Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

V. M. Petkov
L. N. Stojanov

Propriétés génériques de l'application de Poincaré et des géodésiques périodiques généralisées

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 11, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

PROPRIETES GENERIQUES DE L'APPLICATION DE POINCARE ET DES GEODESIQUES PERIODIQUES GENERALISEES

par V.M. PETKOV et L.N. STOJANOV

Exposé n°XI

25 Février 1986

I. INTRODUCTION.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un domaine borné de frontière C^∞ notée $\partial\Omega = X$. Soit $C^\infty(X,\mathbb{R}^n)$ l'espace des applications C^∞ muni de la topologie de Whitney (cf. ch.11,[2]). On note $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ l'espace des plongements C^∞ de X dans $\mathbb{R}^n$. $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ est un ensemble ouvert de $C^\infty(X,\mathbb{R}^n)$, qui est donc un espace de Baire. On rappelle qu'un ensemble R est résiduel si R est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts et denses.

Nous nous intéressons aux propriétés des rayons périodiques réfléchissants sur la variété $f(X)$ quand f appartient à un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$. On donne une définition précise des rayons périodiques réfléchissants dans la section 2. Afin de décrire les propriétés génériques qui seront l'objet de notre étude on considère un problème de la géométrie spectrale concernant la liaison entre le spectre $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$ du problème de Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda^2 u & \text{dans } \Omega , \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et le spectre $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{L}_\Omega}$ des longueurs des géodésiques périodiques dans $\overline{\Omega}$. Ici on désigne par $\mathcal{L}_\Omega$ l'union de toutes géodésiques généralisées périodiques y compris celles contenues dans $\partial\Omega$ et T_γ désigne la période (longueur) de γ .

Introduisons la distribution

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos\lambda_j t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Alors la relation de Poisson (cf.[1],[7],[8]) a la forme

$$(2) \qquad \text{sign supp } \sigma(t) \subset \bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_\Omega} \{-T_\gamma\} \cup \{0\} \cup \bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_\Omega} \{T_\gamma\} .$$

Soit $\mathcal{L}'_\Omega$ l'ensemble de rayons périodiques réfléchissants qui n'ont pas de segments tangents à $\partial\Omega$. On appelle les rayons de ce type rayons ordinaires. En utilisant la fonction de Green pour le problème de Dirichlet pour l'équation des ondes on peut démontrer (voir[4]) que pour $\gamma \in \mathcal{L}'_\Omega$ on a $T_\gamma \in$ sing supp$\sigma(t)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) T_γ est isolé dans $\bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_\Omega} \{T_\gamma\}$,

(b) il n'y a qu'une géodésique périodique $\gamma \in \mathcal{L}_\Omega$ de période T_γ ,

(c) l'application de Poincaré associée à γ n'a pas de valeur propre égale à $\sqrt[p]{1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Nous avons démontré dans [8] , [12] que génériquement pour des domaines strictement convexes dans $\mathbb{R}^2$ les conditions (a)-(c) sont satisfaites et la relation (2) devient une égalité. En particulier, le spectre $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$ détermine le spectre de longueurs. Remarquons que dans ce cas $\mathcal{L}_\Omega$ ne contient que des rayons périodiques ordinaires et la frontière $\partial\Omega$.

Quand on considère des domaines avec une géométrie arbitraire l'apparition des géodésiques périodiques généralisées ainsi que l'existence des rayons périodiques réfléchissants ayant des segments tangents à $\partial\Omega$ posent des difficultés assez considérables pour la démonstration de (a) et (b). Dans cet exposé on prouve que génériquement (c) est vrai et de plus

génériquement il n'y a pas des rayons réfléchissants périodiques ayant des segments tangents. D'autre part pour des domaines (non-convexes) génériques $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nous allons démontrer qu'il n'y a pas de géodésiques périodiques contenant des arcs sur $\partial\Omega$ et des segments linéaires dans l'intérieur de Ω . Comme conséquence on obtient que pour des domaines génériques dans $\mathbb{R}^2$ la relation de Poisson (2) devient une égalité.

Le comportement des géodésiques périodiques joue un rôle essentiel dans l'analyse des problèmes inverses spectraux (cf.[4],[6],[10],[12]). Quand on étudie les problèmes inverses de la théorie de diffusion pour l'équation des ondes dans le domaine non-borné $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ il est important d'examiner le comportement des rayons qu'on appelle ci-dessous (ω,θ)-rayons (cf.section 2). On considère les propriétés génériques de ces rayons quand ω et θ sont deux vecteurs fixés dans S^{n-1} tels que $\omega \neq \theta$.

Dans [9] l'un des auteurs a étudié l'asymptotique de l'amplitude de diffusion $a(\lambda,\omega,\theta)$ pour $\lambda \to \infty$. On a observé que cette asymptotique est liée avec les temps de séjours de (ω,θ)- rayons et aussi avec le Jacobien de l'application J_γ associée au (ω,θ)- rayon γ . Dans cet exposé on prouve qu'une partie des restrictions imposées dans [9] sont génériquement satisfaites. En particulier, le Jacobien $\det(dJ_\gamma)$ est génériquement différent de zéro. Les physiciens appellent $|\det(dJ_\gamma)|$ la section différentielle de diffusion et notre résultat a une signification physique.

Finalement, on prouve que génériquement pour chaque $s \in \mathbb{N}$ il n'y a qu'un nombre fini de rayons réfléchissants périodiques ayant justement s points de réflexion.

II. RAYONS REFLECHISSANTS PERIODIQUES ET (ω,θ)-RAYONS.

Soit X une sous-variété compacte C^∞ de dimension $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Soit γ une courbe fermée dans $\mathbb{R}^n$ ayant la forme $\gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \ell_i$, où

$$\ell_i = [x_i , x_{i+1}] = \{Z \in \mathbb{R}^n \ ; \ Z = \alpha x_i + (1-\alpha)x_{i+1} \ ; \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

sont des segments linéaires, $x_i \in X$, $i = 1,\dots,k$, $x_{k+1} = x_1$. On dit que γ est un rayon (géodésique) réfléchissant périodique sur X si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) les segments ouverts $\overset{\circ}{\ell}_i = (x_i,x_{i+1})$, $i = 1,\dots,k$ ne coupent pas transversalement X.

(ii) en posant $\ell_{k+1} = \ell_1$ nous avons $\ell_i \cap \ell_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ pour tout $i = 1,\dots,k$ ou il existe un entier m tel que $k = 2m$ et

$$\ell_i \cap \ell_{i+1} = \{x_{i+1}\} \ , \ i = 1,\dots,m-1 \ ,$$
$$\ell_{m-i} = \ell_{m+1+i} \ , \ i = 0,1,\dots,m-1 \ .$$

(iii) pour $i = 1,\dots,k$ les segments ℓ_i et ℓ_{i+1} forment des angles aigus et égaux avec l'un des vecteurs normaux N_{i+1} de X au point x_{i+1} et de plus ℓ_i, ℓ_{i+1}, N_{i+1} appartiennent à un plan de dimension deux.

On appelle $x_1,\dots,x_k$ les points de réflexion de γ. Le rayon γ peut être placé dans $\overline{\Omega}$ ainsi que dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Pour cette raison on va traiter des rayons réfléchissants ayant des points de réflexion sur une variété compacte X sans préciser où ils sont placés. On admet l'existence des points de réflexion qui coïncident. De plus, on n'exclus pas la possibilité d'avoir des segments ℓ_i qui sont tangents à X en un point intérieur de ℓ_i.

Si γ possède un segment $\ell_i = [x_i , x_{i+1}]$ ortnogonal à X en x_i ou x_{i+1} on dira que γ est un rayon symétrique et la seconde partie de (ii) est satisfaite. Dans le cas quand γ n'a pas de segment orthogonal à X on dit que γ est un rayon non-symétrique et la première partie de (ii) est satisfaite.

Etant donné un rayon réfléchissant périodique γ sur X avec s différents points de réflexion, on désigne par t le nombre des segments différents de γ. Si γ est symétrique on ne considère qu'une partie des segments de γ puisque chaque segment est inclus deux fois dans la somme $\bigcup_{i=1}^{k} \ell_i$. On introduit le défaut de γ de la manière suivante :

$$d(\gamma) = t-s \quad \text{si } \gamma \text{ est non-symétrique.}$$
$$d(\gamma) = t + 1 - s \quad \text{si } \gamma \text{ est symétrique.}$$

On dira que γ est un rayon simple si on a $d(\gamma) = 0$. L'un des auteurs a obtenu le résultat suivant.

Théorème 1 ([15]). Soit X une sous-variété C^∞ compacte de dimension $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Soit A_1 l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles chaque rayon réfléchissant périodique sur $f(X)$ est de défaut nul. Alors A_1 contient un ensemble résiduel de $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$.

Ce théorème montre que génériquement les rayons réfléchissants périodiques non-symétriques n'ont pas de points de réflexion qui se répètent et chaque rayon de ce type passe une seule fois par chacun de ces points de réflexion.

On dira qu'un rayon réfléchissant γ est ordinaire si γ n'a pas des segments tangents à X .

Théorème 2 ([13]). Soit X comme au théorème 1. Soit F_1 l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles chaque rayon réfléchissant périodique sur $f(X)$ est ordinaire. Alors F_1 contient un ensemble résiduel de $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$.

Maintenant on se propose de définir les (ω,θ)-rayons sur X . Soit $\omega,\ \theta \in S^{n-1}$ deux vecteurs fixés tels que $\omega \neq \theta$. Soit γ une courbe dans $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\gamma = \gamma' \cup \gamma'' \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \ell_i ,$$

où $\ell_i = [x_i , x_{i+1}]$, $i = 1,\dots,k-1$, $k \geq 2$, $x_i \in X$, tandis que γ' est la demi-droite issue de x_1 de direction $-\omega$ et γ'' est la demi-droite issue de x_k de direction θ . On dit que γ est un (ω,θ)-rayon si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i') les segments ouverts $\mathring{\ell}_i$ pour $i = 1,\dots,k-2$ et les demi-droites ouvertes $\mathring{\gamma}'$, $\mathring{\gamma}''$ ne coupent pas transversalement X ,

(ii') on a $\ell_i \cap \ell_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ pour tout $i = 1,\dots,k$ ou $\gamma' = \gamma''$ et il existe un entier m tel que $x_k = 2m+1$, $\ell_i \cap \ell_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ pour $i = 1,\dots,m$, $\ell_{m-i} = \ell_{m+1-i}$ pour $i = 0,\dots,m-1$.

(iii) est satisfaite pour $i = 1,\dots,k-1$,

(iv) γ' et ℓ_1 forment des angles aigus et égaux avec l'un des vecteurs normaux N_1 à X en x_1 et γ', ℓ_1 , N_1 appartiennent à un plan de dimension deux.

(v) γ'' et ℓ_{k-1} forment des angles aigus et égaux avec l'un des vecteurs normaux N_k à X en x_k et γ'' , ℓ_{k-1} , N_k appartiennent à un plan de dimension deux.

(vi) si $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ alors γ' et γ'' forment des angles aigus et égaux avec N_1 , $k = 2$, $x_1 = x_2$ et γ' , γ'' et N_1 appartiennent à un plan de dimension deux.

La seconde partie de (ii) n'est possible que pour $\theta = -\omega$. Si Ω est un domaine borné de frontière X alors un (ω,θ)-rayon est situé toujours à l'extérieur de Ω . Comme ci-dessus on admet l'existence de points de réflexion qui coincident et aussi quelques segments ℓ_i ou demi-droites γ' , γ'' pouvant être tangents à X . En effet ces deux phénomènes disparaissent génériquement. Pour cela on introduit le défaut de $d(\gamma)$ et on prouve que génériquement $d(\gamma) = 0$ (cf.[16]). De même on obtient un théorème analogue au théorème 2 pour des (ω,θ)-rayons (cf.[13]). On dit qu'un (ω,θ)-rayon γ est ordinaire si γ n'a pas des segments ℓ_i ou demi-droites γ', γ'' tangents à X .

III. LE SPECTRE DE L'APPLICATION DE POINCARE.

Pour chaque rayon réfléchissant périodique et ordinaire γ on introduit l'application de Poincaré P_γ associée à γ (cf.[4],[11]). P_γ est une application linéaire réelle symplectique et le spectre de P_γ joue un rôle important dans les applications aux problèmes inverse spectraux (cf.[4],[8][10], [12]). On propose ci-dessous un théorème général sans faire des restrictions sur la géométrie de X .

Théorème 3 [13] . Soit X une sous-variété compacte C^∞ de dimension $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ et soit $\mathbb{A} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un ensemble dénombrable. Soit $T_{\mathbb{A}}$ l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ telles que l'application de Poincaré P_γ de chaque rayon périodique réfléchissant et ordinaire γ sur $f(X)$ satisfait à la condition

$$\text{spectre}(P_\gamma) \cap \mathbb{A} = \emptyset .$$

Alors $T_{\mathbb{A}}$ contient un ensemble résiduel de $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$.

Ce résultat rappelle le théorème de Kupka-Smale pour des systèmes dynamiques réguliers. Le cas le plus intéressant c'est celui où $\mathbb{A}$ est formé par les racines primitives $\sqrt[p]{1}$, $p \in \mathbb{N}$. Alors Lazutkin [6] a obtenu le théorème 3 pour des domaines strictement convexes et génériques dans $\mathbb{R}^2$. D'autre part, Klingenberg et Takens [5] ont démontré un résultat assez général concernant l'application de Poincaré associée aux géodésiques périodiques sur une variété Riemannienne sans bord. Les démonstrations dans [6] et [13] reposent sur l'application des perturbations locales convenables. Dans notre cas la variété X peut avoir une géométrie assez compliquée et cela rend la construction des perturbations locales difficile. Notre démonstration utilise essentiellement la représentation de l'application de Poincaré obtenue dans [11] et aussi le théorème 1 qui permet de considérer seulement des rayons simples. L'idée est d'appliquer le théorème de transversalité multijet dans [2] . Soit

$$X^{(s)} = \{(x_1,\dots,x_s) \in X^s \ , \ x_i \neq x_j \quad \text{si } i \neq j\} \ .$$

Soit $J^2_s(X,\mathbb{R}^n)$ la variété de s-fibres de 2-jets (cf.[2], ch.11 pour les notations). Si Σ est une sous-variété dans $J^2_s(X,\mathbb{R}^n)$ le théorème de transversalité implique que l'ensemble

$$T = \{f \in C^\infty(X,\mathbb{R}^n) \ ; \ j^2_s f \pitchfork \Sigma\}$$

contient un ensemble résiduel de $C^\infty(X,\mathbb{R}^n)$ donc $T \cap C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$. Si on peut vérifier la propriété

(3) $$\operatorname{codim} \Sigma > \dim X^{(s)} = s(n-1)$$

on en déduit

$$j^2_s f(X^{(s)}) \cap \Sigma = \emptyset \ , \quad \forall f \in T \ .$$

Dans la démonstration du théorème 3 on introduit Σ comme un sous-ensemble de $J^2_s(X,\mathbb{R}^n)$ et pour exprimer la condition $\det(\mu I - P_\gamma) = 0$ on profite de la représentation de P_γ obtenue dans [11]. En général Σ n'est pas une sous-variété dans $J^2_s(X,\mathbb{R}^n)$. Alors on se propose de construire un recouvrement $\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tel que W_m soient des sous-variétés dans $J^2_s(X,\mathbb{R}^n)$ et

(4) $$\Sigma \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m \ ,$$

(5) $$\operatorname{codim} \Sigma = s(n-1) + 1 \ , \quad \forall m \in \mathbb{N} \ .$$

La vérification de (5) est le point essentiel dans la démonstration. Pour cela, en supposant $\mu \in \mathbb{A}$ fixé, on montre que

$$E = \det(\mu I - P_\gamma)$$

devient un polynôme non-trivial par rapport aux éléments des matrices correspondantes aux différentielles des applications de Gauss aux points de réflexion. La preuve de cette assertion repose sur le fait qu'on peut supposer $d(\gamma) = 0$ pour chaque rayon réfléchissant et périodique γ . On renvoie pour les détails à [13] .

IV. TEMPS DE SEJOUR ET L'APPLICATION J_γ .

Soit B_a une boule de rayon $a > 0$ contenant X . On désigne par α et β les deux plans tangents à B_a de normales respectivement $-\omega$ et θ . On désigne par π_ω et π_θ les projections orthogonales de $\mathbb{R}^n$ sur α et β . Etant donné un (ω,θ)-rayon γ ayant points de réflexion successifs

$$y_1,\dots,y_s \ , \ y_i \in X \ ,$$

on introduit le temps de séjour T_γ de γ par

$$T_\gamma = \| \pi_\omega(y_1) - y_1 \| + \sum_{i=1}^{s-1} \| y_{i+1} - y_i \| + \| y_s - \pi_\theta(y_s) \| - 2a \ .$$

Dans cette forme la notion de T_γ est due à Guillemin [3] mais on peut trouver des notions analogues dans la littérature physique.

On voit facilement que T_γ ne dépend pas de $a > 0$.

Comme dans [8],[12] on démontre que génériquement les temps de séjour sont rationalement indépendants.

Théorème 4 [14] . Soit X une sous-variété C^∞ compacte de dimension $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et soit ω , $\theta \in S^{n-1}$, $\omega \neq \theta$, deux vecteurs fixés. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,B_a)$ telles que deux (ω,θ)-rayons distincts et quelconques sur $f(X)$ aient des temps de séjours rationalement indépendants. Alors $\mathcal{F}$ contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,B_a)$.

La démonstration de ce théorème suit les lignes de la démonstration du fait que génériquement les longueurs des rayons périodiques sont rationalement indépendants [12] .

Maintenant on va introduire l'application J_γ associée à un (ω,θ)-rayon γ de points de réflexion $Q_1,\dots,Q_s$, $Q_i \in X$. Posons $Z_\gamma = \pi_\omega(Q_1) \in \alpha$. Il existe un voisinage W_γ de Z_γ sur α tel que pour chaque $Z \in W_\gamma$ on puisse trouver une direction $\theta(Z) \in S^{n-1}$ et points $Q_1(Z),\dots,Q_s(Z)$ sur X de telle manière qu'il existe un $(\omega,\theta(Z))$-rayon sur X ayant comme points de réflexion $Q_1(Z),\dots,Q_s(Z)$ et $\pi_\omega(Q_1(Z)) = Z$. Alors on obtient une application (cf.[3])

$$J_\gamma : W_\gamma \ni Z \longrightarrow \theta(Z) \in S^{n-1} \quad .$$

<u>Théorème 5</u> [13]. Soit ω , θ , X comme dans le théorème 4. Soit T l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ telles que pour chaque (ω,θ)-rayon γ on a $\det(dJ_\gamma(Z_\gamma)) \neq 0$. Alors T contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,B_a)$.

On appelle $\det dJ_\gamma(Z_\gamma)$ la section différentielle de diffusion. En effet, $|\det dJ_\gamma(Z_\gamma)|^{-1/2}$ apparaît dans le terme principal de l'asymptotique de l'amplitude de diffusion $a(\lambda,\omega,\theta)$ quand $\lambda \to \infty$ (cf.[9]). Pour des obstacles strictement convexes les (ω,θ)-rayons γ ont la forme $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ et $\det(dJ_\gamma)(Z_\gamma)$ coïncide avec la courbure de Gauss au point de réflexion de γ [3]. Le fait que $dJ_\gamma(Z_\gamma)$ soit inversible joue un rôle essentiel dans l'analyse de [9] car il permet d'étudier l'asymptotique de certaines intégrales oscillantes liées avec la paramétrix globale du problème de Dirichlet pour l'équation des ondes.

Afin de démontrer le théorème 5 on trouve une représentation de dJ_γ en considérant comme dans [11] l'ensemble des droites orientées. On exprime $dJ_\gamma(Z_\gamma)$ comme un produit de matrices et $\det dJ_\gamma(Z_\gamma)$ devient un polynôme non-trivial par rapport aux éléments des matrices correspondantes aux différentielles des applications de Gauss aux points de réflexion de γ . On répète la démonstration du théorème 3 .

V. <u>GEODESIQUES PERIODIQUES GENERALISEES DANS</u> $\mathbb{R}^2$.

Quand on considère un domaine non-convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en général on peut trouver des géodésiques périodiques $\gamma \in \mathcal{L}_\Omega$ contenant des segments glissants sur $\partial\Omega$ ainsi que des segments linéaires dans l'intérieur de Ω . Une géodésique de ce type apparaît quand la frontière $\partial\Omega = X$ possède un point x d'inflexion où la courbure de X s'annule simplement. Alors la géodésique (généralisée) passant par x en direction tangent de X doit contenir un segment glissant sur X issue de x.

On se propose de prouver que génériquement les géodésiques périodiques de la forme expliquée ci-dessus disparaîssent. En effet on obtient un résultat plus fort. Pour cela on introduit la suivante

<u>Définition</u> : Soit X une variété compacte C^∞ de dimension un dans $\mathbb{R}^2$. On dit que la courbe

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^{k-1} \ell_i \ , \quad \ell_i = [x_i,x_{i+1}],\ x_i \in X \ , \ i = 1,\ldots,k-1$$

est un rayon réfléchissant dégénéré non-symétrique sur X si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) est vrai pour $i = 1,\ldots,k-1$,

(ii") $\ell_i \cap \ell_{i+1} = \{x_{i+1}\}$, $i = 1,\ldots,k-2$,

(iii) est vrai pour $i = 1,\ldots,k-2$,

(d) les segments ℓ_1 et ℓ_{k-1} sont tangents à X respectivement en x_1 et x_k et de plus x_1 et x_k sont des points d'inflexion de X où la courbure de X s'annule simplement.

On dit que γ est un rayon réfléchissant dégénéré symétrique si (i), (ii"), (iii) sont satisfaites tandis que la condition (d) est remplacée par

(e) ℓ_1 est tangent à X en x_1 , x_1 est un point d'inflexion de X et ℓ_{k-1} est orthogonal à X en x_k .

On dit que γ est un rayon réfléchissant dégénéré si γ est un rayon réfléchissant non-symétrique ou symétrique.

Théorème 6 [12] . Soit D l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^2)$ telles qu'il n'y a pas des rayons réfléchissants dégénérés sur $f(X)$. Alors D contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^2)$.

Il est évident que chaque géodésique périodique ayant des segments glissants et linéaires contient au moins un rayon réfléchissant dégénéré donc on obtient l'assertion mentionnée ci-dessus.

Pour la démonstration du théorème 6 on utilise le théorème de transversalité multijet. On introduit un ensemble Σ des 2-jets dans $J^2_s(X,\mathbb{R}^2)$ correspondant aux rayons réfléchissants dégénérés sur $f(X)$. Le point essentiel est la construction d'un recouvrement $\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ pour lequel on a (4) et (5) avec $n = 2$. On obtient $(s-2)$ conditions sur Σ en exprimant le fait qu'on a $(s-2)$ réflexions en $x_2,\ldots,x_{k-1}$. De plus on introduit deux conditions en x_1 et une condition en x_k . On montre que toutes conditions imposées sur Σ sont indépendantes et on en déduit $\operatorname{codim} W_m = s + 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Enfin remarquons que le théorème s'applique aux rayons non-périodiques.

Quand on considère des géodésiques périodiques généralisées sur une variété compacte X de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ les raisonnements esquissés ci-dessus permettent de montrer qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable des rayons réfléchissants dégénérés. Afin de démontrer que les géodésiques périodiques généralisées génériquement disparaîssent il faut appliquer des perturbations locales en montrant que génériquement il n'y a qu'un nombre fini de géodesiques de ce type.

Le problème de la disparition dans le cas générique des (ω,θ)-rayons généralisées dans $\mathbb{R}^3$ semble plus facile parce qu'on dispose de deux directions fixés ω et θ. Alors on peut imposer sur l'ensemble Σ une condition exprimant que le (ω,θ)-rayon est entrant (sortant) de direction $\omega(\theta)$.

VI. APPLICATIONS.

Tout d'abord on va examiner la relation de Poisson pour des domaines non-convexes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. En combinant théorèmes 2 et 6 on conclut que génériquement chaque géodésique périodique dans $\overline{\Omega}$ distinct de $\partial\Omega$ est un rayon réfléchissant ordinaire. De plus l'application de Poincaré P_γ associée à chaque rayon γ de ce type n'a pas comme valeur propre $\sqrt[p]{1}$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Notons que si $\partial\Omega$ est non-convexe génériquement il existe au moins un point d'inflexion sur $\partial\Omega$ donc la frontière $\partial\Omega$ n'est pas une géodésique périodique. De telle manière les conditions (a) - (c) décrites à la section 1 sont génériquement satisfaites.

Etant donné $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^2)$ on désigne par $\Omega_f \subset \mathbb{R}^2$ le domaine borné ayant frontière $f(X)$. On note $\sigma_f(t)$ la distribution $\sum_i \cos\lambda_j t$ où $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$ sont les valeurs propres du problème (1) avec $\Omega = \Omega_f$, $\partial\Omega = f(X)$.

L'observation que nous avons faite ci-dessus et les raisonnements de [12] nous amènent au résultat suivant.

Théorème 7 [13]. Soit X une sous-variété compacte C^∞ de dimension un dans $\mathbb{R}^2$. Il existe un ensemble résiduel $\mathcal{R}$ dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^2)$ tel que pour chaque $f \in \mathcal{R}$ la relation (2) avec $\sigma_f(t)$ et $\mathcal{L}_{\Omega_f}$ devient une égalité. De plus en connaissant $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$ on peut déterminer le spectre de l'application de Poincaré P_γ associée à chaque rayon périodique ordinaire $\gamma \in \mathcal{L}_{\Omega_f}$.

Notre seconde application est liée avec le nombre $N(s)$ des rayons réfléchissants périodiques ayant justement s points de réflexion.

Théorème 8 [13]. Soit X comme au théorème 1. Soit F l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ telles que pour chaque entier $s \geq 2$ il n'y a qu'un nombre fini des rayons réfléchissants périodiques sur $f(X)$ ayant justement s réflexions. Alors F contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$.

La démonstration de ce résultat repose sur l'application des théorèmes 2 et 3. Il est intéressant qu'on obtienne génériquement $N(s) < \infty$ pour tous $s \in \mathbb{N}$ sans examiner le comportement des géodésiques périodiques généralisées que nous avons étudié seulement dans le cas n = 2 .

Le Théorème 8 nous permet de poser un problème ouvert.

Problème. Dans le cas générique où $\mathcal{N}(s) < \infty$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ décrire l'asymptotique de $\mathcal{N}(s)$ quand $s \to \infty$.

Il semble que ce problème est lié étroitement avec l'entropie du système dynamique correspondant à l'application du billiard.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] K. Andersson and R. Melrose, The propagation of singularities along gliding rays, Invent. Math., 41, (1977), p.197-232.

[2] M. Golubitsny and V. Guillemin, Stable mappings and their singularities Springer, New York, 1973.

[3] V. Guillemin, Sojourn time and asymptotic properties of the scattering matrix, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 12, Supl., (1977), p.69-88.

[4] V. Guillemin and R. Melrose, The Poisson summation formula for manifolds with boundary, Adv. in Math., 32, (1979), p.204-232.

[5] W. Klingenberg and F. Takens, Generic properties of geodesic flows, Math., Ann., 197, (1972), p. 323-334.

[6] V.F. Lazutkin, Convex billiard and eigenfunctions of the Laplace operator, Ed. Leningrad University, 1981, (in Russian).

[7] R. Melrose and I. Sjöstrand, Singularities in boundary value problems I, II, Comm. Pure Appl. Math., 31, (1978), p.593-617 and 35, (1982), p. 129-168.

[8] V. Petkov, Propriétés génériques des rayons réfléchissants et applications aux problèmes spectraux, Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Exposé XII, 1984-1985.

[9] V. Petkov, High frequency asymptotics of the scattering amplitude for non-convex bodies, Comm. in Partial Diff. Equations, 5, (1980), p.293-329.

[10] V. Petkov, Note on the distribution of poles of the scattering matrix, J. Math. Anal. Appl., 101, (1984), p.582-587.

[11] V. Petkov et P. Vogel, La représentation de l'application de Poincaré correspondant aux rayons périodiques réfléchissants, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.A, 296, (1983), p.633-635.

[12] V. Petkov and L. Stojanov, Periods of multiple reflecting rays and inverse spectral results, preprint.

[13] V. Petkov and L. Stojanov, Generic properties of the spectrum of the Poincaré map for multiple reflecting rays, preprint.

[14] V. Petkov and L. Stojanov, Sojourn time for reflecting scattered rays, preprint.

[15] L. Stojanov, Generic properties of periodic reflecting rays, preprint.

[16] L. Stojanov, Generic properties of scattered rays, C.R. Acad. Sci. Bulg. (to appear).

*
* *
*