Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Helffer

Effet tunnel pour des puits sous-variétés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 10, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

EFFET TUNNEL POUR DES PUITS SOUS-VARIETES

par B. HELFFER

(d'après Helffer-Sjöstrand)

Exposé n° X

21 Janvier 1986

§ 1. RAPPELS.

On se propose de présenter des travaux récents obtenus en collaboration avec J. Sjöstrand ($[HE-SJ]_5$, $[HE-SJ]_6$) pour l'opérateur de Schrödinger :

(1.1) $$P(h) = -h^2\Delta + V \quad \text{où } V \text{ est un potentiel } C^\infty \geqslant 0$$

sur une variété $C^\infty M$ qui sera ou $\mathbb{R}^n$ ou compacte.
Plus particulièrement, on s'intéresse au spectre de $P(h)$ (lorsque $h \to 0$) situé dans une fenêtre $I(h)$, c.à.d. un intervalle $]a(h),b(h)[$ t.q $a(h) \to E$, $b(h) \to E$. E étant fixé, on définit

(1.2) $$U_E = V^{-1}(]-\infty,E])$$

et les puits sont les composantes connexes compactes de U_E

(1.3) $$U_E = \bigcup_i U_i$$

Exemple 1. $M = \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)^2$; pour $E = 0$, $U_E = \{-1\} \cup \{+1\}$
On sait dans ce cas que $P(h)$ a dans la fenêtre $]-\infty,(2-\varepsilon)h]$ $(1 > \varepsilon > 0)$ 2 valeurs propres $\lambda_1(h)$ et $\lambda_2(h)$ t.q. :

(1.4) $$\lambda_1(h) = h + O(h^2)$$
$$\lambda_2(h) = h + O(h^2)$$

(1.5) $$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = h^{1/2} e^{-\frac{S_o}{h}} [a(h)]$$

$$\text{avec } a(h) = a_o + ha_1 + \ldots$$

L'étude d'un tel exemple (modèle du double puits) est classique dans la littérature physique (cf. Landau-Lipschitz) mais c'est plus récemment (cf. [HA], Harrell) que la formule (1.5) a été démontré correctement.
On voit apparaître ici 2 problèmes distincts :

- déterminer $\lambda_1(h)$ et $\lambda_2(h)$ le mieux possible
- déterminer le splitting $(\lambda_2(h)-\lambda_1(h))$

En fait la précision que l'on obtient pour la mesure du splitting est bien plus grande que celle qu'on obtient pour déterminer $\lambda_1(h)$ ou $\lambda_2(h)$. L'extension de tels résultats en dimension > 1 était l'objet de nos travaux ([HE-SJ]$_1$, [HE-SJ]$_2$, [HE-SJ]$_3$) et de ceux de B. Simon [SI]$_1$, [SI]$_2$. Pour comprendre la nature des nouveaux résultats que nous allons présenter ici, nous rappelons brièvement la démarche suivie dans nos articles. Elle comprend plusieurs étapes :

[1] Etudier la décroissance des fonctions propres $\varphi(h)$ relatives à des valeurs propres $\lambda(h) \in I(h)$ en dehors des puits.

Cette décroissance est mesurée à l'aide de la distance d'Agmon $d_{V-E}(x,y)$ associé naturellement à la métrique $(V-E)_+ dx^2$ (où dx^2 est la métrique sur M). Une distance analogue apparaît dans la zone classique (i.e. dans U_E) correspondant à la métrique de Jacobi (cf.[AB-MA]).

On a par exemple la proposition suivante :

Proposition 1. (cf.[HE-SJ]$_1$, [SI]$_1$). Soit $E \in \mathbb{R}$ $(E < \varliminf_{|x|\to\infty} V$ si $M = \mathbb{R}^n)$. Soit u(h) une famille de fonctions propres normalisées de P(h) associées à $\lambda(h)$ avec $\lambda(h) \underset{h\to 0}{\to} E$ ($h \in I$, I sous-ensemble de $]0,h_0]$ avec 0 comme point d'accumulation), alors pour tout $\varepsilon > 0$ et sur tout compact K de M :

$$e^{\frac{d_{V-E}(x,U_E)}{h}}\, u(h)(x) = O_\varepsilon(e^{\varepsilon/h})$$

[2] L'étape [1] conduit à des résultats du type : Modulo $\rho(h)$ $(\rho(h) \underset{h\to 0}{\to} 0)$, le spectre est la somme directe de problèmes attachés à chacun des puits. Selon la précision cherchée, les modèles attachés à chaque puits étaient dans les articles mentionnés précédemment, ou bien :

[2]$_a$ des oscillateurs harmoniques attachés à chaque puits (supposés ponctuels et non dégénérés) obtenus en figeant la métrique au puits et en prenant l'approximation quadratique de V au puits (ici E = min V) pour des approximations modulo $(O(h^{3/2})$.

[2]$_b$ des réalisations de Dirichlet de P(h) dans des ouverts M_j contenant un seul puits U_j , les plus grands possibles, pour obtenir $\rho(h) = e^{-S/h}$.

Dans ce cas, on tombe naturellement sur la contrainte $S < S_o = \inf_{j\neq k} d_{V-E}(U_j,U_k)$.
L'étape [2] nous conduit à une étude soigneuse des problèmes $[2]_a$ et $[2]_b$ qui est menée dans $[\text{HE-SJ}]_1$ dans le cas non dégénéré c.à.d. dans le cas où

(1.6) $\qquad E = \min V \ , \ U_j = \{x_j\} \ , \ V''(x_j)$ défini positif

<u>[3]Etude du problème à un puits</u>

Cette étape comprend 3 sous étapes

$[3]_a$ Constructions de fonctions propres approchées formelles par la méthode B.K.W. correspondant à des valeurs propres approchées $E(h) \sim \Sigma\, E_j\, h^{j/2}$ les solutions sont de la forme $a(x,h)e^{-\varphi_o(x)/h}$ où $\varphi_o(x)$ est au voisinage d'un puits U_i une solution de l'équation eiconale

(1.7) $$|\nabla\varphi_o|^2 = V - E \ , \ \varphi_o \geqslant 0 \ , \ \varphi_o(x_i) = 0$$

qui se trouve être la distance d'Agmen $d_{V-E}(x,x_i)$. On obtient ainsi des informations du type : dans la fenêtre $I(h)$, il y a au moins une vraie valeur propre $\lambda(h)$ du problème de Dirichlet t.q. $\lambda(h) \equiv E(h) \bmod O(h^\infty)$

$[3]_b$ Pour montrer qu'on a ainsi toutes les valeurs propres, on utilise une technique de déformation sur un modèle qui dans le cas (1.6) se trouve être l'oscillateur harmonique introduit en $[2]_a$ pour lequel on connait explicitement le spectre.

$[3]_c$ Pour bien comprendre le comportement des fonctions propres relatives à un puits, on compare alors les vraies fonctions propres et les solutions B.K.W. dans des domaines convenables.

A ce point de l'étude, on connait grâce aux étapes [2] et [3] le spectre de $P(h)$ modulo $O_\varepsilon(\ell^{-S_o/h+\varepsilon/h})$.

4 <u>Etude de l'interaction</u>

Pour l'esentiel, il s'agit de mettre au point la méthode L.C.A.O. des chimistes. Grosso-modo, on cherche les vraies fonctions propres du problème associées aux valeurs propres contenues dans $I(h)$, comme des combinaisons linéaires des fonctions propres attachées à chaque puits qui fournissent un espace propre approché sur lequel on calcule la matrice de $P(h)$ dont on détermine les coefficients modulo $O(h^\infty)e^{-S_o/h}$. On obtient ainsi des résultats du type (1.5).

§ 2. LE PROBLEME DES PUITS DEGENERES - MOTIVATION.

On considère toujours le cas où

$$(2.1) \qquad E = E_o = \min V \qquad (E < \lim_{|x|\to\infty} V \text{ si } M = \mathbb{R}^n)$$

mais (1.6) est remplacée par :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} U_{E_o} = \bigcup_j U_j \\ U_j \text{ est une sous-variété } C^\infty \text{ compacte de } M \\ \text{et } (V-E_o) \text{ s'annule exactement à l'ordre 2 sur } U_j \,. \end{cases}$$

La motivation pour l'étude de ces problèmes était double. Nous avons d'abord été attirés par ce problème à la suite d'une question de A. Voros.

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la famille de modèles suivants :

$$(2.3) \qquad P_\rho(h) = - h^2\Delta_{x,y} + (1 - (x^2+y^2))^2 \, (1+\rho\, x^2)$$

où $\rho \geqslant 0$.

Sur cet exemple, on a :

$$U_{E_o} = \{(x,y) \; ; \; x^2+y^2 = 1\}$$

Pour $\rho = 0$, on obtient un modèle invariant par rotation. Si on ne s'intéresse qu'aux fonctions propres invariantes, on se ramène après passage en coordonnées polaires à un problème en dimension 1 dans $\mathbb{R}^+$:

$$- h^2 \frac{d^2}{dr^2} - \frac{h^2}{4r^2} + (1-r^2)^2$$

avec une condition aux limites en 0 .

Le problème n'est pas trop différent du modèle de l'exemple 1. Il y a certes une singularité en 0 mais elle est loin du puits (+1).
Le cas $\rho = 0$ rentrera dans la catégorie des problèmes uniformément dégénéré, l'énergie de la fonction propre est au fond du puits : $r = 1$ et se repartit uniformément dans le puits.
Pour $\rho > 0$, le problème est plus amusant et la première question naturelle (qui était posée par A. Voros) était de savoir où étaient localisées les premières fonctions propres de $P_\rho(h)$. On dira que $\varphi(h)$ n'est pas localisée

dans un ouvert ω si

$$\|\varphi(h)\|_{L^2(\omega)} = O(h^\infty) \qquad h \to 0$$

On soupçonne que les particules sont localisées dans les parties du puits où elles ont le plus de place , c.à.d. là où la valeur propre non nulle du Hessien de V est la plus petite dans le puits. En coordonnées polaires, cette valeur propre est donnée sur $r = 1$ par :

$$\lambda(\theta) = 8(1 + \rho(\cos\theta)^2)$$

qui est minimale aux points $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, c.à.d.

$$(x = 0\ ,\ y = 1) \quad \text{et} \quad (x = 0\ ,\ y = -1)$$

Bien que ce problème soit à un puits, on voit apparaître ici 2 mini-puits dans le puits, ce qui conduit à imaginer une interaction entre les 2 mini-puits créant un splitting entre les 2 premières valeurs propres. L'étude théorique que nous avons menée montre en effet l'existence de 2 valeurs propres $\lambda_1(h)$ et $\lambda_2(h)$ proches de $2\sqrt{2}h$ (modulo $O(h^{3/2})$) et qui vérifient :

$$\lambda_2(h) - \lambda_1(h) = h^{5/4}\, \ell^{-S_1/\sqrt{h}}\, a(\sqrt{h}) \tag{2.4}$$

où S_1 est une certaine distance entre les 2 minipuits et $a(\sqrt{h})$ est un symbole.

Si on compare avec (1.5) le splitting est d'un ordre différent : $e^{-S_o/h}$ est remplacé par $e^{-S_1/\sqrt{h}}$.

Notons que, pour cet exemple, B. Simon [SI] a obtenu des résultats du même type avec des méthodes différentes.

Une deuxième motivation vient de la démonstration de Witten des inégalités de Morse [WI] .

Witten a proposé la démonstration analytique suivante des inégalités de Morse. Si f est une fonction de Morse sur une variété compacte $C^\infty M$ de dimension n (i.e. à points critiques isolés non dégénérés), Witten propose la démonstration suivante.

En un point critique (x_i) de f , soit l_i l'indice de (x_i) i.e. le nombre de- dans la signature de $f''(x_i)$ et pour $j = 0,\dots,n$, soit m_j le nombre de points (x_i) d'indice j . Les inégalités de Morse fortes affirment l'existence d'un polynôme Q(t) à coefficients entiers $\geqslant 0$ t.q. :

(2.5) $$\sum_{j=o}^{n} m_j \, t^j = \sum_{j=o}^{n} b_j \, . \, t^j + (1+t)\, Q(t)$$

où les b_j sont les nombres de Betti de la variété M .

En particulier, on a :

(2.6) $m_j \geqslant b_j$ (inégalités de Morse faibles)

On sait que b_j est la dimension du noyau du Laplacien sur les j-formes :

(2.7) $$\Delta^{(j)} = d_j^* \, d_j + d_{j-1} \, d_{j-1}^*$$

Witten introduit une déformation du complexe de de Rham :

(2.8) $$d_f = h \, e^{-f/h} \, d \, e^{f/h}$$

et construit :

(2.9) $$\Delta_f^{(j)} (h) = (d_f)_j^* \, (d_f)_j + (d_f)_{j-1} \, (d_f)_{j-1}^*$$

Il est alors facile par la théorie de Hodge de voir que :

(2.10) $$\dim \operatorname{Ker} \Delta_j^{(j)} = b_j$$

Les inégalités (2.6) résultent alors d'une majoration de la dimension du noyau de $\Delta_j^{(j)}$ qui relève de l'analyse semi-classique si l'on remarque que :

(2.11) $$\Delta_j^{(j)}(h) = + h^2 \, \Delta^{(j)} + |\nabla f|^2 \, \mathrm{Id} + h(\mathcal{L}_{\nabla f} + \mathcal{L}_{\nabla f}^*)$$

On détermine alors la dimension de l'espace propre associé aux petites valeurs propres (i.e. $\leqslant \varepsilon_o h$, $\varepsilon_o > 0$ assez petit) en calculant (cf. l'étape $[2]_a$) les dimensions des noyaux des "oscillateurs harmoniques" attachés à chaque puits et dont la somme est justement m_j .
Le potentiel V est ici $|\nabla f|^2$ et l'hypothèse fonction de Morse se traduit par : V n'a que des puits non dégénérés. Une extension des inégalités de Morse au cas où les points critiques de f sont des sous-variétés a été donnée par Bott [BO] . Witten [W1] propose une méthode semi-classique très

loin d'être rigoureuse. Inspirée par celle-ci, Bismut [BI] en donne une démonstration probabiliste mais il ne peut éviter des arguments cohomologiques qui font que sa démonstration ne semble pas relever purement de l'analyse. L'étude que nous présentons ici est une première étape (nous ne traitons que le cas scalaire) dans une démonstration purement analytique suivant la démarche de Witten.

§ 3. DES RESULTATS.

On considère sur une variété M riemannienne C^∞ compacte (ou bien $M = \mathbb{R}^n$) l'opérateur de Schrödinger :

(3.1) $$P(h) = - h^2 \Delta + V_o + h V_2$$

où V_o et V_2 sont des potentiels C^∞ et où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M .
(Si $M = \mathbb{R}^n$, on suppose de plus que $0 = \min V_o < \lim_{|x|\to\infty} V_o$ et que $|V_2| \leqslant C(|V_o|+1))$.
On pose :
(3.2) $$E_o = \min V_o$$

et on suppose de plus que :

(3.3) $V_o^{-1}(E_o)$ est une réunion disjointe, finie, de sous-variétés C^∞ compactes U_i de dimension ν_i' (on pose $\nu_i' + \nu_i'' = n$) :

$$V_o^{-1}(E_o) = \underset{i}{\cup}\, U_i$$

(3.4) (V_o-E_o) s'annule exactement à l'ordre 2 sur U_i .

On pose $d_i(x) = d_{V_o-E_o}(x,U_i)$. Comme dans le cas non dégénéré, $d_i(x)$ est une fonction C^∞ au voisinage de U_i s'annulant exactement à l'ordre 2 sur U_i et vérifiant dans ce voisinage :

(3.5) $$|\nabla d_i(x)|^2 = V_o(x) - E_o \ ; \ d_i \geqslant 0 \ ; \ d_{i/U_i} = 0 \ .$$

On introduit sur U_i le potentiel "sous-principal" $W_2^i(x)$:

(3.6) $$W_2^i(x) = (\Delta d_i)(x) + V_2(x) \ ; \quad x \in U_i$$

et on pose :

$$E_2^{(i)} = \inf_{x \in U_i} W_2^i(x) \tag{3.7}$$

L'inégalité de Melin-Hörmander ([ME-HO] ,[ME]) donne, dans le contexte semi-classique (cf.[HE-RO]), l'existence de C t.q

$$(P(h) - E_o - E_2^{(i)} h\, u/u) \geq - C\, h^2 (u/u) \tag{3.8}$$

pour $u \in C_o^\infty(\mathcal{V}(U_i,\tau))$

où $\qquad \mathcal{V}(U_i,\tau) = \{x \in M \ ,\ d_i(x) \leq \tau\} \qquad$ (τ assez petit)

On s'intéresse alors essentiellement à 2 cas :

<u>Cas (a)</u> <u>Cas uniformément dégénéré</u>

C'est le cas $\rho = 0$ pour l'exemple. C'est le cas sur lequel on tomberait dans l'étude relative à Witten.

$$E_2^{(i)} = W_2^i(x) \ ,\ \forall \ x \in U_i \tag{3.9}$$

<u>Cas (b)</u> <u>Cas des mini-puits</u>

(3.10) $\left\{\begin{array}{l} (W_2^i)^{-1}\ (E_2^i) = \bigcup_j U_i^j \\ \text{et } W_2^i \text{ s'annule exactement à l'ordre 2 sur les "minipuits"} \\ U_i^j \text{ qu'on suppose être des points } (x_i^j) \end{array}\right.$

3.1. <u>Décroissance des fonctions propres</u>

Considérons tout d'abord quelques résultats sur la décroissance des fonctions propres pour le problème à un puits.

<u>Proposition 2</u>

Soit $P_{M_j}(h)$ la réalisation de Dirichlet de P(h) dans un voisinage ouvert de U_j : $M_j = \mathcal{V}(U_j,\tau)$. On suppose que les hypothèses (3.2), (3.3) et (3.4) sont satisfaites. Soit u(h) une famille de fonctions propres normalisées de $P_{M_j}(h)$ associées à $\lambda(h) \in [E_o, E_o + Ch]$ $(C > 0)$, $h \in]0, h_o]$ alors il existe N_o tel que :

3.1.1. $$e^{d_j(x)/h}\, u(h)(x) = O(h^{-N_o})$$

La démonstration est analogue à celle de [HE-SJ]$_1$. Dans le cas des minipuits, cette localisation est insuffisante car elle ne permet pas de localiser au voisinage de chaque minipuits.

Pour cela, on introduit un "correctif" à la distance $d_j(x)$ de l'ordre de $\sqrt{h}$ au voisinage de U_j défini par :

(3.1.2) $$d_j^1(x,y) = d_{W_2-E_2}(\dot{x},\dot{y}) \quad \text{pour } x\ ,\ y \in V(U_j,\tau)$$

où

$$\dot{x} = \lim_{t\to-\infty} \Phi_t(x) \quad \text{si } x \in V(U_j,\tau)$$

où Φ_t est le flot associé à $\nabla d_j(x)$ (c.à.d. que x appartient à la variété sortante pour ∇d_j issue de $\dot{x}$).
On a ainsi transporté naturellement la distance d'Agmon sur U_j associé au potentiel sous principal au voisinage de U_j .
On a alors :

<u>Proposition 3</u> : On suppose que les hypothèses (3.2), (3.3), (3.4) et (3.10) sont satisfaites. Soit $u(h)$ une famille de fonctions propres normalisées de $P_{M_j}(h)$ associés à $\lambda(h) \in [E_o + E_2^{(j)}h\ ,\ E_o + E_2^{(j)}h + C\, h^{3/2}]$ $(C > 0)$, $h \in\,]0, h_o]$ alors il existe N_o t.q

$$e^{\Phi_h^j(x)/h}\, u(h)(x) = O(h^{-N_o})$$

avec $\Phi_O^j(x) = d_j(x) + h^{1/2} \inf\limits_i d_j^1(x,x_{ji})$.

La démonstration repose sur l'inéqualité de Melin (qui remplace l'inégalité d'énergie utilisée dans [HE-SJ]$_1$)

3.2. Solutions B.K.W.

<u>Proposition 4</u> (Cas uniformément dégénéré)
Sous les hypothèses (3.2), (3.3), (3.4) et (3.9), il existe dans $V(U_j,\tau)$ (τ > 0 assez petit) une solution B.K.W.

(3.2.1) $$\tilde{u}^j(h) = h^{-\nu_j''/4}\, a_j(x,h)\, e^{-d_j(x)/h}$$

et une valeur propre formelle $E^{(j)}(h)$ t.q

(3.2.2) $$E^{(j)}(h) \sim \sum_{j=o}^{\infty} h^i \; E_{2i}^{(j)}$$

(3.2.3) $$a_j(x,h) \sim \sum_{i=o}^{\infty} a_j^{2i}(x)h^i \quad , \; a_j^o(x) > 0$$

où $E_o^{(j)} = E_o$, $E_2^{(j)}$ est défini en (3.9)

(3.2.4) $\left\{\begin{array}{l} E_4^{(j)} \text{ est la première valeur propre d'un opérateur différentiel} \\ \text{sur } U_j \text{ dont la partie principale est l'opérateur de Laplace-} \\ \text{Beltrami sur } U_j \text{ . De plus } P_{U_j} \text{ est autoadjoint sur } L^2(U_j \, , \, d\tilde{\nu}_j) \\ \text{où } d\tilde{\nu}_j = (\det \mathrm{Hess}_{\mathrm{trans}}^{U_i} d_j)^{-1/2} \, d\nu_j \text{ où } d\nu_j \text{ est la mesure induite} \\ \text{sur } U_j \end{array}\right.$

et

(3.2.5) $$(-h^2 \Delta + V_o + h \, V_2 - E(h)) \, \tilde{u}^j(h) \equiv O(h^\infty) \, e^{-d_i(x)/h}$$

Dans l'exemple introduit en (2.3) avec $\rho = 0$, on trouve que :
$P_{U_i} = - \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ (sur S^1) .

<u>Remarque</u>. Cette proposition peut s'étendre au cas du Laplacien de Witten sur les j-formes.
Dans le cas des minipuits, la construction B.K.W. s'effectue au voisinage de chaque minipuits. On a la :

<u>Proposition 5</u> (cas des mini-puits)
Sous les hypothèses (3.2), (3.3), (3.4) et (3.10), il existe dans un voisinage assez petit de (x_{ji}) une solution B.K.W de la forme

(3.2.6) $$\tilde{u}^{ji}(h) = h^{-\nu_j''/4 \, -\nu_j'/8} \, a_{ji}(x,h) e^{-\phi_h^{ii}(x)/h}$$

et une valeur propre formelle $E^{(ji)}(h)$ telles que :

(3.2.7) $$\phi_h^{ji}(x) = d_j(x) + h^{1/2} \, d_j^1(x,x_{ji})$$

(3.2.8) $$a_{ji}(x) = \sum_{\ell\geqslant 0} a_{j,i}^{\ell}(x) \, h^{\ell/2} \quad , \; a_{j,i}^o(x_{j,i}) > 0$$

(3.2.9) $$E^{(ji)}(h) = E_o + h \, E_2^{(j)} + h^{3/2} \, E_3^{(ji)} + \sum_{\ell\geqslant 3} E^{(j,i)} h^{\ell/2}$$

avec

(3.2.10) $$E_3^{j,i} = \Delta[d_j^1(x,x_{ji})]$$

et

(3.2.11) $$(-h^2\Delta + V_o + hV_2 - E^{(ji)}(h))\tilde{u}^{j,i}(x) = O(h^\infty)\, e^{-\phi_h^{j,i}(x)/h}$$

comme indiqué au § 1 , ces deux propositions conduisent à l'existence de valeurs propres dans la "fenêtre" considérée ($[E_o + h\, E_2^{(j)} + h^2(E_4^{(j)}-\varepsilon)$, $E_o + h\, E_2^{(j)} + h^2(E_4^{(j)}+\varepsilon)]$ (avec $\varepsilon > 0$) dans le premier cas, $[E_o + h\, E_2^{(j)} + h^{3/2}(E_3^{(j,i)}-\varepsilon)$, $E_o + h\, E_2^{(j)} + h^{3/2}(E_3^{(j,i)}+\varepsilon)]$ dans le deuxième cas) pour le problème à un puits (resp. à un minipuits). Le problème suivant (et plus délicat !) est de montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Pour cela, on déforme les opérateurs considérés sur des modèles.

3.3. Les modèles

Rappelons tout d'abord que le modèle relatif à un puits non dégénéré était donné dans des coordonnées centrés en U_j par : (j'omets la référence à U_j)

(3.3.1) $$\sum_{i,j} g_{ij}(o)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i,j} V''(0)\, x_i\, x_j$$

dont la 1ere valeur propre est $E_2^{(j)}h$ avec $E_2^{(j)} = \Delta(d(x,U_j))\,(0)$

Décrivons maintenant le modèle relatif au cas uniformément dégénéré. On omet l'indice j relatif au puits.

Dans des coordonnées adaptées (x',x'') telles qu'en particulier :

(3.3.2) $$\begin{cases} d(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=\nu'+1}^{n} x_i''^2 \\ \nabla d.\ \nabla x_k' = 0 \qquad k = 1,\dots,\nu' \end{cases}$$

bien définies dans un ouvert de la forme $\tilde{G} = \{x' \in G\ ,\ |x''|^2 \leqslant \tau\}$ le modèle s'écrit :

(3.3.3) $$\begin{aligned} Q(h) = {} & \sum_j{}'' \sum_k{}'' (-h\,\partial_{x_j''} + x_j'')\, g_{jk}(x',o)\,(h\partial_{x_k''} + x_k'') \\ & - h^2 \sum_j{}' \sum_k{}' (\partial_{x_j'} + \sum_\ell{}'' \sum_m{}'' b_j^{\ell,m}(x')\, x_\ell''\partial_{x_m''}) \times \\ & \times\, g_{jk}(x',o)(\partial_{x_k'} + \sum_\ell{}'' \sum_m{}'' b_k^{\ell,m}(x')x_\ell''\, \partial_{x_m''}) + h^2\, \rho.(x') + E_2 h \end{aligned}$$

avec $b_k^{\ell,m} = - b_k^{m,\ell}$

Q(h) opère sur le fibré normal à U (qui n'est pas forcément trivial !) dont un ouvert ($|x''|^2 \leqslant \tau$) s'identifie à un voisinage tubulaire de U . On retrouve P_{U_j} (introduit en 3.2.4) en remarquant que sur les fonctions de la forme $e^{-\frac{x''^2}{2h}} f(x')$, on trouve que :

(3.3.4) $Q(h)\ (e^{-x''^2/24}\ b(x')) = h^2\ e^{-x''^2/24}\ (P_{U_j} b)(x') + E_2 h\ e^{-x''^2/24}\ b(x')$

Décrivons enfin le modèle relatif au cas du minipuits (x_{ji}) . On peut choisir des coordonnées telles que (3.3.2) soit vérifiée et de plus :

(3.3.5) $$d_j^1(x,x_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_\ell x_\ell'^2$$

Le modèle localisé au minipuits est un oscillateur harmonique :

(3.3.6) $$\begin{aligned} Q(h) = {} & \sum_j{}'' \sum_k{}'' (-h\, \partial_{x_j''} + x_j'')\ g_{jk}(0)\ (h\, \partial_{x_k''} + x_k'') \\ & + \sum_j{}' \sum_k{}' (-h\partial_{x_j'})\ g_{jk}(0)\ (h\partial_{x_k'}) \\ & + h \sum{}' \sum{}' g_{jk}(0)\ x_j'\ x_k' + E_2\ h \end{aligned}$$

On remarquera que les homogénéités par rapport à h sont différentes par rapport aux variables x' et x'' .

Q(h) admet comme première valeur propre $E_2 h + E_3\ h^{3/2}$ et comme première fonction propre $e^{-x''^2/2h}\ e^{-x'/2\sqrt{h}}$.

3.4. Conclusion

Il serait trop long d'énoncer les théorèmes mesurant le splitting. Nous avons simplement mis en évidence les points nouveaux par rapport à $[\text{HE-SJ}]_1$ et renvoyons à $[\text{HE-SJ}]_{5,6}$ pour des détails.

BIBLIOGRAPHIE :

[AB-MA] Abraham-Marsden, Foundations of Mechanics

[Bl] J.M. Bismut, The Witten complex and the degenerate Morse inequalities Preprint de l'Université d'Orsay 84 T 41 .

[BO] R. Bott, Non degenerate critical manifolds;Ann. of Math. 60, p.248-261 1954 .

[HE] B. Helffer, An introduction to the semi-classical analysis for on the Schrödinger operator - cours en Chine -

[HE-RO] B. Helffer, D. Robert, Puits de potentiels généralisés et asymptotique semi-classique;Annales de l'I.H.P. (Section Physique théorique) vol.42 n°2, 1985 p.127-212.

[HE-SJ] B. Helffer, J. Sjöstrand

[1] Multiple wells in the semi-classical limit I;(comm. in P.D.E., 9 (4), p.337-408 (1984).

[2] Puits multiples en limite semi-classique II Interaction moléculaire. Symétries - perturbations;Annales de l'I.H.P. (Section Physique théorique) vol.42, n°2 , 1985 p.127-212.

[3] Multiple wells in the semi-classical limit III Non resonant Wells ; Math. Nachr. 124 (1985) p.263-313.

[4] Puits multiples en limite semi-classique IV Etude du complexe de Witten;comm. in P.D.E., 10 (3) p245-340 (1985).

[5] Puits multiples en mécanique semi-classique V:étude des minipuits (à paraître).

[6] Puits multiples en mécanique semiclassique VI:cas des puits uniformément dégénérés (en préparation)

[7] Conférences à St Jean de Monts;Actes du colloque de St Jean de Monts Juin 1985. Publications de l'Ecole Polytechnique

[HO] L. Hörmander, The Cauchy problem for differential equations with double caracteristics. J. Analyse Math. 32, 1977 p.118-196.

[ME] A. Melin, Lower bounds for pseudodifferential operators;Ark. för Mat. 9 (1971), p.117-140.

[SI] B. Simon

[1] Semi-classical analysis of low lying eigenvalues;Non degenerate minima : Asymptotics expansions ; Ann. Inst. H. Poincaré 38 (1983) p.295-307.

[2] Semi-classical of low lying eigenvalues II. Tunneling Annals of Math. (1984).

[3] Communication personnelle (Mars 1984).

[WI] E. Witten, super symmetry and Morse theory J. of differential geometry 17 (1982) p.661-692.

<u>Autres références</u> :

[CDS] J.M. Combes, P. Duclos, R. Seiler (1983) convergent expansions for Tunneling Comm. Math. Phys. 92 , p.229-245.

[CO] S. Coleman, "The Use of Instantons" Proceedings of the 1977 International School of Subnuclear Physics, A. Zichichi Editor, pp 805-916, Plenum New-York 1979.

[HA] E.M. Harrel, "Double Wells" [1980] Comm. Math. Phys. 75, p.239-261.

****