L. GUILLOPÉ

Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dans R^n

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

ASYMPTOTIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION POUR L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER DANS $\mathbb{R}^n$

par L. GUILLOPE

Exposé n°V

27 Novembre 1984

§ 0 INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est de présenter une démonstration de l'existence d'un développement asymptotique aux hautes fréquences pour la phase de diffusion $\delta_q(\mu)$ associée à l'opérateur $H = -\Delta + q$ où $H_o = -\Delta$ est le laplacien positif sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (n quelconque) et q un potentiel C^∞ à support compact.

Théorème :

$$\frac{d\delta_q}{d\mu} \sim \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \, \mu^{n/2-\ell-1} \qquad \text{si } n \text{ impair}$$

$$\frac{d\delta_q}{d\mu} = \sum_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} b_\ell \, \mu^{n/2-\ell-1} + O(\mu^{-\infty}) \quad \text{si } n \text{ pair .}$$

Ce résultat n'est pas essentiellement nouveau. Buslaev l'annonce dans [3] et on en a des cas particulier dans Majda-Ralston [10] (H sans spectre discret) Colin de Verdière [4] ($n = 1$ et 3) Guillopé [16] (n impair) Popov [11] ($n \geqslant 3$).

Après des rappels sur la théorie spectrale de H et quelques éléments de théorie de la diffusion (§ 1), nous consacrons le § 2 aux résultats de Birman - Krein sur les perturbations à trace d'opérateurs auto-adjoint bornés, résultats que l'on applique à notre problème au § 3 . Le § 4 achève la démonstration du théorème et le § 5 conclut avec quelques précisions et remarques.

§ 1 SPECTRE ET THEORIE DE LA DIFFUSION POUR H

Le spectre de H est constitué d'un spectre ponctuel fini de valeurs propres $\{\mu_j\}$ négatives ou nulles et d'un spectre absolument continu sur $\mathbb{R}^+$. La théorie de la diffusion précise la nature de la partie continue de H , on en rappelle deux approches dans la suite.

A Méthode dépendant du temps ([12])

Il s'agit de comparer les groupes d'évolution associés à H et H_o . On assimilera $H_{(o)}$ à un hamiltonien de la mécanique quantique et on parlera ainsi d'état pour un élément de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tous les états sont de diffusion pour H_o c.a.d. $\forall R$, $\forall \varphi \in L^2$, $\| e^{-itH_o} \varphi \|_{L^2(|x| \leq R)} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$. Pour H on a des états liés (qui ne sont pas de diffusion !), correspondant au spectre ponctuel. Le potentiel q étant à courte portée, on fabrique des états de diffusion pour H qui sont asymptotiquement (dans le passé ou dans le futur) des états de diffusion libre (i.e. pour H_o) grâce aux opérateurs d'onde $W_{\pm}$, définis par les limites fortes $W_{\pm} = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_o}$:

$$\| e^{-itH} W_{\pm} \varphi - e^{-itH_o} \varphi \| \xrightarrow{t \to \pm\infty} 0$$

Les $W_{\pm}$ sont définis sur L^2 et sont complets au sens où tout état de diffusion pour H est réalisé par $W_{\pm}$, plus précisément les $W_{\pm}$ sont des isométries de L^2 sur le sous espace d'absolue continuité de H .

On introduit alors l'opérateur de diffusion $S = W_+^* W_-$: si on a un état de diffusion pour le système perturbé d'hamiltonien H qui se comporte asymptotiquement dans le passé comme un état de diffusion libre φ_- , alors asymptotiquement dans le futur il se comportera comme un état de diffusion libre $\varphi_+ = S\varphi_-$.

S est unitaire et, vu que les $W_{\pm}$ entrelacent l'action de H_o avec celle de H , S commute avec H_o . Ainsi dans une représentation spectrale de H_o (et celle-ci est obtenue simplement via la transformation de Fourier), S opère diagonalement par la multiplication par l'opérateur $\mathcal{S}(\mu)$ $(\mu \geq 0)$, dite matrice de diffusion

B <u>Méthode stationnaire</u> ([1] , [12]).

Le but est d'introduire une décomposition en ondes de tout état de diffusion pour H , analogue à la décomposition (via Fourier) en ondes planes $e^{ikx.\omega}$$(k \in \mathbb{R}^x$, $\omega \in S^{n-1})$ des états de diffusion pour H_o . On aborde ce problème en étudiant l'existence de valeurs au bord pour les résolvantes $R_{(o)}(z) = (H_{(o)} - z)^{-1}$ sur le spectre continu.

Les opérateurs n'ont pas de valeur au bord en tant qu'opérateur borné de L^2 . On introduit les espaces de Sobolev à croissance pondérée

$$H^{m,s} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \ (1+x^2)^{s/2}\ u \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (m,s \in \mathbb{R})$$

qu'on munit de structures d'espace de Hilbert (equivalentes) avec les normes

$\|u\|_{m,s} = \|(1-\Delta)^{m/2}(1+x^2)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ ou $\|u\|^{\bullet}_{m,s} = \|(1+x^2)^{s/2}(1-\Delta)^{m/2}n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Alors les valeurs au bord $R_{(o)}(\lambda \underset{+}{-} i0) : H^{o,s} \longrightarrow H^{o,-s}(s> \frac{1}{2})$ existent et sont continues par rapport à $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Les valeurs au bord existent aussi pour la topologie des opérateurs bornés de $H^{m,s}$ dans $H^{m,-s}$ $(m \in \mathbb{R}\ ,\ s > \frac{1}{2})$. On pose alors :

$$\phi_{\pm}(x,k,\omega) = e^{ik\omega x} - R(k^2 \mp i0)\ (q\ e^{ik\omega x}),\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ h \in \mathbb{R}_*^+\ ,\ \omega \in S^{n-1}\ ,$$

ce qui fournit deux familles d'ondes (entrante, sortante) vérifiant $H\phi_{\pm} = k^2\phi_{\pm}$ dans lesquelles on peut décomposer tout état de diffusion pour H .

La matrice de diffusion $\mathcal{S}(\mu)$, opérateur de $L^2(S^{n-1})$ est alors de la forme $\mathcal{S}(\mu) = 1 - \mathcal{C}(\mu)$ où l'opérateur $\mathcal{C}(\mu)$ a pour noyau

$$\mathcal{C}(\mu,\omega,\omega') = i\pi\ \frac{\mu^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sqrt{\mu}\,\omega x}\ q(x)\phi_-(x,\sqrt{\mu},\omega')dx$$

soit $\mathcal{S}(\mu) = 1 - (2i\pi)\ \gamma(\mu)\mathcal{F}\ q(1-R(\mu+i0)q)\mathcal{F}^*\ \gamma(\mu)^*$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier $(\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix.\xi}f(x)dx)$ et $\gamma(\mu)$ l'opérateur de trace $[\gamma(\mu)g](\omega) = \frac{\mu^{\frac{n-2}{4}}}{\sqrt{2}}\ g(\sqrt{\mu}\omega)$

L'opérateur $\mathcal{C}(\mu)$ est à trace continu par rapport à μ . La matrice $\mathcal{S}(\mu)$ étant unitaire, on a

$\det \mathcal{S}(\mu) = e^{2i\pi\delta_q(\mu)}$ où $\delta_q(\mu)$, définie à un entier près, est appelée la phase de diffusion.

§ 2 . LES RESULTATS DE BIRMAN-KREIN ([2],[8])

Théorème 2.1. : Soient A_1 , A_2 des opérateurs auto-adjoints bornés tels que $A_2 - A_1$ soit à trace. Soit $\Delta(z) = \det(1 + (A_2 - A_1)\ (A_1 - z)^{-1})$. Alors en prenant la détermination principale de l'argument, la valeur au bord $\xi(\lambda) = \lim\limits_{\varepsilon \to o+} \frac{1}{\pi}$ Arg $\Delta(\lambda+i\varepsilon)$ existe p.p. la fonction ξ est intégrable avec $\|\xi\|_1 \leq \|A_2-A_1\|_{tr}$. Si ϕ est la transformée de Fourier d'une mesure bornée ayant un moment d'ordre 2, alors l'opérateur $\phi(A_2)-\phi(A_1)$, défini à partir du calcul fonctionnel des opérateurs auto-adjoints, est à trace et

$$\mathrm{Tr}\{\phi(A_2)-\phi(A_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)\phi'(\lambda)d\lambda . \tag{2.1}$$

La fonction ξ est constante en dehors des spectres de A_2 et A_1 . En un point isolé λ_o de $\sigma(A_2) \cup \sigma(A_1)$, ξ a un saut égal à la différence des multiplicités $\nu(A_1)-\nu(A_2)$ de λ_o . D'autre part on construit des opérateurs d'onde $W_\pm(A_2,A_1)$ à partir des groupes unitaires associés à A_1 et A_2 ; opérateurs d'onde qui réalisent des équivalences unitaires entre les sous-espaces d'absolue continuité de A_1 et A_2 . L'opérateur $S(A_1,A_2) = W_+^*(A_2,A_1)\ W_-(A_2,A_1)$ se diagonalise dans une représentation spectrale de A_1 en la multiplication par $\mathcal{S}(\lambda,A_1,A_2)$ $(\lambda \in \sigma_{ac}(A_1))$

Théorème 2.2. :

$$\det \mathcal{S}(\lambda,A_1,A_2) = e^{-2i\pi\xi(\lambda)} \quad \lambda \in \sigma_{ac}(A_1) \text{ p.p.} \tag{2.2}$$

§ 3 PHASE DE DIFFUSION POUR L'HAMILTONIEN H

Les opérateurs H et H_o n'étant pas bornés, les résultats précédents ne leur sont pas directement applicables : on va considérer des puissances convenables de résolvantes et utiliser le principe d'invariance de Birman-Kato ([12]) qui nous livre

$$\mathcal{S}(\mu,H_o,H) \simeq \mathcal{S}((\mu-E)^{-p}, R_o(E)^p , R(E)^p)^{-1} \quad (E \in \mathbb{R}-\sigma(H)) . \tag{3.1}$$

Proposition 3.1 a. Soit p entier au moins égal à $\frac{n+1}{2}$ et q_1,q_2 deux fonctions C^∞ à support compact telles que $q_1q_2 = q$.

$$\det \mathcal{S}(\mu) = \frac{\det_p(1+q_1R(\mu-io)q_2)}{\det_p(1+q_1R(\mu+io)q_2)} \exp \sum_{\ell=1}^{p-1} \frac{(-1)^\ell}{\ell} \mathrm{Tr}\{(q_1R(\mu-io)q_2)^\ell-(q_1R(\mu+iO)q_2)^\ell \tag{3.2}$$

b. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'opérateur $\phi(H) - \phi(H_o)$ est à trace et

$$\phi(H) - \phi(H_o) = \sum_j \phi(\mu_j) + \varepsilon\,\phi(o) + \int_o^\infty \phi(\mu) \frac{d\delta_q}{d\mu} d\mu . \tag{3.3}$$

Remarque 3.2. Le ε intervenant dans (3.3) est nul sauf (parfois) pour n = 3, auquel cas il vaut $\frac{1}{2}$: cela correspond à une "résonnance" i.e. l'existence d'une solution φ non L_2 de $H\varphi = 0$ mais cependant à croissance lente ($\varphi \in H^{1,-s}$). Dans la suite on notera

$$\sum_j{}' \phi(\mu_j) = \sum_j \phi(\mu_j) + \varepsilon\,\phi(0) .$$

<u>Résumé de la preuve</u> : Soit E réel en dehors du spectre de H. D'après l'équation de la résolvante $R(E)-R_o(E) = -R(E)_q R_o(E)$ on a

$$(3.4) \qquad R(E)^p - R_o(E)^p = -\sum_{h=1}^{p} R(E)^h \, q \, R_o(E)^{p-h+1} ,$$

qui est à trace si $p \geqslant \frac{n+1}{2}$ vu que l'injection $H_K^{s+n+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ l'est pour

$\varepsilon > 0$ et K compact ($H_K^t(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions dans $H^t(\mathbb{R}^n)$ a support dans K).

On applique alors les résultats de Birman-Krein à $R(E)^p$, $R_o(E)^p$: il s'agit d'étudier les valeurs au bord du déterminant de perturbation $\widetilde{\Delta}_E(\zeta)$ où on a posé $K_E(z) = (R(E)^p - R_o(E)^p)(R_o(E)^p - z)^{-1}$, $\widetilde{K}_E(\zeta) = K_E((\zeta-E)^{-p})$, $\widetilde{\Delta}_E(\zeta) = \det(1+\widetilde{K}_E(\zeta))$.

Des calculs simples utilisant la seconde équation de la résolvante donnent

$$(3.5) \quad 1 + K_E(\zeta) = \Sigma(E,\zeta) R(E)(1+qR_o(\zeta))(H_o - E)\Sigma_o(E,\zeta)^{-1} \quad \text{où}$$

$$\Sigma_{(o)}(E,\zeta) = \sum_{\beta=o}^{p-1} R_{(o)}(E)^\beta (\zeta-E)^{\beta-p}$$

D'après (3.4), on a $\widetilde{K}_E(\zeta)\ L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{o,s}$ on en déduit $\widetilde{\Delta}_E(\zeta) = \det_{L^2(\mathbb{R}^n)} (1 + \widetilde{K}_E(\zeta)) = \det_{H^{o,s}}(1+\widetilde{K}_E(\zeta))$; (où on prendra $s > \frac{1}{2}$).

Ainsi, bien que l'opérateur $1 + \widetilde{K}_E(\zeta)$ n'admette pas de valeur au bord sur $\mathbb{R}^+$ pour la topologie des opérateurs bornés de $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\Delta}_E(\zeta)$ a des valeurs au bord (continue) sur $\mathbb{R}^+$.
Utilisant (2.2) (3.1), (3.5) on en déduit

$$(3.6) \qquad \det \mathcal{S}(\mu) = \det_{H^{o,s}}(1+q\,R_o(\mu-io))(1+qR_o(\mu+io))^{-1}$$

Les opérateurs $q\,R_o(\mu \pm io)$ ne sont pas à trace mais de classe $\mathcal{J}_p$ (comme l'injection $H^{s+\frac{n}{p}+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$) . Un opérateur auto-adjoint est de classe $\mathcal{J}_p$ si la suite des valeurs propres de sa "valeur absolue" $\sqrt{A^* A}$ est dans $\mathcal{J}_p(\mathbb{N})$. Pour A dans $\mathcal{J}_p$, l'opérateur $A(p) = (1+A)\exp(\sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^\ell \frac{A^\ell}{\ell!})$ est une perturbation à trace de l'identité et on pose $\det_p(1+A) = \det A(p)$.
Remarquant en outre que $q(R_o(\mu-io)-R_o(\mu+io))$ est régularisant et donc à trace (q est à support compact), (3.2) découle de (3.6) via les calculs algébriques classiques sur les déterminants généralisés (du type $\det_p(1+AB)=\det_p(1+BA)$

si $A \in \mathfrak{I}_p$ et B borné).
Avant de faire une intégration par partie dans (2.1) (appliquée aux fonctions de $R_o(E)^p$, $R(E)^p$) suivie d'un changement de variable ($\lambda = (E-\mu)^{-p}$) pour obtenir (3.3), il faut étudier la fonction de déphasage spectral $\xi_E(\lambda) = \xi(\lambda, R_o(E)^p, R(E)^p)$ au voisinage de $(-E)^{-p}$, bord du spectre continu. Via (3.5), cela résulte de l'étude de $1 + q R_o(\zeta)$ au voisinage de $\zeta = 0$ ([6][7]).

§ 4 . EXISTENCE DU DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE.

On applique la formule des traces (3.3) à l'opérateur des ondes :
Soit $\rho \in C^\infty$ à support compact, valant 1 sur un voisinage de zéro (que l'on précisera)

$$(4.1)\quad \mathrm{Tr}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\lambda t} \rho(t)(\cos t\sqrt{H} - \cos t\sqrt{H_o})dt = \Sigma' \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\lambda t}\rho(E)\mathrm{ch}\sqrt{|\mu|_j}\ t\ dt$$

$$+ \frac{1}{2}\hat{\rho} * \tilde{\delta}_q(\lambda)$$

où $\tilde{\delta}_q$ est la fonction impaire telle que $\tilde{\delta}_q(\lambda) = \delta_q(\lambda^2)(\lambda > 0)$.
($\tilde{\delta}_q$ est en fait la phase de diffusion relative au générateur infinitésimal du groupe d'évolution décrivant les solutions de l'équation des ondes).
Par un argument de domaine de dépendance, l'opérateur dont on prend la trace dans le membre de gauche, opère de manière non triviale seulement sur les fonctions à support dans la boule B_r de rayon $r = R + 2T$ (supp $q \subset B_R$, Supp $\rho \subset [-T,T]$). En utilisant une paramétrix, on obtient un développement asymptotique aux hautes fréquences pour le membre de gauche de (4.1) : ce développement est en fait de la forme indiquée dans le théorème du § 0. ([5] p.46).
Quant au second membre, la somme $\sum_j'$ est à décroissance rapide. Pour étudier son second terme on revient à l'expression de $\tilde{\delta}_q$. On a les majorations ([1])

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} (1+|\lambda|)^{1-|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{o,-s} \leq C \ \|(-\Delta-\lambda^2)u\|_{o,+s} \qquad \lambda \geq \lambda_o > 0 \ .$$

ce qui permet de majorer la norme de $q_1 R_o(\lambda^2 \pm io)q_2$ en tant qu'opérateurs de L^2 dans L^2 ou de L^2 dans H^2 . On obtient alors

$$(4.2)\quad \|(q_1 R_o(\lambda^2 \pm i0)q_2)^\ell\|_{tr} \leq C(C'\lambda^{-1})^{\ell-2p} \ , \ \ell \geq p \ , \lambda \geq \lambda_o$$

et

$$(4.3)\quad 2i\pi\,\tilde{\delta}_q(\lambda) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \mathrm{Tr}\{(q_1R_o(\lambda^2-io)q_2)^\ell - (q_1R_o(\lambda^2+io)q_2)^\ell\},\ \lambda \gg 1$$

Posons $\tilde{T}_\ell(\lambda) = (q_1R_o(\lambda^2-io)q_2)^\ell - (q_1R_o(\lambda^2+io)q_2)^\ell$ et $\tilde{\tau}_\ell(\lambda) = \mathrm{Tr}\ \tilde{T}_\ell(\lambda)$.

<u>Lemme 4.1</u> : $\tilde{\tau}_\ell = \tilde{\tau}_{\ell,1} + \tilde{\tau}_{\ell,2}$ avec $\tilde{\tau}_{\ell,1}$ à support compact et $\tilde{\tau}_{\ell,2} = O(\lambda^{-\infty})$

<u>Lemme 4.2</u> : $\forall h \in \mathbb{N}$ $\tilde{\delta}_q = \tilde{\delta}_{1,h} + \tilde{\delta}_{2,h}$ avec $\tilde{\delta}_{1,h}$ à support compact et $\tilde{\delta}_{2,h} = O(\lambda^{-h})$.

<u>Remarque 4.3</u> : Ces deux lemmes sont aussi valables pour les dérivées $\frac{d\tilde{\tau}_\ell}{d\lambda}$, $\frac{d\tilde{\delta}}{d\lambda}$.

Le lemme 2 est un corollaire direct du lemme 1 et de (4.2),(4.3)

<u>Preuve du lemme</u> 1.

On a $\tilde{T}_\ell(\lambda) = \sum_{h=1}^{\ell} (q_1 R_o(\lambda^2 - i0)q_2)^{h-1}\, \tilde{T}_1(\lambda)\, (q_1 R_o(\lambda^2 + io)q_2)^{\ell-h}$

D'une part $\tilde{T}_1(\lambda)$ a pour noyau $\frac{i}{4\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n-2} q_1(x) \int_{S^{n-1}} e^{i\lambda\langle x-y,\omega\rangle} q_2(y)\, d\omega$

et est donc à trace, avec une norme trace à croissance polynomiale

D'autre part

$$(4.4)\quad q_1 R_o(\lambda^2 \pm io)q_2 = \int_o^\infty \varphi(t) e^{it(\lambda\pm io)} F(t)dt + \int_o^\infty (1-\varphi(t))\, e^{it(\lambda\pm io)} F(t)\, dt$$

où $F(t) = q_1 \frac{\sin t\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}} q_2$ et φ est C_o^∞ , valant 1 sur B_{2R} (si $\mathrm{Supp}(|q_1|+|q_2|)\subset B_R$).
En dimension n impaire, d'après le principe de Huyghens, le second terme dans le membre de gauche de (4.4) est nul alors qu'en dimension paire, sa norme (en tant qu'opérateur de L_2) est $O(\lambda^{-\infty})$.Le lemme 1 en découle immédiatement.
On achève la démonstration du théorème en prenant pour chaque entier h une fonction ρ_h valant 1 sur $\mathrm{Supp}\ \tilde{\delta}_{h,1}$.

Remarque 4.4 : En dimension n impaire, l'existence d'un développement asymptotique pour chaque $\tilde{\tau}_\ell$ est démontrée directement dans ([4] , [6]).

§ 5 <u>REMARQUES</u>

A <u>Précisions sur les coefficients</u> b_i .

On reprend la formule de trace avec l'opérateur de la chaleur

$$(5.1)\ Z(t) = \mathrm{Tr}(e^{-tH} - e^{tH_o}) = \sum' e^{-t\mu_j} + \int_o^\infty e^{-t\mu} \frac{d\delta_q}{d\mu}\, d\mu \quad .$$

On a $Z(t) \sim t^{-n/2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ $(t \to 0^+)$ où les a_i sont des intégrales de polynômes universels en q et ses dérivées. Par exemple $a_1 = -(4\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} q(x)\, dx$,

$$a_2 = \frac{(4\pi)^{-n/2}}{2} \int_{\mathbb{R}^n} q^2(x)\, dx. \quad ([6])$$

Ainsi on obtient $b_i = \dfrac{a_i}{\Gamma(\frac{n}{2}-i+1)}$ ($\forall i$ si n impair, $i = 1,\dots,\frac{n}{2}-1$ si n est pair)

Remarquons que dans le cas $n=2$, on a $\dfrac{d\delta_q}{d\mu} = O(\mu^{-\infty})$.

B <u>Identités de trace type Levinson</u>

On examine les coefficients des puissances entières de t dans les développements aux temps t petits des deux membres de (5.1).

Si n est impair

$$\sum_j{}' \mu_j^\nu = \int_0^\infty \mu^\nu \frac{d}{d\mu} \Big[\sum_{\ell=1}^{\nu+\frac{n-1}{2}} \frac{b_\ell}{n/2-\ell}\, \mu^{n/2-\ell} - \delta_q(\mu)\Big] d\mu \;;\quad \nu \in \mathbb{N}$$

En dimension $n=1$ et pour $\nu=0$ on retrouve le théorème de Lemmon ([9]) $\#\{\mu_j\} = \delta_q(0) - \delta_q(\infty)$.

Si n est pair

$$\sum_j \mu_j^\nu + (-1)^{\nu+1}\, \nu!\, a_{\nu+\frac{n}{2}} = \int_0^\infty \mu^\nu \frac{d}{d\mu} \Big[\sum_{\ell=1}^{n/2-1} \frac{b_\ell \mu^{n/2-\ell}}{\frac{n}{2}-\ell} - \delta_q(\mu)\Big]\, d\mu$$

C <u>δ comme fonction de comptage</u>

Soit H^a (resp. H_o^a) l'opérateur de $L^2(B_a)$, extension auto-adjointe de $-\Delta + q$ avec condition de Dirichlet sur la sphère $S_a = \{|x|=a\}$. (On supposera a tel que $\mathrm{Supp}\, q \subset B_a$).

Alors ρ étant fixé, de par la finitude de la vitesse de propagation pour l'équation des ondes, on a

$$\mathrm{Tr} \int e^{-i\lambda t} \rho(t)\, (\cos t\sqrt{H} - \cos t\sqrt{H_o})\, dt = \mathrm{Tr} \int e^{-i\lambda t} \rho(t)\, (\cos t\sqrt{H^a} - \cos t\sqrt{H_o^a})\, dt$$

pour a assez grand. Ainsi si $N_{(o)}^a(\lambda)$ # {valeurs propres de $H_{(o)}^a \leqslant \lambda$}

$$\hat{\rho} * \frac{d\tilde{\delta}_q}{d\lambda} + \Sigma' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-it\lambda} \rho(t) \operatorname{ch} \sqrt{|\mu_j|}\, t \, dt = \hat{\rho} * \frac{d(\tilde{N}^a - \tilde{N}^a_o)}{d\lambda} \qquad a \geqslant a(\rho)$$

D'autre part, en utilisant la formule de Feynman-Kac, on obtient

$$\operatorname{Tr} \{e^{-tH^a} - e^{-tH^a_o}\} \xrightarrow[a\to\infty]{} \operatorname{Tr} \{e^{-tH} - e^{tH_o}\}$$

soit $\int e^{-t\lambda} \, d(N^a - N^a_o) \to \Sigma' \, e^{-t\mu_j} + \int_o^\infty e^{-t\lambda} \frac{d\delta_q}{d\lambda} \, d\lambda.$

Ainsi $\delta_q + \Sigma' \, Y(\mu-\mu_j)$ (Y fonction d'Heaviside) apparait comme la différence $N^a - N^a_o$ de deux fonctions de comptage, asymptotiquement en a .

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. Agmon, Ann. d. Scuola Normale Sup. di Pisa 04 (1975) 151-218

[2] M.S. Birman, M.G. Krein, Dok. Akad. Nauk SSSR (1962) 475-478.

[3] V.S. Buslaev, Soviet Math. Dokl. 12 (1971) 591-595.

[4] Y. Colin de Verdière, a) Séminaire Bourbaki n° 557 (1980). b) Ann. E.N.S. 14 (1981)

[5] J.J. Duistermaat - V. Guillemin, Invent. Math. 29 (1975) 39-79.

[6] L. Guillopé, a. C.R.A.S. 293 (1981) 601-603. b. Thèse 3ème cycle Grenoble 1981 c. en préparation.

[7] M.Klaus, B. Simon, Ann. of Physics 130 (1980) 251-277.

[8] M.G. Krein, Mat. Sb 33-75 (1953) 597-626 (en russe)

[9] N. Levinson, Danske Vid Selsk Math Fys Medd 25 (1944) 1.29.

[10] A. Majda - J. Ralston, Duke math. J. 45 (1978) 513-536.

[11] G. Popov, asymptotic behaviour of the scattering phase for the Schrödinger operator , Preprint

[12] M. Reed B. Simon, Scattering theory (1979) Academic Press.

*
* *
*