C. Zuily

Régularité et non régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 18, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

REGULARITE ET NON REGULARITE DES SOLUTIONS NON STRICTEMENT CONVEXES DE L'EQUATION DE MONGE-AMPERE

Par C. ZUILY

Exposé n°XVIII

21 Mai 1985

I. INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est de présenter quelques résultats de régularité et de non régularité locale des solutions de l'équation

$$(1) \qquad \det(u_{ij}) = \psi(x)$$

où u est une fonction réelle de classe C^2, convexe, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, (u_{ij}) est la matrice des dérivées secondes de u et ψ une fonction positive ou nulle dans Ω.
Sur de telles solutions, le linéarisé de l'équation (1) a un symbole principal $p(x,\xi)$ positif ou nul dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Au voisinage des points de Ω où u est strictement convexe (ie. la matrice (u_{ij}) est définie positive ce symbole est elliptique : il est alors classique que toute solution C^2 est en fait C^∞.(*)
Le point de départ de notre étude est le récent travail de C.J.Xu [4] qui, utilisant la théorie des opérateurs para-différentiels de J.M. Bony [2] et les techniques de régularité dans les équations linéaires à forme caractéristique non négative, (L. Hörmander, O.A. Oleinik-E.V. Radkevitch) a démontré un résultat qui contient l'énoncé qui suit.
Soit $u \in C^2(\Omega)$ une solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$(2) \qquad F(x,u,Du,D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$. Notons $L^\circ(x,\xi)$ le symbole principal du linéarisé en u de l'équation (2) i.e. $L^\circ(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x,u,Du,D^2u)\xi_i\xi_j$ et

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Théorème 1.1 : (C.J.X [4])
Soit r un entier positif ou nul et $\rho_o = \mathrm{Max}(4, r+2)$. Soit $u \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ où $\rho > \rho_o$. Supposons que :

(*) Pour les résultats d'existence et de régularité concernant le cas elliptique nous renvoyons au récent article de Cafarelli-Nirenberg-Spreeck : C.P.A.M. Vol. XXXVII 369-402 (1984)

a) $$L^\circ(x,\xi) \geqslant 0 \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

b) Parmi les crochets d'ordre $\leqslant r$ des X_α , $\alpha = 1,\ldots,n$, en tout point de Ω il y en a n qui sont linéairement indépendants.

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Notons que si l'équation (2) est quasi-linéaire (resp. semi-linéaire) on a $\rho_o = \mathrm{Max}(3, r+2)$ (resp. $\rho_o = \mathrm{Max}(2, r+2)$).

Avant de passer à l'étude de l'équation (1) notons que l'on peut prouver une version, consacrée au problème aux limites, du théorème 1. Plus précisément :

Théorème 1.2.

Supposons que Ω soit un ouvert régulier. Soit $\rho_o = \mathrm{Max}(5, r+2)$ où $r \in \mathbb{N}$. Soit $u \in C^\rho(\bar\Omega)$ $\rho > \rho_o$ une solution du problème

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x,u,Du,D^2u) = 0 & \text{dans } \bar\Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

où $F \in C^\infty(\bar\Omega \times \mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$. Supposons que

a) $L^\circ(x,\xi) \geqslant 0 \quad \forall (x,\xi) \in \bar\Omega \times \mathbb{R}^n$

b) Parmi les crochets d'ordre $\leqslant r$ des X_α , $\alpha = 1,\ldots,n$, en tout point de $\bar\Omega$ il y en a n qui sont linéairement indépendants.

c) $\partial\Omega$ est non caractéristique pour L° .

Alors $u \in C^\infty(\bar\Omega)$.

La régularité à l'intérieur résultant du théorème 1.1, il faut, pour prouver la régularité au bord de la solution, outre les résultats de J.M. Bony, utiliser ceux de M. Sablé-Tougeron [3] sur les opérateurs para-différentiels "tangentiels" ainsi que le récent travail de S. Alinhac [1] sur la paracomposition.

II. REGULARITE A L'INTERIEUR DES SOLUTIONS DE L'EQUATION (1).

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 2.1

Soit ψ une fonction C^∞ dans Ω , réelle, $\psi \geqslant 0$. Soit $\rho > 4$ et $u \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ une solution réelle et convexe de l'équation (1). Supposons l'une des conditions équivalentes suivantes satisfaite :

a) $\forall x \in \psi^{-1}(0)$, $\exists$ $\alpha \in \{1,2,\dots,n\}$ t.q. $< d^2\psi(x)\ell_\alpha \, , \ell_\alpha > \neq 0$ où $\ell_\alpha = (\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}})_{j=1,\dots,n}$.

b) $\forall x \in \psi^{-1}(0)$, $L\psi(x) \neq 0$, où L est le linéarisé en u de l'équation (1).

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Remarques :

1. Si $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\psi \geq 0$ et $\psi > 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient, par le théorème 1.2., un résultat de régularité sur $\bar{\Omega}$ pour les solutions du problème de Dirichlet associé à l'équation (1) sous l'hypothèse a) ou b) ci-dessus.

2. Si $u \in C^4(\Omega)$ et si $d^2\psi(x)$ est définie positive en tout point de $\psi^{-1}(0)$, la condition a) est satisfaite. Par contre, bien que la condition a) ne fasse intervenir que les dérivées secondes de u , si u est seulement C^2 et si $d^2\psi(x)$ est définie positive sur $\psi^{-1}(0)$ la condition a) n'est pas toujours vérifiée et en fait les solutions C^2 peuvent ne pas être C^∞ comme le prouve la :

Proposition 2.2.

Il existe ψ , de classe C^∞ dans la boule $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\psi \geq 0$, $\psi > 0$ sur ∂B telle que $d^2\psi(x)$ soit définie positive en tout point de $\psi^{-1}(0)$ et telle que le problème $\begin{cases} \det(u_{ij}) = \psi \text{ dans } B \\ u_{|\partial B} \in C^\infty(\partial B) \end{cases}$ possède une solution $u \in C^{2+\varepsilon_0}(\bar{B})$ mais $u \notin C^3(\bar{B})$, (où $\varepsilon_0 > 0$).

3. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $u_{11}\,u_{22} - u_{12}^2 = x_1^2$. La condition a) du théorème se traduit par $u_{22}(0,x_2) \neq 0$ $\forall x_2$. De telles solutions existent, par exemple $u(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{12}x_1^4$.

4. Lorsque $\psi^{-1}(0)$ est une hypersurface, la condition a) exprime que les champs $X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha = 1,\dots,n$ ne sont jamais tous tangents à cette hypersurface.

La preuve du théorème 2.1. est basée sur le calcul des crochets d'ordre ≤ 2. Le point important est résumé dans le lemme suivant dont nous ne détaillerons pas la preuve.

Lemme 2.3

Pour $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$ on a

(4) $$\psi[X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = (X_\gamma X_\alpha \psi) X_\beta - (X_\gamma X_\beta \psi) X_\alpha$$

Preuve du théorème 2.1

Puisque $(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}})$ est la matrice des cofacteurs on a

(5) $$X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n = \psi^{n-1} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Soit $\alpha \in \{1,2,\ldots,n\}$, posons

$$\Delta_\alpha = X_\alpha \wedge \psi[X_\alpha,[X_\alpha,X_1]] \wedge \ldots \wedge \psi[X_\alpha,[X_\alpha, X_n]]$$

où, dans le membre de droite le terme nul $\psi[X_\alpha,[X_\alpha, X_\alpha]]$ a été omis. D'après (5) et le lemme 2.3 on peut écrire

$$\Delta_\alpha = \varepsilon (X_\alpha^2 \psi)^{n-1} \psi^{n-1} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \quad , \varepsilon = \mp 1 .$$

D'autre part

$$\Delta_\alpha = \psi^{n-1} \det(X_\alpha,[X_\alpha,[X_\alpha,X_j]]_{j=1,\ldots,n \,;\, j \neq \alpha}) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

d'où

$$\det(X_\alpha,[X_\alpha,[X_\alpha,X_j]] \; j \neq \alpha) = \varepsilon (X_\alpha^2 \psi)^{n-1} \quad , \varepsilon = \mp 1$$

Ensuite si $\ell_\alpha = (\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}})_j$, on a, en tout point de $\psi^{-1}(0)$

$$X_\alpha^2 \psi(x) = < d^2\psi(x)\ell_\alpha, \ell_\alpha >$$

La condition a) implique donc que l'on peut appliquer le th.1.1. avec $r = 2$. Notons qu'il est facile de voir que la condition a) est nécessaire et suffisante pour que les crochets d'ordre ≤ 2 engendrent $T_x\Omega$.

Preuve de la proposition 2.2 :

Considérons dans $B(0,1)$ la fonction $u = |x|^{2+\alpha}$ où $\alpha = \frac{2}{n}$. On montre facilement que $\det(u_{ij}) = c_\alpha |x|^2 = \psi$ où c_α est une constante.

III. RESULTATS DE NON REGULARITE.

On commence par un résultat en deux dimensions.

Théorème 3.1.

Soit Σ un hyperplan dans $\mathbb{R}^2$ et $x_o \in \Sigma$. Soit ψ une fonction analytique près de x_o, $\psi \geqslant 0$, avec $\Sigma = \psi^{-1}(0)$. Soit k un entier, $k \geqslant 2$. Il existe alors, au voisinage de x_o, une fonction u, convexe, de classe C^k mais non C^{k+1}, solution de l'équation (1) au voisinage de x_o.

Dans $\mathbb{R}^n$ on a un résultat un peu moins précis.

Proposition 3.2 :

Soit dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, un plan Σ de codimension p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $x_o \in \Sigma$. Il existe des fonctions $\psi \geqslant 0$, analytiques au voisinage de x_o, avec $\psi^{-1}(0) = \Sigma$ et telles que l'équation (1) possède des solutions u, convexes, de classe C^2 mais non C^3 au voisinage de x_o.

Esquisse de la preuve du théorème 3.1.

On peut supposer $\Sigma = \{x_1=0\}$ et $x_o = 0$. La preuve consistera à obtenir une solution formelle par superposition de solutions puis à prouver la convergence. Le premier lemme traduit l'homogénéité de degré 2 de l'équation (1). On notera ici $F(u) = \det(u_{ij})$ et L_u le linéarisé en u de l'équation (1).

Lemme 3.3.

(6) $$F\left(\sum_{j=o}^{N} u^j\right) = \sum_{j=o}^{N} F(u^j) + \sum_{k=o}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N} L_{u^k}(u^j)$$

A. Construction d'une solution formelle :

Pour $j \geqslant 0$ on pose

(7) $$\begin{cases} u^{2j} = x_1^{2+j}\, h_{2j}(x_2) \\ u^{2j+1} = x_1^{2+j}|x_1|\, h_{2j+1}(x_2) \end{cases}$$

où les h_k sont à déterminer. On pose $u = \sum_{j\geqslant 0} u^j$.

Grace au lemme 3.3. on calcule $F(u)$. On trouve

(8) $$F(u) = x_1^2 \sum_{\ell\geqslant 0} x_1^{\ell}\, H_{\ell}^{(o)}(x_2) + x_1^2|x_1| \sum_{\ell\geqslant 0} x_1^{\ell}\, H_{\ell}^{(1)}(x_2)$$

avec

(9) $$\begin{cases} H_o^{(o)} = 2(h_o h_o'' - 2h_o'^2) \\ H_{\ell}^{(o)} = 2\, h_o h_{2\ell}'' - 4(2+\ell)\, h_o'\, h_{2\ell}' + (1+\ell)(2+\ell) h_o''\, h_{2\ell} + \end{cases}$$

$$+ \sum_{p=1}^{\left[\frac{\ell-1}{2}\right]} \sum_{p+q=\ell} \{(1+p)(2+p)h_{2p}h''_{2q} - 2(2+p)(2+q)h'_{2p}h'_{2q} + (1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p}\} +$$

$$+ \sum_{p=o}^{\left[\frac{\ell-3}{2}\right]} \sum_{p+q=\ell-2} \{(3+q)(2+q)h_{2q+1}h''_{2p+1} - 2(3+p)(3+q)h'_{2q+1}h'_{2p+1} + (3+p)(2+p) \,.$$

$$h''_{2q+1}h_{2p+1}\} + \delta(\ell-2k)\ \{(k+1)(k+2)h_{2k}h''_{2k} - (2+k)^2 h'^2_{2k} + (k+1)(k+2)h_{2k-1}h''_{2k-1} -$$

$$- (2+k)^2 h'^2_{2k-1}\}$$

où $\delta(\ell-2k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } \ell = 2k \end{cases}$ et $[a]$ désigne la partie entière de a .

On a aussi

$$(10) \quad \begin{cases} H_o^{(1)} = 2\{h_o h''_1 - 6h'_o h'_1 + 3h''_o h_1\} \\ H_\ell^{(1)} = 2\ h_o h''_{2\ell+1} - 4(3+\ell)h'_o h'_{2\ell+1} + (2+\ell)\ (3+\ell)h''_o h_{2\ell+1} + \text{des sommes} \end{cases}$$

analogues à (9).

Soit $\psi \geqslant 0$ analytique avec $\psi^{-1}(0) = \{x_1 = 0\}$. On peut écrire $\psi = x_1^2 \sum_{\ell \geqslant o} x_1^\ell \psi_\ell(x_2)$. Compte tenu de (8), (9) et (10), résoudre l'équation $F(u) = \psi$ revient à résoudre

$$(11) \qquad \begin{cases} H_\ell^{(o)} = \psi_\ell & \ell \geqq 0 \\ H_\ell^{(1)} = 0 & \ell \geqq 0 \end{cases}$$

Pour $\ell = 0$, d'après le théorème de Cauchy-Kovalewski, il existe une fonction h_o , analytique dans un voisinage V de l'origine, solution du problème :

$$(12) \qquad \begin{cases} 2(h_o h''_o - 2h'^2_o) = \psi_o \\ h_o(0) = 1 \quad h'_o(0) = 0 \end{cases}$$

On fixe un voisinage V_o de l'origine où $h_o > 0$. Pour $\ell \geqslant 0$ les équations (11) sont des équations linéaires à coefficients analytiques que l'on peut résoudre par récurrence grâce à Cauchy-Kovalewski. On obtient ainsi une solution formelle de $F(u) = \psi$.

B. Construction d'une vraie solution.

Pour montrer que le processus décrit ci-dessus conduit à une vraie solution, il nous faut montrer que les fonctions analytiques h_ℓ ainsi déterminées existent dans un même voisinage de l'origine et déterminent une fonction u. Le point crucial de la preuve est résumé dans le

Lemme 3.4. :
Il existe des constantes $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $B > 0$ telles que $\forall j \geqslant 0$, $\forall \alpha \geqslant 0$

$$|h_j^{(\alpha)}(0)| \leqq \varepsilon A^j B^\alpha \frac{(\alpha+j)!}{(j+2)!(\alpha+j+1)^3} \tag{13}$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur j et à j fixé par récurrence sur α en utilisant les équations (11).

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. Alinhac : Paracomposition et applications aux équations non linéaires. Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer exposé n°11 (1985).

[2] J.M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités... Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 14 (1981), 209-246.

[3] M. Sablé-Tougeron : Régularité microlocale pour les problèmes aux limites non linéaires. Ann. Inst. Fourier (à paraître).

[4] C.J. Xu : Régularité des solutions des e.d.p. non linéaires. C.R. Acad. Sciences t.300 (1985) p.267-270.

* * *