A. Haraux

Propriétés d'oscillation des solutions de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet au bord

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 9, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

PROPRIETES D'OSCILLATION DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DES ONDES AVEC CONDITIONS DE DIRICHLET AU BORD

par A. HARAUX

(Analyse Numérique, Tour 55-65, 5è étage
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu 75230 PARIS cedex 05)

Exposé n°IX du 29 Janvier 1985

0. INTRODUCTION - GENERALITES.

Dans cet exposé, nous décrivons un certain nombre de résultats d'oscillation (ou de non-oscillation) obtenus en collaboration avec T. Cazenave et V. Komornik, concernant les solutions d'équations hyperboliques du 2ème ordre en t dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$ avec conditions de Dirichlet homogènes à la frontière Γ. Les énoncés complets et les démonstrations des résultats seront donnés dans [4] , [5] et [7] .
Le cas le plus simple que nous considérerons est celui de l'équation des ondes

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \ , & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u = 0 \ , & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \end{cases}$$

Plus généralement, si l'on considère un opérateur auto-adjoint positif A de domaine dense dans un espace de Hilbert réel H , on peut étudier l'équation d'évolution linéaire du 2ème ordre

$$(2) \qquad u'' + A\,u(t) = 0 \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

Le problème de Cauchy associé à (2) est bien posé dans $C(\mathbb{R},V) \cap C^1(\mathbb{R},H)$ où $V = D(A^{1/2})$. D'autre part, si A est surjectif avec A^{-1} compact : $H \longrightarrow H$, il est connu que pour toute solution u de (2) dans $C(\mathbb{R},V) \cap C^1(\mathbb{R},H)$, le vecteur $U(t) = (u(t),u'(t))$ est presque-périodique : $\mathbb{R} \longrightarrow V \times H$. (cf. par exemple [6] , lecture 24, Proposition 9). Comme en outre on a pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t u(s)ds = -A^{-1}\left(\frac{u'(t)-u'(0)}{t}\right) ,$$

il est clair que $u(t)$ est de moyenne nulle dans V.
Dans le cas particulier où $H = L^2(\Omega)$ et $D(A^s) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ avec $s \geq \frac{1}{2}$, on en déduit que si $U(0) \in D(A^s) \times D(A^{s-1/2})$, l'unique solution u de (2) de données initiales $(u(0), u'(0))$ est telle que

(3) $\forall x \in \Omega$, on a soit $u(t,x) \equiv 0$, soit $\varphi(t) = u(t,x)$ prend des valeurs > 0 et des valeurs < 0 sur toute demi-droite $]-\infty,a]$ ou $[a,+\infty[$.

1. EXISTENCE D'UN TEMPS UNIFORME D'OSCILLATION.

Soit A comme ci-dessus et $x_o \in \Omega$. Il est naturel de se demander "pendant combien de temps" la fonction $u(t,x_o) = \varphi(t)$ peut rester par exemple positive ou nulle sans que cela entraîne $\varphi \equiv 0$. Si ce temps peut être estimé indépendamment de u solution "régulière" de (2) et de $x_o \in \Omega$, on dira qu'il existe un "temps uniforme d'oscillation" pour (2). Soit $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 1}$ la suite des valeurs propres de A et $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite associée de fonctions propres formant un système total orthonormé dans H . La solution générale de (2) est donné par la formule

(4) $$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, t + \alpha_n)\varphi_n(x) \quad ,$$

la série étant ici uniformément convergente (mais pas normalement en général) au sens de V .

Pour les solutions "régulières", la convergence a lieu ponctuellement en x , uniformément en t , et il est donc naturel d'examiner d'abord le cas d'un nombre fini d'"harmoniques" .

Dans toute la suite nous utiliserons la notation

$$X_\tau = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(t+\tau) \equiv f(t) \ ,\ \int_0^\tau f(s)ds = 0\}$$

Commençons par un résultat simple dont la démonstration est entièrement élémentaire.

<u>Proposition 1.1</u>. Soit $\tau_1,\dots,\tau_n$ une suite finie de nombres > 0 et $f \in X_{\tau_1} + \dots + X_{\tau_n}$.

Si l'on suppose

(5) $$f(t) \geqslant 0 \ ,\ \forall t \in [0, \sum_{j=1}^{n} \tau_j]$$

on a en fait

(6) $$f(t) \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \ .$$

<u>Démonstration</u>. Il est clair que le résultat est vrai pour $n = 1$.

Prouvons-le par récurrence pour $n > 1$.

Soit donc $f = \sum_{j=1}^{n} f_j \ ,\ f_j \in X_{\tau_j} \ ,\ j \in \{1,\dots,n\}$.

Posons $J = [0, \sum_{j=1}^{n} \tau_j]$ et $J^* = [0, \sum_{j=1}^{n-1} \tau_j]$.

Soit $F_j(t) = \int_t^{t+\tau_n} f_j(s)ds$ pour $j \in \{1,\dots,n-1\}$.

Il est clair que F_j est τ_j-périodique et de moyenne nulle, tandis que $\int_t^{t+\tau_n} f_n(s)ds \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. On a donc comme conséquence de (5)

$F(t) = \int_t^{t+\tau_n} f(t)dt \geqslant 0$ sur J^* , avec $F \in X_{\tau_1} + \dots + X_{\tau_{n-1}}$. Par l'hypothèse de récurrence on en déduit $F \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. D'où l'on déduit en particulier :

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0 \quad \text{sur } [t,t+\tau_n] \quad , \forall t \in J^* \\ f(t+\tau_n) = f(t) \quad , \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il est bien clair que ces deux dernières propriétés impliquent $f(t) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.1.

Dans [7] on établit le résultat plus fort suivant.

<u>Théorème 1.2.</u> Soit $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de nombres $\geqslant 0$ telle que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \tau_j = T < +\infty$$

On convient que $X_0 = \{0\}$ et on pose

$$X = \{f \in C(\mathbb{R},X),\ \forall j \in \mathbb{N}^* ,\ \exists\, f_j \in X_{\tau_j} ,\ \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_\infty < +\infty \text{ et } f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\}$$

Soit $f \in X$: si $f \geqslant 0$ sur $[0,T]$ on a en fait $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Idée de la démonstration</u>. Elle est beaucoup plus technique que celle de la proposition 1.1 et comporte deux étapes. On suppose évidemment $\tau_2 > 0$.

<u>Etape 1</u>. On construit une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive sur $]0,T[$ et nulle en-dehors, telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* ,\ \forall \varphi \in X_{\tau_j} ,\quad \int_{\mathbb{R}} h(x)\, \varphi(x)dx = 0$$

Si $f \in X$ et $f \geqslant 0$ sur $[0,T]$ on a donc l'implication :

$$h(x)f(x) \equiv 0 \implies f = 0 \text{ sur } [0,T]$$

Pour construire la fonction h , on définit par récurrence la suite de fonctions $h_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$h_1(x) = \begin{cases} \tau_2 & \text{sur }]0,\tau_1[\\ 0 & \text{en-dehors} \end{cases}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_n} \displaystyle\int_0^{\tau_n} h_{n-1}(x-t)\,dt & \text{si } n \geqslant 2 \text{ , } \tau_n > 0 \\ h_{n-1}(x) & \text{si } n \geqslant 3 \text{ , } \tau_n = 0 \end{cases}$$

On établit que lorsque $n \to +\infty$, la suite de fonctions h_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une limite $h(x)$ ayant les propriétés désirées. On remarque qu'en outre $h(T-x) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Etape 2.
On pose $\varepsilon_k = \sum_{k}^{+\infty} \tau_j$ et on considère une suite de fonctions $p_k > 0$ sur $]0,\varepsilon_k[$, nulles en-dehors avec $p_k(\varepsilon_k - t) = p_k(t)$ et

$$\forall \varphi \in \bigcup_k^{\infty} X_{\tau_j} \quad , \int_{\mathbb{R}} p_k(s)\varphi(s)\,ds = 0$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k(t) = \int_0^{\varepsilon_k} f(t+s)p_k(s)\,ds$ est dans $X_{\tau_1} + \ldots + X_{\tau_k}$ et identiquement nulle sur $[0,T-\varepsilon_k]$. On a donc $g_k \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ comme conséquence de la proposition 1.1, et il est alors assez simple d'en déduire $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

On peut alors déduire du Théorème 1.2 le résultat d'oscillation suivant.

Théorème 1.3. Supposons que A vérifie les deux propriétés suivantes

a) $$D(A^{1/4}) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$$

b) $$T := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_n}} < +\infty$$

Alors, il existe un temps d'oscillation uniforme pour (2), égal à T .

Idée de la démonstration. On vérifie que sous l'hypothèse a), la série du second membre de (4) converge normalement dans $C(\bar{\Omega})$. Posant alors

$\tau_n = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$, pour tout $x_o \in \Omega$ et toute solution u de (2), la fonction $t \longmapsto u(t,x_o)$ est dans X défini dans l'énoncé du Théorème 1.2. Il est clair que le Théorème 1.2 implique le résultat.

<u>Application</u> : les 2 équations suivantes possèdent un temps d'oscillation uniforme

$$(7)\quad \begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + h(x)u = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times]0,\ell[\\ u(t,0) = u(t,\ell) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\ell) = 0 \ , \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

[ici h est supposé par exemple $\geqslant 0$]

$$(8)\quad \begin{cases} u_{tt} + (-1)^m \Delta^m u = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u = \Delta u = \ldots = \Delta^{m-1} u = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \end{cases}$$

avec $m > n$, Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Pour les détails de la vérification de a) et b) dans ces deux exemples, cf[7]. Il est plausible que le même résultat reste valable pour

$$\begin{cases} u_{tt} + (-1)^m \Delta^m u = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} = 0 \ , \ \forall \alpha \ \text{ tel que } |\alpha| \leqslant m-1 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \ . \end{cases}$$

avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $m > n$.

<u>Remarque</u> : la condition sur m dans les exemples (8) et (9) <u>exclut</u> l'équation (1), même lorsque $n = 1$.
Lorsque $n = 1$, les solutions de (1) étant périodiques de période $2|\Omega|$, il est clair qu'il existe un "temps d'oscillation uniforme" $2|\Omega|$. La théorie précédente est donc un peu trop grossière. Nous allons voir cependant que le théorème 1.2 est optimal, et que l'équation des ondes peut ne pas avoir de temps d'oscillation uniforme si $n > 1$.

2. <u>NON EXISTENCE D'UN TEMPS UNIFORME D'OSCILLATION POUR L'EQUATION (1) DANS UN RECTANGLE</u>.

Commençons par un résultat simple montrant que la Proposition 1.1 et le théorème 1.2 sont en général optimaux.

<u>Théorème 2.1</u>. Soit n un entier positif et $\tau_1,\dots,\tau_n$ des nombres positifs <u>deux à deux incommensurables</u>. Alors pour tout T tel que $0 < T < \sum_{j=1}^{n} \tau_j$, les restrictions à $[0,T]$ des fonctions de $X_{\tau_1}+\dots+X_{\tau_n}$ sont denses dans $C([0,T])$. Le théorème 2.1 est une conséquence assez immédiate de la théorie des fonctions moyenne-périodiques et de la notion de <u>densité uniforme</u> d'un ensemble (cf.[8] pour ces notions). On peut aussi en donner une démonstration directe basée sur un théorème de densité relatif au cas limite $T = \sum_{j=1}^{n} \tau_j$. Pour cette autre démonstration, nous renvoyons à [7] . Il est enfin tout à fait clair que ce résultat implique l'optimalité de la Proposition 1.1 lorsque les τ_j sont deux à deux incommensurables.

Munis de cet outil, nous pouvons alors démontrer le

<u>Théorème 2.2.</u> Soit a,b deux nombres positifs tels que $b^2/a^2 \notin \mathbb{Q}$. Soit $\Omega =]0,a[\times]0,b[\subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0) \in \Omega$ tel que x_0/a et y_0/b soient irrationnels. Alors pour tout $T > 0$, il existe une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\bar{\Omega})$ du problème

$$(10)\quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 & (t;x,y) \in \mathbb{R}\times\Omega \\ u(t,x,y) = 0 & (t,x,y) \in \mathbb{R}\times\partial\Omega \\ u(t,x_0,y_0) \geq 1 & t \in [0,T] \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\tau_j = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+j^2b^2}}$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$.

On fixe un entier $m \geq 1$ tel que $T < \sum_{j=1}^{m} \tau_j$. Il est immédiat que les τ_j sont 2 à 2 incommensurables, et le Théorème 2.1 implique immédiatement l'existence d'un entier $k \geq 1$ et d'une suite double $\{u_{j,r}\}$ définie pour $1 \leq j \leq m$, $1 \leq r \leq k$ telle que

$\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{k} u_{j,r}\cos\left(\frac{r\pi}{ab}\sqrt{a^2+j^2b^2}\,t + \alpha_{j,r}\right) \geq 1$, $\forall\, t \in [0,T]$, les $\alpha_{j,r}$ étant des réels.

On choisit alors

$$u(t,x,y) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{k} u_{j,r}\cos\left(\frac{r\pi}{ab}\sqrt{a^2+j^2b^2}\,t+\alpha_{j,r}\right)\frac{\sin\left(\frac{jr\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{r\pi y}{b}\right)}{\sin\left(\frac{jr\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{r\pi y_0}{b}\right)}$$

<u>Remarques</u>. a) En utilisant des résultats de théorie des nombres, Y. Meyer ([9]) a établi que le résultat du Théorème 2.2 est encore vrai lorsque $a = b$. Il est vraisemblable que le résultat est encore valable quels que soient a et b.

b) Il serait intéressant de déterminer si ce résultat est valable pour d'autres domaines Ω de $\mathbb{R}^2$ et en-dehors de certains points particuliers $(x,y) \in \Omega$.

3. CAS DE LA DIMENSION 1.

Dans ce paragraphe, nous prenons $\Omega =]0,\ell[$ avec $\ell > 0$.

3.1. Equations des ondes semi-linéaires.

On considère ici le problème

$$(11) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(u) = 0 \ , & (t,x) \in \mathbb{R}\times]0,\ell[\\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 \ , & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où g est une fonction de classe C^1 telle que

$$(12) \qquad g(-u) = -g(u)$$

(13) $\qquad g$ est croissante (au sens large)

Le résultat suivant est établi dans [3]

Théorème 3.1. Soit $x_o \in \Omega$, J un intervalle compact de $\mathbb{R}$, u une solution quelconque de (11). Si $u(t,x_o) \geqslant 0$ sur J et $|J| \geqslant 2\ell$, alors $u(t,x_o) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

Idée de la démonstration : on étend u sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{u}$ définie par les conditions

$\tilde{u}(t,-x) = -\tilde{u}(t,x), \quad \forall(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$

$\tilde{u}(t,x+2\ell) = \tilde{u}(t,x), \quad \forall(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Comme g est impaire, $\tilde{u}$ est une solution au sens des distributions sur $\mathbb{R}^2$ de

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + g(\tilde{u}) = 0 \ .$$

On pose ensuite $v(t,x) = \tilde{u}(t,2x_o - x)$ et $w = \tilde{u} + v$. Alors w est solution de $w_{tt} - w_{xx} = -\{g(\tilde{u}) + g(v)\} = -h(t,x)w(t,x)$ avec $h(t,x) \geqslant 0$, $h \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$

De plus on a $\left| \begin{array}{l} w(t,x_o) = 2u(t,x_o) \\ w_x(t,x_o) = 0 \end{array} \right. , \forall t \in \mathbb{R}$

Un lemme de Gronwall portant sur w^- permet alors d'établir que $w \geqslant 0$ dans un carré caractéristique $\mathcal{C}$ dont l'une des diagonales est l'intervalle J . Ce qui signifie en fait

(14) $$\tilde{u}(t,x) \geqslant \tilde{u}(t,x-2x_o) \text{ dans } \mathcal{C}$$

En prenant $t = t_o$ le milieu de J dans (14) on en déduit que $\tilde{u}(t_o,x)$ est $2x_o$-périodique, ce qui grâce à l'imparité de $\tilde{u}$ par rapport à x, donne finalement

(15) $$\tilde{u}(t_o,x) + \tilde{u}(t_o,2x_o-x) = 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Enfin, en raisonnant sur $\tilde{u}_t$ au point t_o, on établit que

(16) $$\tilde{u}(t,x) + \tilde{u}(t,2x_o-x) = 0 \ , \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Il est clair que ceci implique le résultat en prenant $x = x_o$

<u>Remarques</u>.

a) Le théorème 2.1 généralise au cas du problème semi-linéaire (11) la propriété évidente de <u>changement de signe</u> de $u(t,x_o)$ sur tout intervalle de longeur $\geqslant 2\ell$ lorsque u est une solution de (1) avec $\Omega =]0,\ell[$ et x_o n'est pas un "nœud" de la solution $u(t,x)$.

b) Ce résultat est en fait optimal en ce qui concerne l'estimation du "temps uniforme d'oscillation" pour une solution sans "nœud". En particulier, lorsque $g(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$ il y a des solutions telles que $u(t,x_o) \equiv 0$ sur un intervalle de longueur arbitrairement proche de 2ℓ, bien que $u(t,x_o) \not\equiv 0$ sur $\mathbb{R}$. (cf.[4])

L'addition d'un terme "coercif" du type $g(u)$ n'a donc pas d'influence sur la "fréquence" des oscillations <u>locales</u> des solutions.

c) Le théorème 2.1 permet d'obtenir une information non triviale sur le comportement à l'infini en t des solutions de (11). On a le résultat suivant.

<u>Corollaire 3.2.</u> Pour toute solution u de (11), l'une des conditions suivantes est satisfaite

(16) $$\lim_{t\to+\infty} \|u(t,.)\|_\infty = 0$$

(17) $\forall x \in \Omega$ avec $\frac{x}{\ell} \notin \mathbb{Q}$, on a $\liminf_{t\to+\infty} u(t,x) < 0 < \limsup_{t\to+\infty} u(t,x)$.

3.2. Variantes et généralisations possibles.

Le contre-exemple exhibé au théorème 2.2 suggère que l'obtention d'un temps uniforme d'oscillation n'est possible en général que pour des équations ayant un caractère uni-dimensionnel si l'opérateur A est d'ordre 2. Il est naturel de conjecturer l'existence d'un temps uniforme d'oscillation pour les problèmes suivants :

- Solutions radiales de (1) dans une boule de $\mathbb{R}^n$
- Solutions de problèmes semi-linéaires tels que

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + g(u) = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \,]0,\ell[\\ u(t,0) = u(t,\ell) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\ell) = 0 \ , \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Solutions de l'équation de K.D.V. avec conditions aux limites périodiques (on s'attend à des résultats d'oscillation sur u_x et u_t).

Le premier cas est résolu dans [5]. Les autres feront l'objet d'études ultérieures nécessitant l'introduction de nouvelles méthodes.

4. RESULTATS D'OSCILLATION GLOBALE ET "SEMI-GLOBALE" .

4.1. Un résultat "d'oscillation globale".

Soit u une solution quelconque de (1) et posons $v(t) = \int_\Omega u(t,x)\varphi_1(x)dx$, où $\varphi_1 > 0$ sur Ω est solution de $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$, $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$. Alors v est solution de

$$v'' + \lambda_1 v(t) = 0 \ , \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ . \tag{18}$$

Il en résulte que si $v \geq 0$ sur J avec $|J| > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$, alors $v \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ et $u \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \times \Omega$. On en déduit que si $u \not\equiv 0$ et $|J| > \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$, alors

$$\begin{cases} \operatorname{mes}\{(t,x) \in J \times \Omega,\ u(t,x) > 0\} \neq 0 \\ \operatorname{mes}\{(t,x) \in J \times \Omega,\ u(t,x) < 0\} \neq 0 \end{cases}$$

Ce résultat est optimal et a été généralisé dans [3] pour que le problème semi-linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g(t,x,u) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u_t = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \ . \end{cases}$$

lorsque g vérifie la condition simple

$$g(t,x,u)u \geq 0 \ , \ \forall (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \ .$$

4.2. Oscillations au voisinage du bord.

Physiquement parlant il est clair que c'est la condition de Dirichlet homogène $u = 0$ sur $\mathbb{R} \times \Gamma$ qui "fait osciller les solutions". Il est naturel de se représenter le phénomène en disant que "des oscillations partent du bord". Cette remarque est à la base du résultat suivant dont la démonstration détaillée sera donnée dans [5] .

Théorème 4.1. Il existe un nombre positif T , ne dépendant que du diamètre de Ω , et tel que si u est une solution de (1) vérifiant

(19) $$\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0 \text{ p.p sur } [0,T] \times \Gamma$$

on ait obligatoirement

$$u \equiv 0 \quad \text{p.p sur } \mathbb{R} \times \Omega \quad .$$

Principe de la démonstration.

On procède en deux étapes

Etape 1 . Soit d le "plus petit diamètre" de Ω , c'est-à-dire la distance minimum de deux hyperplans parallèles limitant une tranche d'espace qui contient Ω. On établit que si u vérifie (19) avec $T \geqslant d$, alors on a

(20) $$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ p.p sur } [\frac{d}{2} , T - \frac{d}{2}] \times \Gamma$$

Pour cela on remarque que pour tout $w \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \Omega)$ tel que $w_{tt} - \Delta w = 0$ sur $\mathbb{R} \times \Omega$, on a

(21) $$\frac{d}{dt}\{\int_{\Omega} (u_t w - u w_t) dx\} = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} dx$$

On se ramène par translation au cas où il existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = 1$ tel que

(22) $$\forall x \in \Omega , 0 < \alpha.x < d .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi \geqslant 0$ et $\operatorname{supp}(\varphi) = [-(T-d), 0]$. On pose $w(t,x) = \varphi(-t + \alpha.x) + \varphi(t-T + \alpha.x)$. On a alors $w(T-t,x) = w(t,x)$ et $w(0,x) = w_t(0,x) = 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. En intégrant (21) de 0 à T on obtient donc

(23) $$\int_0^T \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} dx\, dt = 0 .$$

Il est alors facile de déduire de (22) et de la définition de w que l'on a

$$(24) \qquad w(t,x) > 0 \text{ sur }]\frac{d}{2}, T-\frac{d}{2}[\times \overline{\Omega} .$$

Enfin (20) est une conséquence immédiate de (19), (23) et (24).

Etape 2. Quitte à remplacer T par $T-d$ et effectuer une translation en t, on se ramène au cas où une solution u de (1) vérifie la condition supplémentaire

$$(25) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } [0,T] \times \Gamma$$

En multipliant successivement (1) par u et $r\, u_r$, on obtient les identités :

$$(26) \qquad \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega u\, u_t \, dx\right) = \int_\Omega (u_t^{\,2} - |\nabla u|^2)\, dx$$

$$(27) \qquad \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega r\, u_r\, u_t\right) = \frac{n-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{n}{2} \int_\Omega u_t^2 dx$$

De (26) et (27) on déduit immédiatement

$$(28) \qquad \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega \{r\, u_r\, u_t + \frac{n-1}{2} u\, u_t\}\, dx\right) + \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx = 0$$

Or l'énergie totale $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u_t^2) dx$ est indépendante de t.
En intégrant (28) entre 0 et T on obtient facilement

$$(29) \qquad T\,\mathcal{E} \leqslant 2\left(R + \frac{n-1}{2\sqrt{\lambda_1(\Omega)}}\right) \mathcal{E}$$

où $\Omega \subset B_R$, et $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre de $(-\Delta)$ dans $H_0^1(\Omega)$.
On peut donc prendre $R = \text{diam}(\Omega)$ et comme d'autre part $\lambda_1(\Omega) \geqslant \dfrac{\lambda_1(B_1)}{R^2}$, on déduit de (29) que si $\mathcal{E} > 0$, alors

$$(30) \qquad T \leqslant \text{diam}(\Omega)\left(2 + \frac{n-1}{\sqrt{\lambda_1(B_1)}}\right)$$

Ceci achève la démonstration de la deuxième étape, et donc celle du Théorème 4.1.

5. QUELQUES PROBLEMES OUVERTS.

Mentionnons pour finir quelques problèmes ouverts qui nous semblent importants car leur résolution donnerait sans doute des informations intéressantes sur la structure profonde des problèmes hyperboliques.

Pb.1. Est-ce que la condition (16) du corollaire 3.2 peut effectivement être réalisée avec $u \neq 0$? [On sait d'après [2] que (16) n'est pas toujours vérifiée] .

Pb.2. Dans le cas où $n > 1$, existe-t-il des solutions régulières (par exemple C^∞) du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u^3 = 0 , & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ u = 0 & (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma \end{cases}$$

qui vérifie $u(t,x_o) \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$ (resp. $t \in \mathbb{R}$) où $x_o \in \Omega$?

Pb.3. Peut-on généraliser le Théorème 4.1 au cas d'un problème semi-linéaire tel que celui mentionné dans l'énoncé du Pb.2 ?

BIBLIOGRAPHIE :

[1] L. Amerio, G. PROUSE, Almost periodic functions and functional equations, Van Nostrand, New-York (1971).

[2] H. Brezis, J.M. Coron, L. Nirenberg, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, C.P.A.M. 33 (1980), 667-689.

[3] T. Cazenave, A. Haraux, Propriétés oscillatoires des solutions de certaines équations des ondes semi-linéaires, C.R.A.S. Paris, t.298, Série I (1984), 449-452.

[4] T. Cazenave, A. Haraux, Oscillatory phenomena associated to semi-linear wave equations in one spatial dimension, à paraître.

[5] T. Cazenave, A. Haraux, Some oscillation properties of the wave equation in several dimensions, à paraître.

[6] A.Haraux, Nonlinear evolution equations-Global behavior of solutions, lecture notes in Maths n°841, Springer Verlag (1981).

[7] A. Haraux, V. Komornik, Oscillations of anharmonic Fourier series and the wave equation, à paraître.

[8] Y. Meyer, Algebraic numbers and harmonic analysis, North-Holland publishing Co. (1970).

[9] Y. Meyer, communication orale du 26 Décembre 1984.

[10] Y. Meyer, Nombres premiers et vibrations. Séminaire Delange-Pisot - Poitou (1972).

*
* *
*