $\forall\ \Omega \in \mathbb{S}_{n-1}$, supp.$\Gamma(\Omega)$ est, à un sous-ensemble compact près, contenu dans le tube aplati $E_\Omega = \{k = p+iq \in \mathbb{C}^n \ ;\ q = Q\Omega \ ,\ Q \geqslant 0\}$; de plus l'ensemble des valeurs prises par Q dans supp$\Gamma(\Omega)$ est adhérent à $+\infty$.

b) Pour tout cône convexe fermé C dans $\mathbb{R}^n$, tous les cycles $\Gamma(\Omega)$ tels que $\Omega \in C$ sont homologues dans $H_{n-1}^{\phi(C)}(S)$, où $\phi(C)$ désigne la famille des fermés de S contenus dans le tube $\{k = p+iQ\Omega \ ;\ \Omega \in C \ ,\ Q \geqslant 0\}$.

c) Il existe pour S une condition d'intégrabilité, uniforme par rapport à Ω, du type suivant :

$$\int_{\Gamma(\Omega)} [1+\sup(P,Q)]^{-\nu} \left| \frac{dk_1\wedge\ldots\wedge dk_n}{ds}\Big|_S \right| \leqslant C$$

avec un choix convenable des constantes C et ν .

On dit alors que $\dot{\Gamma}$ est une <u>section d'homologie isotrope</u> sur S .

Une illustration typique de cette définition est fournie par la sphère complexe $S^{(a)}$ d'équation :

$$k^2 \equiv k_1^2 +\ldots+k_n^2 = a^2 \quad .$$

L'ensemble $E_\Omega \cap S$ est défini (quel que soit $\Omega \in \mathbb{S}_{n-1}$) par :

$$P^2 - Q^2 = a^2 \quad , \ (p.\Omega)\ Q = 0 \ ,$$

ce qui conduit à la définition de deux cycles possibles (cf. fig.1) :

$$\Gamma_+(\Omega) = S_+(\Omega) + \Gamma'(\Omega)$$
$$\Gamma_-(\Omega) = S_-(\Omega) + \Gamma'(\Omega)$$

avec supp.$\Gamma'(\Omega) = \{k = p+iQ\Omega \ ;\ p.\Omega = 0 \ ,\ P^2 - Q^2 = a^2 \ ,\ Q \geqslant 0\}$

supp.$S_+(\Omega) = \{k = p \ ;\ p.\Omega \geqslant 0 \ ,\ P^2 = a^2\}$

supp.$S_-(\Omega) = \{k = p \ ;\ p.\Omega \leqslant 0 \ ,\ P^2 = a^2\}$

($S_+(\Omega)$ et $S_-(\Omega)$ sont orientés par la condition $n(p).\Omega > 0$, pour la normale $n(p)$ à leur support, au point p correspondant).

On vérifie que les ensembles

$$\dot{\Gamma}_+ = \{\Gamma_+(\Omega) \ ;\ \Omega \in \mathbb{S}_{n-1}\}$$

et

$$\dot{\Gamma}_- = \{\Gamma_-(\Omega) \ ;\ \Omega \in \mathbb{S}_{n-1}\}$$

forment deux sections d'homologie isotropes sur $S^{(a)}$.

Remarques.

i) Les sections d'homologie isotropes sur une variété P.P.admissible S engendrent un $\mathbb{Z}$-module. Dans l'exemple ci-dessus, $\dot{\Gamma}_+ - \dot{\Gamma}_-$ est une section constante, caractérisée par le cycle fixe $S^{(a)}_{\text{réel}} = \Gamma_+(\Omega) - \Gamma_-(\Omega)$ dont le support (compact) est $S^{(a)} \cap \mathbb{R}^n_{(p)}$. Le cas du cercle (n=2) fournit un exemple dans lequel les cycles $\Gamma_+(\Omega)$ et $\Gamma_-(\Omega)$ sont homologues entre eux dans $H_1^{(F)}(S^{(a)})$ (car $S^{(a)}_{\text{réel}}$ y est homologue à zéro), bien que non-homologues dans les $H_1^{\phi(C)}(S^{(a)})$; ce qui justifie la condition b).

ii) La précaution "à un sous-ensemble compact près" intervenant dans le a) de la définition précédente n'apparaîtra justifiée que par les exemples plus généraux mentionnés dans III.

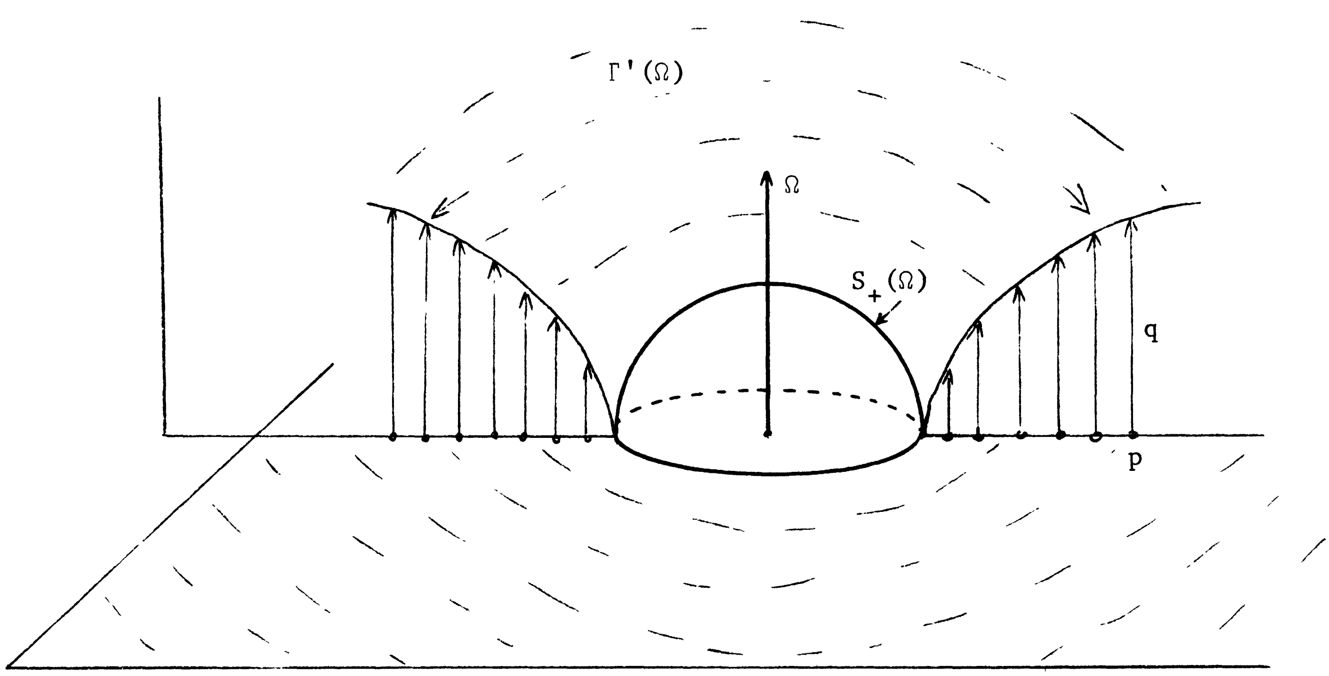

Fig. 1 : Représentation d'un cycle $\Gamma_+(\Omega)$.

Sur une variété P.P.admissible S, on introduit les espaces suivants de fonctions entières.

Définition des espaces $E_B(S)$. B désigne la fermeture d'un domaine strictement convexe contenant l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(q)}$, et dont la frontière I_B est une hypersurface compacte, et C^∞. Soit $\sigma_B(\Omega)$ la "fonction indicatrice" associée à I_B, telle que l'équation de I_B en coordonnées polaires soit :

$$I_B : q = Q\Omega \quad , \; Q = [\sigma_B(\Omega)]^{-1} \quad .$$

On appelle $E_B(S)$ l'espace des fonctions F(k) analytiques sur toute la variété S et y admettant des majorations exponentielles dont I_B est la surface de niveau 1 pour l'exposant. Plus précisément l'ensemble de ces majorations est supposé de la forme suivante :

$$(1) \quad \forall\, k \in S \;, \forall N \text{ entier} \geq 0 \;, \; |F(k)| \leq C_N[1+\sup(P,Q)]^{-N} \, e^{Q\sigma_B(\Omega)}$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^n_{(x)}$ on introduit le polaire $\overset{\circ}{B}$ de B :
$\overset{\circ}{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \forall\, q \in B \;,\; q.x \leq 1\}$. Soit $\Sigma(B)$ l'hypersurface compacte, convexe et C^∞ qui borde $\overset{\circ}{B}$ et $U_{\Sigma(B)}$ le domaine de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ extérieur à $\Sigma(B)$.

On a alors la propriété suivante :

Proposition 1. A toute section d'homologie isotrope $\dot{\Gamma}$ de S est associée une transformation de type Fourier-Laplace $L_S^{(\dot{\Gamma})}$. Pour tout espace $E_B(S)$, la transformée $\psi = L_S^{(\dot{\Gamma})}(F)$ d'une fonction F quelconque dans $E_B(S)$ est une solution de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\,\psi(x) = 0$, définie et de classe C^∞ dans la fermeture du domaine $U_{\Sigma(B)}$ associé à B .

En chaque point x de $U_{\Sigma(B)}$, la transformation $L_S^{(\dot{\Gamma})}$ est définie par l'intégrale :

$$(2) \qquad \psi(x) = \int_{\Gamma(\Omega)} e^{ik.x}\, F(k) \left. \frac{dk_1\wedge\ldots\wedge dk_n}{ds} \right|_S$$

dans laquelle $\Gamma(\Omega)$ est n'importe quel cycle de $\dot{\Gamma}$, tel que Ω appartienne au cône $C_{(x)}$ dont l'opposé est équipollent au cône circonscrit à $\Sigma(B)$ de sommet x .
(cf. figure 2) *figure 2 page XXII-7*

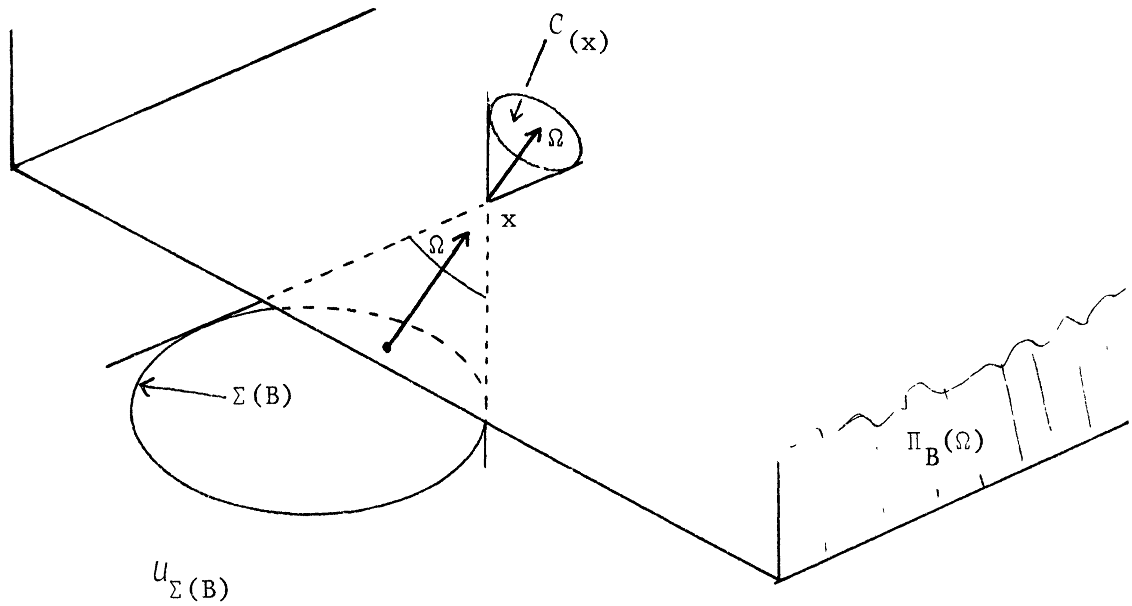

Fig. 2

Démonstration. Pour Ω fixé, le domaine de convergence de l'intégrale (2) est donné (en raison des conditions a) et c) sur les cycles $\Gamma(\Omega)$, et de (1)) par la condition que l'exponentielle $e^{-Q(\Omega.x-\sigma_B(\Omega))}$ tende vers 0 pour $Q \to +\infty$, ce qui astreint x à appartenir au demi-espace $\Pi_B(\Omega) = \{x;\Omega.x-\sigma_B(\Omega) \geqslant 0\}$. Le fait que $\overline{U_{\Sigma(B)}} = \bigcup_{\Omega\in S_{n-1}} \Pi_B(\Omega)$ et la condition d'homologie b) impliquent alors l'existence de ψ dans $\overline{U}_{\Sigma(B)}$. Son caractère C^∞ s'obtient en appliquant le même raisonnement à toutes les fonctions $k^N F(k)$.

Premier exemple. Les ondes entrantes et sortantes de l'équation de Helmholtz. Aux deux sections $\dot{\Gamma}_+$ et $\dot{\Gamma}_-$ de la sphère complexe $S^{(a)}$, correspondent respectivement les transformations $L_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_+)}$ et $L_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_-)}$.

On a alors :

Proposition 2. Pour toute fonction F dans $\mathcal{E}_B(S^{(a)})$, soit :

$\psi_+ = \mathcal{L}_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_+)}(F)$ et $\psi_- = \mathcal{L}_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_-)}(F)$. ψ_+ et ψ_- sont des solutions (appelées respectivement "sortante" et "entrante") de l'équation de Helmholtz

$$\left[\sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + a^2\right] \psi(x) = 0 \quad ,$$

définies et de classe C^∞ dans $\overline{U_{\Sigma(B)}}$, et caractérisées par les comportements asymptotiques suivants dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$:

$$\psi_+(x)\Big|_{x=r\Omega} = C_n\, F(a\Omega)\, \frac{e^{iar}}{r^{\frac{n-1}{2}}} + o\left(\frac{1}{r^{\frac{n+1}{2}}}\right) \tag{3}$$

$$\psi_-(x)\Big|_{x=r\Omega} = C_n\, F(-a\Omega)\frac{e^{-iar}}{r^{\frac{n-1}{2}}} + o\left(\frac{1}{r^{\frac{n+1}{2}}}\right) \tag{4}$$

(C_n étant une constante déterminée).

Réciproquement, toute solution ψ^+ (resp. ψ^-) de l'équation de Helmholtz, C^∞ dans $\overline{U}_{\Sigma(B)}$ et satisfaisant aux "conditions de radiation" (resp. "d'absorption") de Sommerfeld [6b]:

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - ia\psi\right) = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{r\to\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + ia\psi\right) = 0\right) ,$$

est telle que : $\psi_+ = \mathcal{L}_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_+)}(F)$ (resp. $\psi_- = \mathcal{L}_{S^{(a)}}^{(\Gamma_-)}(F)$), avec $F \in \mathcal{E}_B(S^{(a)})$, $F\big|_{S^{(a)}\cap\mathbb{R}^n}$ fournissant les comportements asymptotiques (3), (4) de ψ_+ et ψ_-.

De plus, l'inversion des transformations $\mathcal{L}_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_+)}$ et $\mathcal{L}_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_-)}$ s'effectue au moyen des formules suivantes [3] :

$$\begin{cases} \hat{F}(k) = \dfrac{1}{(2i\Pi)^{n-1}} \displaystyle\int_\Sigma e^{-ik.x}[(k.n(x))\psi(x) - i\nabla\psi(x).n(x)]\Big|_{x=x(\sigma)} \text{"}d\sigma\text{"} & (5) \\ F = \hat{F}\Big|_{S^{(a)}} & (5)' \end{cases}$$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure en x à la surface Σ paramétrisée par $x = x(\sigma)$, et où ψ peut désigner soit ψ_+, soit ψ_-.

Démonstration. La première partie est une conséquence directe de la proposition 1.

Les comportements asymptotiques (3) et (4) s'obtiennent par la méthode de la phase stationnaire (résultat connu depuis Sommerfeld [6] , et dont on indique ci-dessous dans III une extension au cas de variétés P.P.admissibles plus générales)

La réciproque est basée sur la formule d'inversion (5) : d'après le théorème de Plancherel et Polya, cette formule associe à ψ_+ une fonction entière $\hat{F}$ dans $\mathbb{C}^n_{(k)}$ admettant comme surface indicatrice dans $\mathbb{R}^n_{(q)}$ la surface I_B polaire réciproque de Σ (c.a.d. telle que $\Sigma = \Sigma(B)$, lorsque Σ est convexe). Soit Λ l'application qui associe à ψ_+ la fonction $F = \hat{F}|_{S^{(a)}}$. On a d'une part : $\Lambda \circ L_S^{(\dot{\Gamma}_+)} = 1\!\!1$ sur tout espace $E_B(S^{(a)})$. (cf. dans IV une généralisation de la formule (5) et de cette propriété). D'autre part, il résulte de la formule de Green que $L_S^{(\dot{\Gamma}_+)} \circ \Lambda = 1\!\!1$ sur l'espace $H_+(U_\Sigma)$ de toutes les solutions ψ_+ , C^∞ dans $\overline{U}_\Sigma$ et satisfaisant la condition (3).

Remarques.

i) La fonction $\phi(\Omega) = F(a\Omega)$ est interprétée physiquement comme l' "amplitude d'émission" associée à l'onde sortante ψ_+ . On remarque que $\psi_+ - \psi_- = L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}(F) - L_S^{(\dot{\Gamma}_-)}(F)$ est une solution prolongeable dans tout $\mathbb{R}^n$, transformée de Fourier de $F(a\Omega) \times \delta_{S^{(a)} \cap \mathbb{R}^n}$, ce qui se comprend homologiquement par l'égalité : $S^{(a)}_{\text{réel}} = \Gamma_+(\Omega) - \Gamma_-(\Omega)$ (cf. remarque i) après le définition 1). Le fait que $F = \Lambda\psi_+$ est aussi égal à $\Lambda\psi_-$ résulte alors de la formule de Stokes appliquée au second membre de (5) avec $\psi = \psi_+ - \psi_-$ (l'intégrand étant une forme fermée dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$ pour k appartenant à $S^{(a)}$).

ii) Dans [3] , où l'on donne la définition* (5) de la fonction $\hat{F}$, ψ est réobtenu à partir de F par la formule (notée (11-4-49) dans [3]) :

$$(6) \qquad \psi(x) = \frac{ia}{4\Pi} \int_0^{2\Pi} d\varphi \int_{\gamma(-i\infty,+i\infty)} \sin\theta \, d\theta \, F(k(\theta,\varphi)) \, e^{ik(\theta,\varphi).x}$$

(cf. aussi [2],formule (1) et [6b] formule (22) du § 19).

Nous interprétons cette dernière comme l'expression* de la transformation $L^{(\dot{\Gamma}_+)}_{S^{(a)}}$, dans une paramétrisation particulière $k = k(\theta,\varphi)$ d'un cycle $\Gamma(\Omega)$ de $S^{(a)}$, dans laquelle on pose : $k.\Omega = a \cos\theta$. Le cycle $\gamma(-i\infty,+i\infty)$, image de $\Gamma(\Omega)$ dans le plan complexe de la variable θ est indiqué dans la figure 3 .

figure 3 page XXII-10

---

* à une constante de normalisation près.

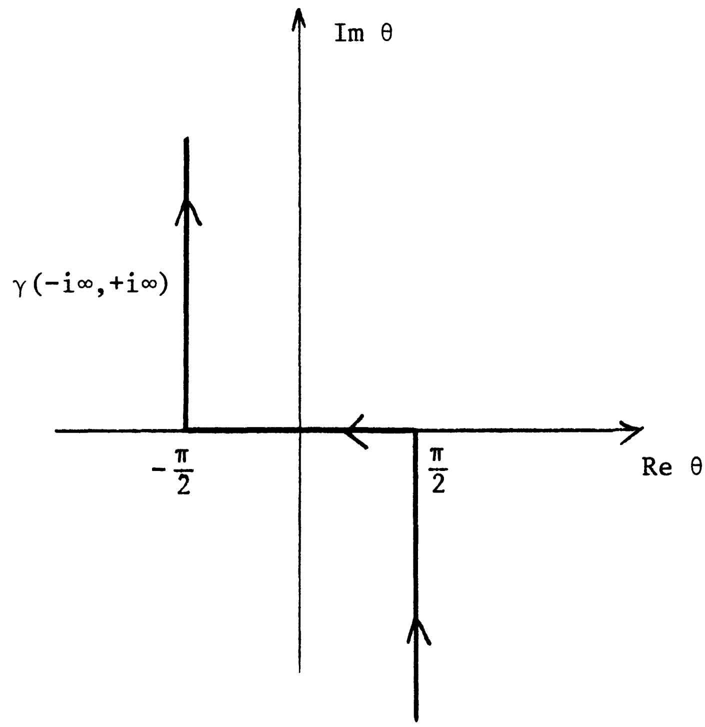

Fig. 3

<u>Deuxième exemple</u> : <u>Transformation de Laplace-Borel et représentation de Polya des fonctions entières de type exponentiel</u>.

On prend comme variété S dans $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$, la droite isotrope S_o d'équation $s(k) \equiv -(k_1 + ik_2) = 0$; on paramétrise celle-ci par la variable complexe $z = -k_2 = -ik_1$. Pour tout $\Omega = (\cos\alpha , \sin\alpha)$ dans $\mathbb{S}_1$, on définit alors :

$$\Gamma_o(\Omega) = \{(k_1,k_2) \in S_o \; ; \; k_2 = ik_1 = -\rho e^{-i\alpha} , \rho > 0\} \; ;$$

dans le plan de la variable z , $\Gamma_o(\Omega)$ est représenté par la demi-droite $L_\alpha = \{z = \rho e^{-i\alpha}\}$; les conditions de la définition 1 sont bien vérifiées par S_o et par l'ensemble de cycles $\dot{\Gamma}_o = \{\Gamma_o(\Omega) \; ; \Omega \in \mathbb{S}_1\}$. De plus, la bijection $q = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \to z = (\rho\cos\alpha, -\rho\sin\alpha)$ résultant de la relation $k \in S_o$ implique une bijection de tout espace $E_{B_o}(S_o)$ sur l'espace correspondant de fonctions entières de z , noté $E_{\tilde{B}_o}$, dont la courbe indicatrice de croissance exponentielle $\check{B}_o$ est la symétrique de B_o par rapport à l'axe 1 (dans l'identification de $\mathbb{R}^2_{(q_1,q_2)}$ avec $\mathbb{R}^2_{(\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z)}$) .

Soit F dans $E_{B_o}(S_o)$ et son image F_o dans $E_{\tilde{B}_o}$ $(F_o(z) = F(k), \forall\, k \in S_o)$. Dans le domaine Δ_{Σ_o} de $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ extérieur à la courbe $\Sigma_o = \Sigma(B_o)$, la transformée $\psi(x) = L_{S_o}^{(\dot{\Gamma}_o)}(F)$ satisfait à l'équation de Cauchy-Riemann :

$$s(-\frac{i\partial}{\partial x})\ \psi(x) = (\frac{i\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2})\ \psi(x) = 0 .$$

En posant $w = x_1+ix_2$ et en identifiant $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ à $\mathbb{C}_{(w)}$, on identifie alors $\psi(x)$ à une fonction holomorphe $f(w)$, définie dans Δ_{Σ_o}, qui n'est autre que la transformée de Laplace-Borel de F_o :

(7) $$f(w) = \int_{L_\alpha} e^{-zw} F_o(z)\, dz$$

On a donc $\mathcal{O}^{reg}(\Delta_{\Sigma_o}) = L_{S_o}^{(\dot{\Gamma}_o)}(E_{B_o}(S_o))$, $\mathcal{O}^{reg}(\Delta_{\Sigma_o})$ désignant l'espace des fonctions f holomorphes dans Δ_{Σ_o}, C^∞ dans $\bar{\Delta}_{\Sigma_o}$ et se comportant en $\mathcal{O}(\frac{1}{z})$ à l'infini.

La transformation inverse (à rapprocher de (5) : en voir ci-dessous dans IV une généralisation) est la représentation de Polya [4] :

(8) $$F_o(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Sigma} e^{zw} f(w)\, dw$$

II. REPRESENTATION INTEGRALE DES ONDES SORTANTES A SYMETRIE DE REVOLUTION.

On va considérer des ondes sortantes de l'équation de Helmholtz (en dimension $n \geqslant 2$) dans un domaine extérieur U_Σ, bordé par une hypersurface Σ convexe et de révolution autour d'un axe passant par l'origine ; soit ν un vecteur unitaire de cet axe.

On désigne par $H_+^{(\nu)}(U_\Sigma)$ l'espace des solutions sortantes dans U_Σ qui sont invariantes par le sous-groupe $\mathcal{O}_n^{(\nu)}$ de $\mathcal{O}_n$ laissant fixe le vecteur ν. Soit $\mathcal{I}_B$ la surface polaire réciproque de Σ dans $\mathbb{R}^n_{(q)}$ (c.à.d. telle que $\Sigma = \Sigma(B)$), laquelle admet elle-même la symétrie de révolution d'axe $\mathcal{O}\nu$. On déduit de la proposition 2, et en particulier de la formule d'inversion (5), que l'on a :

(9) $$H_+^{(\nu)}(U_\Sigma) = L_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_+)}(E_B^{(\nu)}(S^{(a)}))$$

où $E_B^{(\nu)}$ désigne le sous-espace de $E_B(S^{(a)})$ contenant toutes les fonctions F invariantes par le (complexifié du) groupe $\mathcal{O}_n^{(\nu)}$, agissant dans $\mathbb{C}^n_{(k)}$.

Introduisons alors l'espace $\mathbb{C}^2_{(K)}$ des variables $K_1 = k.\nu$ et $K_2 = [k^2-(k.\nu)^2]^{1/2}$ (avec $K_2 \geqslant 0$ pour k réel), et soit B_o (resp. $\mathcal{I}_{B_o}$) la section méridienne de B (resp. $\mathcal{I}_B$) considérée dans $\mathbb{R}^2_{(\mathrm{Im}K)}$. Désignons par $S_o^{(a)}$ le cercle complexe de $\mathbb{C}^2_{(K)}$ d'équation : $K_1^2 + K_2^2 = a^2$, par $\mathcal{E}^{(sym)}_{B_o}(S_o^{(a)})$ le sous-espace de $\mathcal{E}_{B_o}(S_o^{(a)})$ constitué par les fonctions invariantes par la symétrie $(K_1,K_2) \to (K_1,-K_2)$ et par δ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{E}^{(\nu)}_B(S^{(a)})$ sur $\mathcal{E}^{(sym)}_{B_o}(S_o^{(a)})$. Soit alors Π la projection de $S_o^{(a)}$ sur son asymptote isotrope S_o d'équation $K_1 + iK_2 = 0$, définie par ;

(10) $$(K_1,K_2 = \pm [a^2-K_1^2]^{1/2}) \xrightarrow{\pi} (K_1,iK_1)$$

On établit aisément la propriété suivante :

<u>Lemme</u> 1. $\pi^*(\mathcal{E}_{B_o}(S_o)) = \mathcal{E}^{(sym)}_{B_o}(S_o^{(a)})$

(l'idée étant qu'une fonction F_o dans $\mathcal{E}_{B_o}(S_o)$ et son image inverse $\pi^*(F_o)$ ont même comportement asymptotique dans chaque direction Ω de $\mathbb{R}^2_{(\mathrm{Im}\,K)}$, puisque les variétés $S_o^{(a)}$ et S_o y sont asymptotiquement proches).

Introduisons maintenant l'espace $\mathbb{R}^2_{(X)}$ des variables $X_1 = x.\nu$, $X_2 = [x^2-(x.\nu)^2]^{1/2}$, et la méridienne Σ_o de Σ dans $\mathbb{R}^2_{(X)}$: Σ_o est la frontière du polaire de B_o (par rapport au produit scalaire : $K.X = K_1X_1 + K_2X_2$) . D'après l'étude du second exemple de la partie I , $\mathbb{R}^2_{(X)}$ peut aussi s'identifier au plan complexe $\mathbb{C}_{(w)}$ des transformées de Laplace-Borel $L_{S_o}^{(\dot{\Gamma}_o)}(F_o)$.

Considérons alors l'application composée :

(11) $$\gamma = L_{S^{(a)}}^{(\dot{\Gamma}_+)} \circ \delta^{-1} \circ \pi^* \circ [L_{S_o}^{(\Gamma_o)}]^{-1}$$

D'après la formule (9), le lemme 1 et la propriété d'inversibilité de la transformation de Laplace-Borel-Polya, on obtient :

<u>Proposition</u> 3. γ est une bijection de $\mathcal{O}^{reg}(\Delta_{\Sigma_o})$ sur $H_+^{(\nu)}(U_\Sigma)$.

L'application γ est représentée par un noyau intégral $K_\nu(x,w)$ que l'on va étudier et calculer.

D'après les formules (2) et (8), on a, pour $x \in U_\Sigma$ et $\Omega \in C_x$:

(12) $$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(\Omega)} e^{ik.x} \left.\frac{dk_1\wedge\ldots\wedge dk_n}{ds}\right|_S \int_{\Sigma_o} e^{-i(k.\nu)w} f(w)dw$$

Il reste à justifier que l'on peut écrire (12) sous la forme :

$$\psi(x) = \int_{\Sigma_o} K_\nu(x,w) f(w) dw \qquad (R)$$

avec :

(13) $$K_\nu(x,w) = \frac{1}{2i\Pi} \int_{\Gamma(\Omega)} e^{ik.(x-w\nu)} \left.\frac{dk_1\wedge\ldots\wedge dk_n}{ds}\right|_S$$

Or on montre par une étude directe de l'intégrale (13) la propriété suivante :

<u>Lemme</u> 2. Etant donné un point x non situé sur l'axe O_ν et un vecteur Ω quelconque dans le demi-plan* $\pi_\nu(x)$, tel que $\Omega.\nu = \cos\alpha$, le domaine de convergence uniforme de l'intégrale (13) est un secteur D_Ω du plan de la variable w, défini comme suit (cf. aussi fig.4).

(14) $$D_\Omega = \{w \in \mathbb{C} \; ; \; \mathrm{Re}[(w-Z)e^{-i\alpha}] < 0 \; , \; \mathrm{Re}[(w-\bar{Z})e^{i\alpha}] < 0\}$$

où

(15) $$Z = X_1 + iX_2 = x.\nu + i[x^2-(x.\nu)^2]^{1/2}$$

On en déduit la convergence uniforme de l'intégrale multiple (12), et la validité de (R), en choisissant précisément Ω dans le secteur $C_x \cap \pi_\nu(x)$, identifié à C_Z^o dans le plan de la variable w (cf. fig.5).

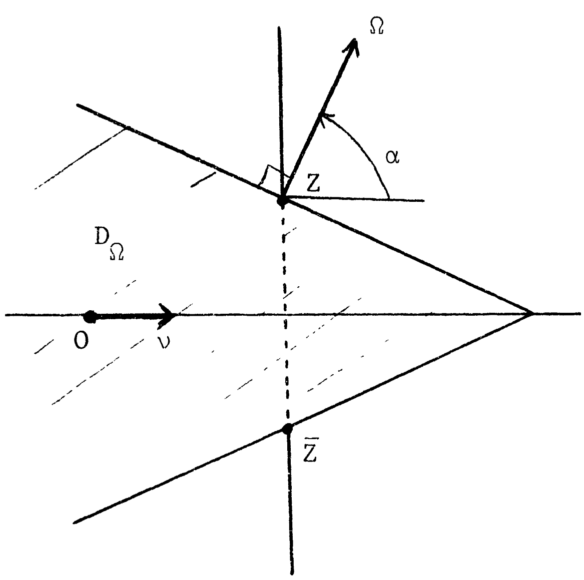

Fig. 4

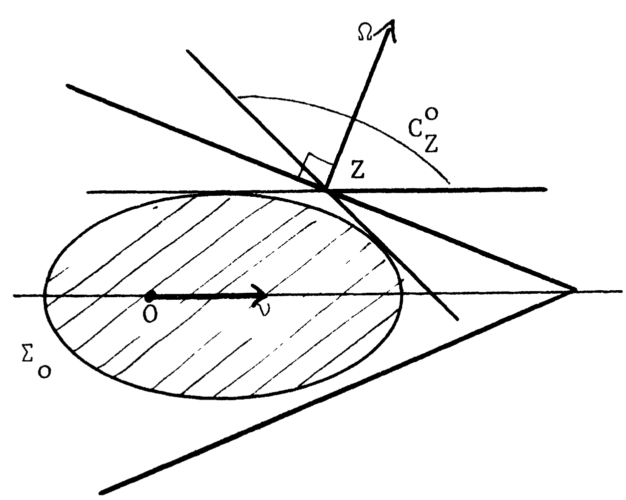

Fig. 5

* lire : "dans le demi-plan méridien $\pi_\nu(x)$ contenant x, tel que ..."

En faisant varier $\Gamma(\Omega)$, avec $\Omega \in \pi_\nu(x)$, l'intégrale (13) permet de définir le noyau $K_\nu(x,w)$ comme une fonction analytique de w dans le plan coupé

$$\mathbb{C} \setminus \{w \ ; \ w^2 - (Z+\overline{Z})w + |Z+i\rho|^2 = 0 \ ; \ \rho \geqslant 0\} \quad ,$$

avec $Z = Z(x)$ donné par la formule (15) (cf.fig.4) .

En fait, pour chaque x , $K_\nu(x,.)$ est une fonction holomorphe sur un revêtement à 2 feuillets de $\mathbb{C} \setminus \{Z(x) \cup \overline{Z}(x)\}$, comme le montre l'argument suivant qui fournit une expression explicite de K_ν :

Pour $w = \xi$ réel , K_ν coïncide avec la solution élémentaire sortante $E_a^+(|x-\xi\nu|)$, soit en particulier pour $n = 3$:

$$K_\nu^{(3)}(x,\xi) = -i\Pi \frac{e^{ia|x-\xi\nu|}}{|x-\xi\nu|}$$

Pour $w = \xi+i\eta$, avec $\eta \neq 0$, K_ν est donc le prolongement analytique de $E_a^+(|x-\xi\nu|)$ par rapport à ξ ; en écrivant que :

$$|x-\xi\nu| = [(X_1-\xi)^2 + X_2^2]^{1/2} = [(Z-\xi)\ (\overline{Z}-\xi)]^{1/2} \quad ,$$

on obtient donc (avec $Z = Z(x)$ donné par (15), et $A(\mathbb{S}_{n-2})$ désignant l'aire de $\mathbb{S}_{n-2}$)

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} K_\nu(x,w) &= E_a^+\{[(Z-w)\ (\overline{Z}-w)]^{1/2}\} \\ &= -\frac{a^{n-2}}{2} A(\mathbb{S}_{n-2}) \int_1^{+i\infty} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} e^{iau[(Z-w)(\overline{Z}-w)]^{1/2}} du \quad , \end{aligned}$$

soit en particulier, pour $n = 3$:

$$\text{(17)} \qquad K_\nu^{(3)}(x,w) = -i\Pi \frac{e^{ia[(Z-w)(\overline{Z}-w)]^{1/2}}}{[(Z-w)(\overline{Z}-w)]^{1/2}}$$

Remarque. Pour $w = \xi + i\eta$ fixé, $\eta \neq 0$, $K_\nu^{(n)}(.,w)$ apparait comme une solution de l'équation de Helmholtz dont le lieu singulier est la (n-2)-sphère $\sigma(w)$ d'axe $O\nu$, de rayon $X_2 = \eta$ et contenue dans l'hyperplan d'équation : $X_1 \equiv x.\nu = \xi$. Cette solution est non-uniforme dans $\mathbb{R}^n_{(x)} \setminus \sigma(w)$, et est en fait définie dans un revêtement à deux feuillets de $\mathbb{R}^n_{(x)} \setminus \sigma(w)$. Lorsque $\eta = 0$, $K_\nu^{(n)}(.,\xi)$ se réduit à la solution élémentaire, de singularité ponctuelle en $x = \xi\nu$.

Ainsi, la représentation intégrale (R) apparait comme une superposition de solutions du type précédent, associées à toutes les (n-2) sphères $\sigma(w)$ ($w \in \Sigma_o$) constituant les "parallèles" de la surface de révolution Σ (cette superposition étant uniforme dans U_Σ , comme $K_\nu(.,w)_{|U_\Sigma}$) .

Extension au cas non-convexe:

Supposons maintenant la surface de révolution Σ non-convexe. Il résulte de la remarque précédente que la formule (R) continue à représenter des solutions sortantes ψ de l'équation de Helmholtz dans le domaine extérieur U_Σ bordé par Σ , chacune de ces solutions étant associée à une fonction analytique f(w) dans $\mathcal{O}^{(reg)}(\Delta_{\Sigma_o})$.

En fait, on peut montrer [7] (en composant la transformation de Laplace-Borel (7) avec la formule d'inversion (5) et en étudiant le noyau résultant) que toute solution ψ dans $C_\infty(\overline{U}_\Sigma)$ est représentable par (R). En conclusion, on a le :

Théorème 1. Etant donné une hypersurface* Σ compacte, C^∞ et de révolution d'axe $\mathcal{O}\nu$, il existe une bijection de l'espace de fonctions analytiques $\mathcal{O}^{reg}(\Delta_{\Sigma_o})$ (Σ_o étant la méridienne de Σ) sur l'espace $H_+^{(\nu)}(U_\Sigma)$ de solutions de l'équation de Helmholtz. Cette bijection est représentée par l'équation intégrale (R) dont le noyau $K_\nu(x,w)$ est donné par la formule (16) (resp.(17) pour n = 3).

Application au calcul de l'amplitude d'émission d'une antenne (selon R. Omnes [5]).

L'amplitude d'émission $\phi(\Omega) = F(a\Omega)$ d'une onde sortante ψ est exprimée en fonction de ψ et de sa dérivée normale $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sur la surface d'émission Σ au moyen de la formule (5), dans laquelle on prend $k = a\Omega$. Cette formule étant peu maniable, si les données physiques du problème s'expriment purement en termes de ψ (ou de $\frac{\partial\psi}{\partial n}$) sur Σ , la méthode proposée dans le cas où Σ est de révolution comporte les deux étapes suivantes (la seconde étant triviale) :

i) calculer $f_{|\Sigma_o}$ en fonction de $\psi_{|\Sigma}$, en inversant la représentation (R), considérée comme une équation de Fredholm de première espèce sur la méridienne Σ_o de Σ .

ii) calculer $\phi(\Omega) = F_o[a(\Omega.\nu)]$ en fonction de $f_{|\Sigma_o}$ au moyen de la représentation de Polya (formule (8)).

Compte-tenu de l'expression (17) de $K_\nu^{(3)}$, l'équation de Fredholm à résoudre pour $f_{|\Sigma_o}$ est la suivante :

$$\psi_o(Z) = \frac{i\Pi}{2} \int_{\Sigma_o} \frac{e^{ia[(Z-w)(\overline{Z}-w)]^{1/2}}}{[(Z-w)(\overline{Z}-w)]^{1/2}} f(w)\, dw \quad , \tag{18}$$

où l'on a posé :

* on peut s'affranchir du caractère C^∞ , et étendre le résultat aux hypersurfaces de classe C^1 , avec $\psi_{|\Sigma}$ et $f_{|\Sigma_o}$ de classe C^1 .

$$\psi_o(Z) = \psi_o(x.\nu + i[x^2-(x.\nu)^2]^{1/2}) = \psi(x) \tag{19}$$

Le noyau présente, à $w = Z$ et $w = \bar{Z}$ deux singularités de type faible, au comportement en $(Z-w)^{-1/2}$ (resp. $(\bar{Z}-w)^{-1/2}$) comparable à celui de la transformation intégrale d'Abel (ces deux singularités fusionnant aux points $w = \xi$ réel, c'est à dire aux points d'intersection de Σ_o avec l'axe de révolution). L'inversion de (18) semble donc être un problème numériquement traitable, pouvant fournir une méthode utilisable dans des applications pratiques du type "calcul de l'amplitude d'émission d'une antenne", la forme de Σ_o étant suggérée par la figure 6 .

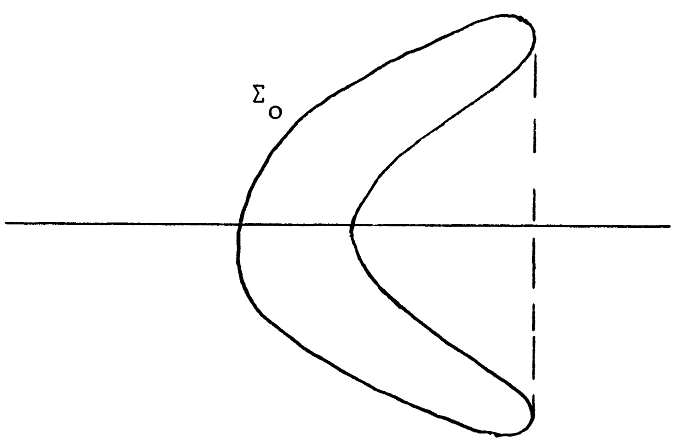

Fig. 6

III. TRANSFORMATIONS $L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES DU TYPE "ONDE SORTANTE".

L'exemple de la sphère $S^{(a)}$ et de l'équation de Helmholtz se généralise en imposant à la variété P.P.admissible S et à la section d'homologie isotrope $\dot{\Gamma}$ de satisfaire aux conditions suivantes :

(C_1) Il existe au moins une composante connexe S_o de $S \cap \mathbb{R}^n$ qui est une hypersurface compacte, formant la frontière d'un domaine convexe contenant l'origine.

A chaque direction Ω ($\Omega \in \mathbb{S}_{n-1}$), on associe alors les "pôles" p_Ω^+ , p_Ω^- , points de S_o en lesquels l'hyperplan tangent à S_o est orthogonal à Ω , avec la spécification : $p_\Omega^+ . \Omega > 0$, $p_\Omega^- . \Omega < 0$. On introduit de même dans S_o un "(n-2)-équateur" $\varepsilon(\Omega)$ (par la condition : hyperplan tangent parallèle à Ω) divisant S_o en deux "hémisphères" $S_+(\Omega)$ et $S_-(\Omega)$ contenant respectivement p_Ω^+ et p_Ω^- . $S_+(\Omega)$ et $S_-(\Omega)$ sont orientés par la normale Ω en p_Ω^+ et p_Ω^- , de sorte que l'on a (au sens des chaînes) : $S_o = S_+(\Omega) - S_-(\Omega)$.

(C_2) Il existe une section $\dot{\Gamma}$ de S , notée : $\dot{\Gamma}_+ = \{\Gamma_+(\Omega); \Omega \in \mathbb{S}_{n-1}\}$, telle que pour chaque Ω, on ait :

$$\Gamma_+(\Omega) = \Gamma'(\Omega) + S_+(\Omega) ,$$

avec la condition : $\mathrm{supp}\Gamma'(\Omega) \cap S_o = \varepsilon(\Omega)$.

Nous dirons de plus qu'un cycle $\Gamma_+(\Omega)$ est "dominé" par S_o si l'on a :

a) p^+_Ω est le seul point de $[\mathrm{supp}\Gamma_+(\Omega) \cap \mathbb{R}^n]$, en lequel l'hyperplan tangent à $S \cap \mathbb{R}^n$ est orthogonal à Ω .

b) $\forall\ k = p+iq \in \mathrm{supp}\Gamma_+(\Omega) \setminus S_+(\Omega)$, $q.\Omega \geqslant 0$

Si ces conditions sont vérifiées pour toute direction Ω , nous dirons que $\dot{\Gamma}_+$ est dominée par S_o (cas de la sphère $S^{(a)}$) .

Remarques. i) la condition (C_2) implique l'existence d'une section $\dot{\Gamma}_- = \{\Gamma_-(\Omega)\}$ telle que : $\Gamma_-(\Omega) = \Gamma'(\Omega) + S_-(\Omega)$, et dont les propriétés sont similaires à celles de $\dot{\Gamma}_+$. Pour tout Ω , on a : $\Gamma_+(\Omega) - \Gamma_-(\Omega) = S_o$.

ii) Si S possède d'autres composantes connexes réelles S_λ (considérées comme des (n-1)-cycles), toute section $\dot{\Gamma}^{(\lambda)}_+ = \dot{\Gamma}_+ + \dot{S}_\lambda$ ou $\dot{\Gamma}^{(\lambda)}_- = \dot{\Gamma}_- + \dot{S}_\lambda$ (où $\dot{S}_\lambda$ représente la section de fibre constante S_λ) satisfait également la conditon (C_2) .

Une classe d'exemples est fournie par des variétés $S(R,\lambda)$ d'équation :

$$s(k) \equiv (k_1^2 + \ldots + k_n^2 - a^2)\, R(k_1,\ldots,k_n) - \lambda = 0 ,$$

où R est un polynôme à coefficients réels et $\lambda > 0$.

En effet, si Ω_o désigne une direction telle que l'ensemble $\{k = p+iq\ ;\ q = Q\Omega_o\ ,\ k_1^2+\ldots+k_n^2 - a^2 = 0\ ,\ R(k_1,\ldots,k_n) = 0\}$ est vide et si λ est assez petit, il existe en général une composante connexe réelle convexe S_o et un cycle $\Gamma_+(\Omega_o)$ de $S(R,\lambda)$, voisins du couple correspondant $(S_o,\Gamma_+(\Omega_o))$ de la (n-1)-sphère $S^{(a)}$ et tels que $\Gamma_+(\Omega_o)$ soit dominé par S_o . On cherchera alors à définir $\dot{\Gamma}_+ = \{\Gamma_+(\Omega)\ ;\ \Omega \in \mathbb{S}_{n-1}\}$ par homotopie à partir de $\Gamma_+(\Omega_o)$.

Un exemple simple et correspondant d'ailleurs à une équation non-elliptique est donné par la cubique d'équation :

$$s(k) \equiv (k_1^2+k_2^2-a^2)\ (k_1-b) - \lambda = 0 ,$$

avec par exemple $b > a$.

On construit une section $\dot{\Gamma}_+$ par homotopie à partir du cycle $\Gamma_+(\Omega_o)$ correspondant à la direction $\Omega_o(-1,0)$, voisin du cycle $\Gamma_+(\Omega_o)$ du cercle $S^{(a)}$ (cf. fig.7). On constate alors l'apparition progressive de la branche infinie γ de la cubique dans des $\Gamma_+(\Omega)$ tels que $\Omega.\Omega_o < \cos\theta$ (cf. fig.7); $\Gamma_+(\Omega)$ cesse alors d'être "dominé" par S_o lorsque $-1 \leqslant \Omega.\Omega_o \leqslant -\sin\theta$. Une autre section $\dot{\Gamma}'_+$ aux propriétés analogues est définie par $\dot{\Gamma}'_+ = \dot{\Gamma}_+ + \dot{\gamma}$ (avec une orientation convenable de γ).

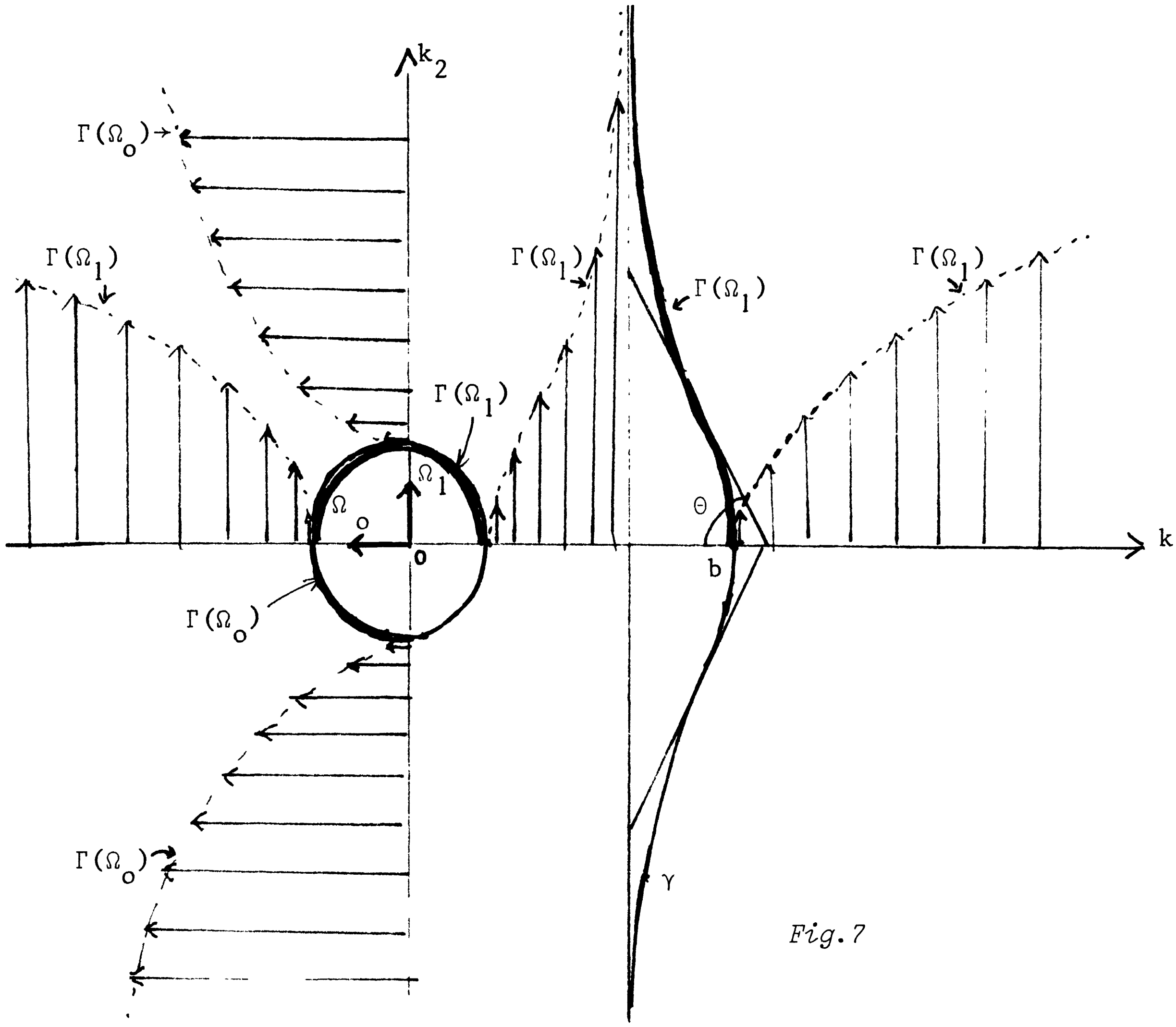

Fig. 7

Dans d'autres exemples, tels que la quartique $s(k) \equiv (k_1^2+k_2^2-a^2)\ (k_1^2+b^2)-\lambda\ = 0$, on verra apparaître un autre phénomène, à savoir l'apparition pour certaines valeurs de Ω de "petits cycles" compacts (évanescents dans la limite $\lambda \to 0$) : ce phénomène motive la précaution prise dans la définition des sections d'homologie isotropes $\dot{\Gamma}$ (cf. I définition 1, condition a)).

Pour la classe d'exemples proposée, l'équation associée $\Delta \times R(-\frac{i\partial}{\partial x})\psi-\lambda\psi = 0$ est toujours non-hyperbolique, mais pas nécessairement elliptique.

Les notions précédentes permettent de généraliser à ces équations les propriétés de comportement asymptotique du type "onde sortante" rappelées ci-dessus pour les solutions de l'équation de Helmholtz (cf. proposition 2).

On montre en effet le

Théorème 2. Soit une variété P.P.admissible S munie d'une section d'homologie $\dot{\Gamma}_+$, telle que les conditions (C_1) et (C_2) soient satisfaites. Pour toute fonction F dans un espace $E_B(S)$, la solution correspondante $\psi_+ = L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}(F)$ de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\,\psi(x) = 0$, définie dans $U_{\Sigma(B)}$, admet les propriétés asymptotiques suivantes :

Pour toute direction Ω telle que $\Gamma_+(\Omega)$ soit dominé par S_o, on a :

$$(20) \qquad \psi_+(x)\big|_{x=r\Omega} = C_n\, F(p_\Omega^+)\, \frac{e^{i(p_\Omega^+.\Omega)r}}{r^{\frac{n-1}{2}}} + o\Big(\frac{1}{r^{\frac{n+1}{2}}}\Big)$$

(C_n étant une constante déterminée).

De plus, il existe une solution correspondante $\psi_- = L_S^{(\dot{\Gamma}_-)}(F)$ (où $\dot{\Gamma}_- = \dot{\Gamma}_+ - \dot{S}_o$) admettant pour le même ensemble de directions Ω le comportement suivant :

$$(20)' \qquad \psi_-(x)\big|_{x=r\Omega} = C_n\, F(p_\Omega^-)\, \frac{e^{i(p_\Omega^-.\Omega)r}}{r^{\frac{n-1}{2}}} + o\Big(\frac{1}{r^{\frac{n+1}{2}}}\Big)$$

La démonstration du théorème 2 (donnée dans [7]) repose sur une adaptation de la méthode de la phase stationnaire*; la fonction de phase $\varphi_\Omega = (k.\Omega)|_S$ intervenant dans l'expression (2) de $L_S^{(\dot{\Gamma})}$ pour $x = r\Omega$ admet en effet un point critique quadratique non dégénéré au point $k = p_\Omega^+$ (d'après les conditions (C_1), (C_2)) ; l'hypothèse "$\Gamma_+(\Omega)$ est dominé par S_o" assure que ce point critique de φ_Ω est le seul pour k réel et que le comportement asymptotique (20) qu'il produit domine celui que produirait tout autre point critique de φ_Ω sur $\Gamma_+(\Omega)$.

Remarques. i) Ces résultats s'exprimeraient sous forme de conditions du type "condition de radiation de Sommerfeld" , et seraient à comparer, dans les cas elliptiques avec les résultats de [8].

ii) A toute section $\dot{\Gamma}_+$ (resp. $\dot{\Gamma}_-$) de S est associée une solution élémentaire $E_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ (resp. $E_S^{(\dot{\Gamma}_-)}$) de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\,\psi(x) = 0$, dont la définition dans notre approche est :

$$E_S^{(\dot{\Gamma}_+)} = L_S^{(\dot{\Gamma}_+)}(1) \quad (\text{resp. } E_S^{(\dot{\Gamma}_-)} = L_S^{(\dot{\Gamma}_-)}(1))$$

(Noter cependant que $1 \in E_{\{o\}}(S)$ si et seulement si S est elliptique ; dans

---

* dans un esprit voisin de [11].

les autres cas $L_S^{\dot{\Gamma}_+}(1)$ reste défini au sens des distributions). Le lien avec l'introduction habituelle des solutions élémentaires comme transformées de Fourier de $\frac{1}{s(k)}$ reste à faire en général ; le cas de l'équation de Helmholtz indique que ce lien repose sur la formule des résidus appliquée aux cycles $\Gamma_+(\Omega)$ de S et à leurs cobords de Leray dans $\mathbb{C}^n \setminus S$.

IV . INVERSION DES TRANSFORMATIONS $L_S^{(\dot{\Gamma})}$.

(21) Soit $\omega_s(F,z) = e^{ik.z} F(k) \left.\frac{dk_1\wedge\ldots\wedge dk_n}{ds}\right|_S$

la "(n-1)-forme de Fourier-Laplace" à valeurs * dans $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_{(z)})$, intervenant dans une transformation du type :

(22) $$\psi(z) = \int_{\dot{\Gamma}} \omega_s(F,z) .$$

A une telle forme, nous allons associer une forme $\tilde{\omega}_s(\psi,k)$ à valeurs dans $\mathcal{O}(S)$, dite "forme Fourier-inverse de ω_s " , telle que :

i) $\forall\ k \in S$, $d\tilde{\omega}_s(\psi,k) = 0$

ii) sous des conditions à préciser, il existe une formule d'inversion du type suivant :

$$F(k) = \int_{\dot{\Sigma}} \tilde{\omega}_s(\psi,k) \qquad (I_s)$$

pour une classe d'homologie appropriée $\dot{\Sigma}$ de (n-1)-cycles Σ à support dans le domaine ** de ψ .

Nous montrerons que cette propriété recouvre :

a) l'inversion de la transformation de Fourier usuelle.

b) l'inversion des transformations de Fourier "localisées" F_ϕ de [9] utilisées pour la théorie des fronts d'onde analytiques de distributions (cf.[10]).

c) l'inversion des transformations $L_S^{(\dot{\Gamma})}$ associées à des variétés P.P.admissibles, en particulier :

- la représentation de Polya pour la transformation de Laplace-Borel.
- le théorème d'inversion fourni ci-dessous (cf.[7] pour une démonstration complète de ce théorème), valable pour une classe appropriée de transformations

* Dans le cadre général, il est en effet naturel de considérer le complexifié $\mathbb{C}^n_{(z)}$ de l'espace $\mathbb{R}^n_{(x)}$ des parties précédentes.

** Ce domaine peut être une sous-variété stricte de $\mathbb{C}^n_{(z)}$, par exemple un ouvert de $\mathbb{R}^n_{(x)}$.

$\mathcal{L}_S^{(\dot{\Gamma}_+)}$ généralisant le cas de l'équation de Helmholtz (c'est à dire la formule (5)).

Ces différents cas nous incitent à postuler dans le cas général l'existence de formules d'inversion du type (I_s) comme une conjecture dont la validité reste soumise à une étude géométrique portant sur les points suivants :

1) Définition de triplets $(\mathcal{E},D,\dot{\Gamma})$ admissibles, où $\mathcal{E}$ désigne une classe de fonctions F possédant un domaine de définition D dans S et admettant un comportement de type exponentiel (spécifié par une "indicatrice", dans un sens plus général que dans I), et où $\dot{\Gamma}$ est une classe d'homologie de $(n-1)$-cycles Γ de S, tels que $\operatorname{supp}\Gamma \subset D$.

2) Etude des classes de domaines de définition Δ(dans $\mathbb{C}^n_{(z)}$) des solutions ψ de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial z})\psi(z) = 0$ ainsi que du comportement exponentiel de ces solutions, en fonction du triplet $(\mathcal{E},D,\dot{\Gamma})$ considéré.

3) Etude des classes d'homologie $\dot{\Sigma}$ de $(n-1)$-cycles à support dans Δ et de la correspondance $\dot{\Gamma} \to \dot{\Sigma}$ permettant l'établissement d'une formule du type (I_s)

Définition de la forme $\tilde{\omega}_s(\psi,k)$.

Au polynôme $s(k)$ dans $\mathbb{C}^n$, on associe un polynôme ρ dans $\mathbb{C}^n_{(k)} \times \mathbb{C}^n_{(k')}$, à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^n$, dont les composantes $\rho_j(k,k')$ pour la base choisie de $\mathbb{C}^n_{(k)}$ (où $k = (k_1,\dots,k_n)$) sont définies par l'identité algébrique suivante :

$$(23) \qquad s(k) - s(k') = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (k_j-k'_j)\, \rho_j(k,k')$$

A toute fonction ψ suffisamment différentiable et de domaine Δ dans $\mathbb{C}^n_{(z)}$, on associe alors le champ de vecteur suivant dans $\Delta \times \mathbb{C}^n_{(k)}$:

$$\rho^{(\psi)}(z,k) = \rho(-\frac{i\partial}{\partial z}, k)\ \psi(z)$$

et la $(n-1)$-forme sur Δ, à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_{(k)})$:

$$(24) \qquad W_s(\psi;k)(z) = e^{-ik.z}[\operatorname{int} \rho^{(\psi)}(.,k).\alpha]\ (z)$$

où α désigne la forme volume holomorphe ($\alpha = \frac{1}{(2i\Pi)^{n-1}}\, dz_1\wedge\dots\wedge dz_n$) .

Avec les coordonnées choisies, la forme $W_s(\psi,k)$ admet l'expression suivante :

$$(24)' \ W_s(\psi,k)(z)= \frac{1}{(2i\Pi)^{n-1}}\, e^{-ik.z} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (-1)^{j-1}\rho_j(-\frac{i\partial}{\partial z},k)\psi(z)dz_1\wedge\dots\wedge\widehat{dz_j}\wedge\dots\wedge dz_n$$

Un calcul direct donne alors :

(25) $dW_s(\psi,k)(z) = e^{-ik.z}[s(-\frac{i\partial}{\partial z})-s(k)]\,\psi(z)\alpha(z)$

D'où la

Proposition 4. Pour toute solution ψ de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial z})\psi(z) = 0$ (de domaine quelconque Δ), la forme associée $W_s(\psi,k)$ satisfait la condition :

(26) $$dW_s(\psi,k)(z) = -\, e^{-ik.z}s(k)\psi(z)\alpha(z)$$

Soit alors $\tilde{\omega}_s(\psi,k)$ la (n-1) forme sur Δ à valeur dans $\mathcal{O}(S)$, obtenue par restriction de $W_s(\psi;k)$ à $\{k;\ k \in S\}$. On a le

Corollaire. $d\tilde{\omega}_s(\psi;k) = 0$

Formules d'inversion du type (I_s):

a) Transformation de Fourier usuelle.

S est l'hyperplan $k_1 = 0$, et $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1}_{(\underline{k})}$, où $\underline{k} = (k_2,\dots,k_n)$. On pose aussi $z = (z_1,\underline{z})$ et $\underline{k}.\underline{z} = \sum\limits_{2\leqslant j\leqslant n} k_j z_j$. On a alors :

$\omega_s(F,z) = e^{i\underline{k}.\underline{z}}\, F(\underline{k})\; dk_2\wedge\dots\wedge dk_n$. D'où : $\psi(x) = \psi(\underline{x})$ $(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0$ et $\Delta = \mathbb{R}^n_{(x)}$), et $\tilde{\omega}_s(\psi,k) = e^{-i\underline{k}.\underline{x}}\,\psi(\underline{x})dx_2\wedge\dots\wedge dx_n$; $\dot{\Sigma}$ est alors la classe des hyperplans $x_1 = C^{te}$.

b) Transformations $\mathcal{F}_\phi$.

On choisit pour S une variété du type paraboloïde : $s(k) \equiv k_1 - \phi(\underline{k}) = 0$, où ϕ admet un point critique quadratique non dégénéré à $\underline{k} = 0$, tel que de plus : $\phi(\underline{k}) > 0$ pour $\underline{k}$ réel $\neq 0$. $\dot{\Gamma}$ est la classe des déformations locales de $S \cap \mathbb{R}^n$ (paramétrisée par $\mathbb{R}^{n-1}_{(\underline{k})}$) dans un domaine T de S du type "tube local", dont la fermeture contient le point $k = 0$. On a alors :

$$\omega_s(F,z) = e^{i\phi(\underline{k})z_1}\; e^{i\underline{k}.\underline{z}}\, F(\underline{k})\; dk_2\wedge\dots\wedge dk_n$$

Pour les fonctions F définies sur $D = (S\cap\mathbb{R}^n) \cup T$, analytiques dans T et telles que* $F_{|S\cap\mathbb{R}^n} \in \mathcal{D}(S\cap\mathbb{R}^n)$, la transformée ψ est une solution de l'équation

* Cette condition peut en fait être supprimée, si $\liminf\limits_{\underline{k}\to\infty} \phi(\underline{k}) > 0$ pour $k \in S\cap\mathbb{R}^n$; par ailleurs (cf. [10]), $F_{|S\cap\mathbb{R}^n}$ peut être remplacée par une distribution (valeur au bord de F dans $\overline{T}\cap\mathbb{R}^n$).

$-\frac{i\partial\psi}{\partial z_1} = \phi(-\frac{i\partial}{\partial \underline{z}})\,\psi$ définie dans le "tube aplati" :
$\Delta = \{z = (z_1, \underline{z}); y_1 = \mathrm{Im}\, z_1 \geqslant 0\ ,\ \mathrm{Im}\, \underline{z} = 0\}$ et admettant une majoration exponentielle en $e^{-\gamma y_1}$ (avec $\gamma > 0$) dans tout sous-ensemble de Δ de la forme :

$$\Delta_{\alpha T} = \{z \in \Delta\ ;\ \mathrm{Re}\, z_1 = \alpha\ ,\ (\mathrm{Im}\, z_1\ ,\ \mathrm{Re}\, \underline{z}) \notin C_T\}\ ,$$

C_T désignant un cône convexe (dans $\{\mathrm{Im}\, z_1 > 0\}$) déterminé à partir du tube local T par une transformation polaire appropriée (cf.[9]).

On constate que la forme inverse $\tilde{\omega}_s(\psi, z)$ se restreint dans l'hyperplan $z_1 = 0$ à la forme inverse de Fourier usuelle et on montre (cf.[9]) que la formule d'inversion (I_s) est valable (et redonne F dans D) si l'on choisit pour $\dot{\Sigma}$ la classe des (n-1)-cycles qui (pour un certain réel α) ont leur support dans $\Delta_{\alpha T}$ et sont homologues à l'hyperplan $\Delta \cap \{z_1 = \alpha\}$ dans $\Delta_{\alpha T}$.

c) <u>Transformations</u> $\mathcal{L}_S^{(\dot{\Gamma})}$ <u>associées à une variété S P.P.admissible</u>.

F appartient à une classe $\mathcal{E}_B(S)$, et sa transformée ψ est solution de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial z})\psi(z) = 0$ dans un domaine Δ tel que $\Delta \cap \mathbb{R}^n_{(x)} = U_{\Sigma(B)}$ (avec les notations de I).

Les exemples considérés dans I donnent respectivement :

i) Pour $s(k) = -(k_1 + ik_2)$, dans $\mathbb{C}^2$: la formule (I_S) coïncide avec la représentation de Polya (8), en remarquant que :

$$\tilde{\omega}_s(\psi, k) = \frac{1}{2i\pi}\,\psi(x_1, x_2)\ e^{-ik_1(x_1+ix_2)}(dx_1 + idx_2)$$

$$\left(= \frac{1}{2i\pi}\, f(w)\, e^{zw} dw \quad \text{avec les notations de I}\right).$$

ii) Pour $s(k) = k_1^2 + \ldots + k_n^2 - a^2$, dans $\mathbb{C}^n$: la formule (I_S) coïncide avec la formule (5) (cf. proposition 2), avec :

$$\tilde{\omega}_s(\psi, k) = \frac{1}{(2i\pi)^{n-1}}\ e^{-ik.z} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{j-1}\left(k_j - \frac{i\partial}{\partial z_j}\right)\psi(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dz_j} \wedge \ldots \wedge dz_n$$

Dans les deux cas, la classe $\dot{\Sigma}$ intervenant dans (I_s) est la classe des (n-1) cycles <u>compacts</u> Σ à support dans Δ qui sont homologues à $\Sigma(B)$ (dans Δ).
On donne ci-dessous une généralisation de la formule d'inversion (I_s) à des transformations $\mathcal{L}_S^{(\dot{\Gamma})}$ satisfaisant des conditions appropriées.

On démontre d'abord :

Proposition 5. Soit Σ une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n_{(x)}$ et U_Σ le domaine extérieur bordé par Σ . Pour toute solution ψ de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\ \psi(x) = 0$, définie dans $\overline{U}_\Sigma$ et contenue dans $C^\infty(\overline{U}_\Sigma)$, la fonction associée :

$$(27) \qquad F_\psi(k) = \int_\Sigma \tilde{\omega}_s(\psi,k)$$

appartient à l'espace $E_B(S)$ tel que $B = B(\Sigma)$ soit le polaire de Σ .

De plus, le noyau de l'application définie par la formule (27) contient toutes les solutions ψ prolongeables dans le domaine intérieur à Σ .

La démonstration de cette propriété (très voisine du théorème de Plancherel et Polya) s'obtient par application du théorème de Stokes à la forme $\tilde{\omega}_s(\psi,k)$, fermée dans le domaine de ψ .

Remarque. Supposons qu'une solution ψ , définie dans $\overline{U}_\Sigma$, se prolonge dans le domaine V_Σ intérieur à Σ suivant une solution ψ_{pr} de l'équation :

$$s(-\frac{i\partial}{\partial x})\ \psi_{pr.}(x) = f(x) \ , \text{ avec supp } f \subset V_\Sigma$$

Il résulte alors de la formule (25) et du théorème de Stokes que si $\tilde{f}$ désigne la fonction entière sur $\mathbb{C}^n_{(k)}$ transformée de Fourier-Laplace de f , la fonction F_ψ définie par (27) satisfait la relation suivante :

$$(28) \qquad F_\psi = 2i\Pi\tilde{f}_{|S}$$

Etant donné une sous-variété S satisfaisant la condition (C_1) et une section $\dot{\Gamma}_+$ sur S satisfaisant la condition (C_2) (cf.III), introduisons alors les notions suivantes :

a) $\dot{\Gamma}_+$ est dite "simple par rapport à une direction ν " ($\nu \in \mathbb{S}_{n-1}$) si le cycle $\Gamma_+(\nu)$ satisfait la condition suivante : soit π_ν la projection orthogonale de $\mathbb{C}^n_{(k)}$ sur l'hyperplan réel $h_\nu = \{p \in \mathbb{R}^n ; p.\nu = 0\}$, $(\pi_\nu(p+iq) = p-(p.\nu)\nu)$ et soit $M_\nu = \pi_\nu(S_+(\nu))$; alors $\pi_\nu^{-1}(M_\nu) \cap \text{supp}.\Gamma_+(\nu) = S_+(\nu)$.

b) $\dot{\Gamma}_+$ est dite "régulière par rapport à une direction ν " s'il existe un voisinage C_ν de la direction $(-\nu)$, et des constantes α , β , $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, tels que :

$$\forall\ \Omega \in C_\nu,\ \forall\ k = p+iq \in \Gamma_+(\Omega) \ , \text{ on ait :}$$

$$(29) \qquad q = Q\Omega \quad \text{et } p.\nu \ \leq\ \alpha Q + \beta\ p^+_\nu.\nu$$

On a alors la propriété suivante :

Théorème 3. Soit S une sous-variété P.P.-admissible munie d'une section $\dot{\Gamma}_+$, telle que les conditions (C_1) et (C_2) soient satisfaites. Si de plus il existe une direction ν telle que $\dot{\Gamma}_+$ soit simple et régulière par rapport à cette direction, alors pour tout espace $\mathcal{E}_B(S)$, on a :

$$(30) \quad \forall\, F \in \mathcal{E}_B(S) \quad \text{et } \psi = \mathcal{L}_S^{(\dot{\Gamma}_+)}(F)\,, \quad F(k) = \int_{\Sigma(B)} \tilde{\omega}_s(\psi,k)$$

La démonstration (donnée intégralement dans [7]) s'articule de la façon suivante : grâce à la proposition 5, il suffit (d'après le principe du prolongement analytique) de démontrer la formule (30) pour k appartenant à un voisinage d'un point donné de S : on choisit le point p_ν^+. On va alors utiliser le fait, impliqué par la régularité de $\dot{\Gamma}_+$ par rapport à ν, que ψ est définie dans un domaine approprié Δ du tube aplati : $\{z = (z_1,\underline{z})\ ;\ z_1 = z.\nu\ ,\ \underline{z}.\nu = 0\ ,\ \operatorname{Im} z_1 \leqslant 0\ ,\ \operatorname{Im}\underline{z} = 0\}$, y est analytique par rapport à z_1 et y satisfait une majoration exponentielle en $e^{\beta(p_\nu^+.\nu)|\operatorname{Im} z_1|}$. Cette majoration entraînera la décroissance exponentielle de la $(n-1)$-forme $\tilde{\omega}_s(\psi,k)$ dans Δ, pour k voisin de p_ν^+. Il sera alors possible, par application du théorème de Stokes au second membre de (30), de remplacer le cycle d'intégration compact $\Sigma(B)$ par un cycle non-compact Σ', de support contenu dans une région du type $\Delta_{\alpha T}$ décrit plus haut* (cf. le paragraphe b) consacré aux transformations $\mathcal{F}_\phi$) : l'identification de $\int_{\Sigma'} \tilde{\omega}_s(\psi,k)$ à $F(k)$ (pour k voisin de p_ν^+) s'effectue alors comme dans le cas des transformations $\mathcal{F}_\phi$ (à quelques différences techniques près), grâce au caractère "simple" de $\dot{\Gamma}_+$ par rapport à la direction ν (noter que l'hémisphère $S_+(\nu)$ joue alors le même rôle que la surface parabolique réelle $p_1 = \phi(p)$ dans le cas de $\mathcal{F}_\phi$).

Remarque. Le théorème ci-dessus s'applique de façon identique à la section $\dot{\Gamma}_-$ associée à $\dot{\Gamma}_+$ (cf. III), comme cela résulte de la fin de la proposition 5 (puisque $\psi_+ - \psi_- = \mathcal{L}_S^{(\dot{\Gamma}_+)}(F) - \mathcal{L}_S^{(\dot{\Gamma}_-)}(F)$ est une solution prolongeable dans le domaine intérieur à Σ). Pour la même raison, il s'applique également à toute autre section $\dot{\Gamma}'_+$ ou $\dot{\Gamma}'_-$ différant des précédentes par un $(n-1)$-cycle réel fixe : ce cas a été illustré plus haut (cf. III) par l'exemple de la cubique d'équation $s(k) \equiv (k_1^2+k_2^2-a^2)(k_1-b) - \lambda = 0$.

Formules de type convolution et formules de Green.

Soit $F_1 \in \mathcal{E}_{B_1}(S)$ et $F_2 \in \mathcal{E}_{B_2}(S)$. On considère le produit $F = F_1 \times F_2$, lequel appartient à un espace $\mathcal{E}_B(S)$ défini par l'indicatrice $\sigma_B = \sigma_{B_1} + \sigma_{B_2}$.

---

* à condition de changer z_1 en $-z_1$

On désigne alors par ψ,ψ_1,ψ_2 les transformées respectives de F,F_1,F_2 par l'application $L_S^{(\dot\Gamma_+)}$. Il résulte du théorème 3 et de l'expression (24)' de $W_s(\psi,k)$ que ψ_{12} se calcule à partir de ψ_1 et ψ_2 par la formule suivante, de type convolution :

$$(31)\quad \psi_{12}(x) = \frac{1}{(2i\Pi)^{n-1}} \int_{y\in\Sigma(B_1)} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (-1)^{j-1} \rho_j\left(-\frac{i\partial}{\partial y}, -\frac{i\partial}{\partial x}\right)\psi_1(y)\psi_2(x-y)\, dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_j}\wedge\ldots\wedge dy_n \; .$$

Cette formule est valable pour tout x dans le domaine extérieur $U_{\Sigma(B)}$; $\Sigma(B)$ est défini géométriquement comme l'enveloppe de toutes les surfaces $\Sigma_y(B_2)$, translatées de $\Sigma(B_2)$ par les translations de vecteur y, lorsque y varie dans $\Sigma(B_1)$. (cf. figure 8).

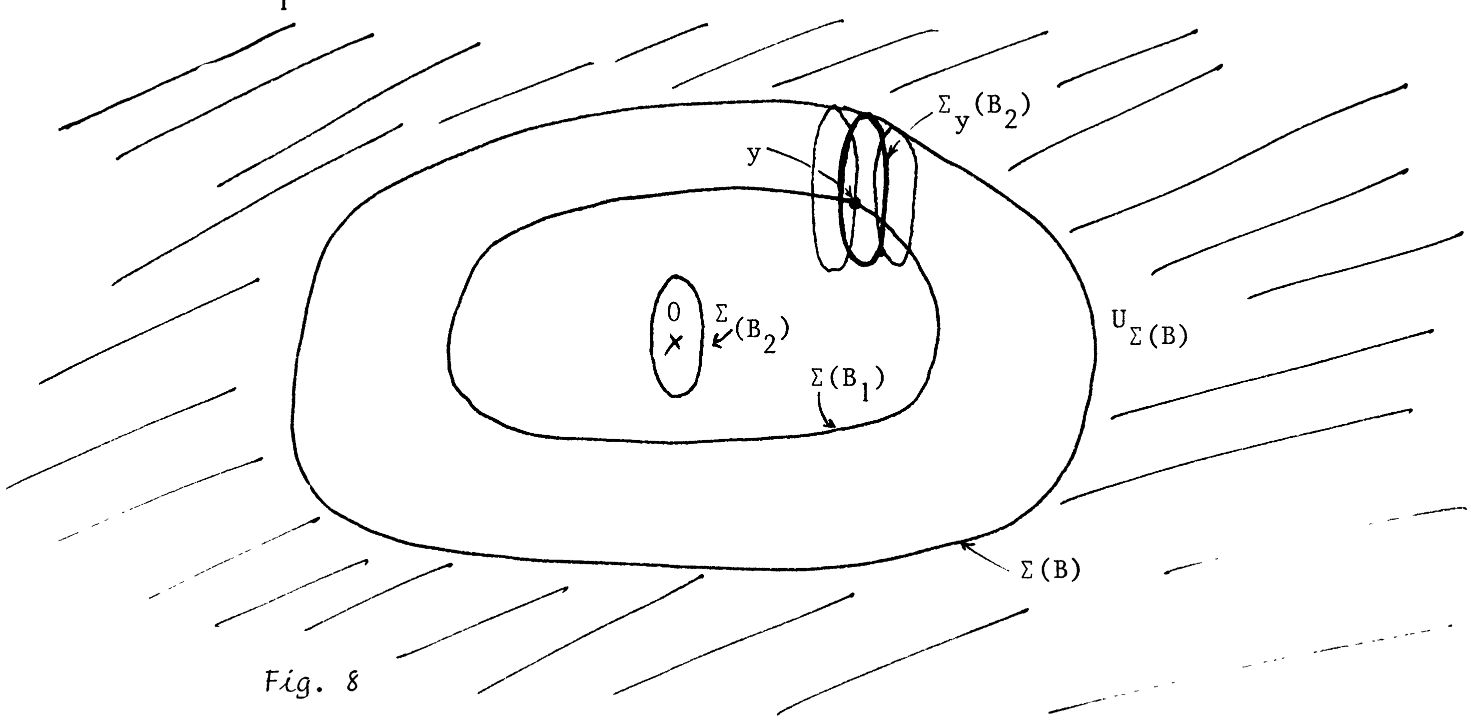

Fig. 8

En remplaçant F_2 par 1, c'est à dire ψ_2 par la "solution élémentaire" $E_S^{(\dot\Gamma_+)} = L_S^{(\dot\Gamma_+)}(1)$ de l'équation $s(-\frac{i\partial}{\partial x})\psi(x) = 0$, on obtient à la place de (31) une représentation intégrale de $\psi(=\psi_1)$ du type "formule de Green", à savoir :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2i\Pi)^{n-1}} \int_{y\in\Sigma(B)} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (-1)^{j-1} \rho_j\left(-\frac{i\partial}{\partial y}, -\frac{i\partial}{\partial x}\right)\psi(y)E_S^{(\dot\Gamma_+)}(x-y)\, dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_j}\wedge\ldots\wedge dy_n$$

On fera seulement attention de prendre éventuellement cette dernière formule au sens des distributions, dans les cas non-elliptiques où (du fait des branches infinies réelles de S), $E_S^{(\dot\Gamma_+)}$ admet un front d'onde C^∞ non réduit à zéro.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] M. Plancherel et G. Polya : Comment. Math. Helv. 9, 224-248 (1937) et 10, 110-163 (1938).

[2] M. Lax et H. Feshbach : J. Acoust. Soc. Am. 19, 682-690 (1947).

[3] P. Morse et H. Feshbach : "Methods of Theoretical Physics", Mc Graw Hill (1953) ; voir page 1539, formules (11-4-49) et suivante.

[4] G. Polya : Math. Z. 29, 549-640 (1929).

[5] R. Omnes et J. Bros : En préparation

[6a] A. Sommerfeld : Math. Ann. 47, 335 (1896).

[6b] A. Sommerfeld : "Partial Differential Equations in Physics" Lectures on Theoretical Physics Vol.6 , Academic Press (1964).

[7] J. Bros et R. Omnes : En préparation

[8] B.R. Vainberg : Russian Mathematical Surveys Vol. 21 n°3, 115-193 (1966).

[9a] J. Bros et D. Iagolnitzer : Ann. Inst. H . Poincaré Vol.18 n°2 , 147-184 (1973).

[9b] J. Bros : Compte-Rendus de la R.C.P. n°25 Strasbourg Vol. 14 (1972).

[10] D. Iagolnitzer : Séminaire Lions-Goulaouic-Schwartz 1975 n°18.

[11] F. Pham : "Vanishing homologies and the n-variable saddlepoint method" in Proc. of Symp. in Pure Math. 40 , part 2 (1983).

***