Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Delort

G. Lebeau

Distributions I. Lagrangiennes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 17, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

DISTRIBUTIONS I. LAGRANGIENNES

par J.M. DELORT et G. LEBEAU

Exposé n°XVII

23 Avril 1985

I. ENONCE DU RESULTAT.

Soit F un fermé sous analytique de $\mathbb{C}^n$, contenant $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue sur F à valeurs complexes, telle que pour toute sous variété sous analytique V de F, $f|_V$ est de classe C^1, $df|_V$ est continue sur $\overline{V}$ et la forme différentielle $f|_V(dz_1\wedge \quad \wedge dz_r)|_V$ est fermée.

On pose $u = f|_{\mathbb{R}^n}$; (u est C^1) le résultat suivant donne une estimation du spectre analytique de Sato de u

1) Théorème $\quad SS(u) \subset (T^*_F)^a \cap T^*\mathbb{R}^n$

Ici, $T^*_F = SS(\underline{\mathbb{C}}_F)$ est le micro support de Kashiwara Schapira [5] du faisceau constant concentré sur F ; T^*_F est alors un fermé sous analytique Lagrangien dans $T^*\mathbb{R}^{2n}$. On a identifié $T^*\mathbb{R}^{2n}$ et $T^*\mathbb{C}^n$ par : à la forme $\mathbb{C}$-linéaire $\zeta \in T^*_x\mathbb{C}^n$, on associe la forme $\mathbb{R}$- linéaire ξ de $T^*_x\mathbb{R}^{2n}$ $\quad \xi(u) = -\operatorname{Im}\zeta(u)$.

Rappelons que lorsque F est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^{2n}$, T^*_F est le fibré conormal usuel de F ; lorsque F est un demi-espace défini localement près de x_o par $\varphi(x) \leqslant 0$, $\varphi(x_o) = 0$ $d\varphi(x_o) \neq 0$, on a

$$T^*_{F,x_o} = \{(x_o,\xi) \ , \ \xi = -\lambda \, d\varphi(x_o), \ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

Plus généralement, lorsque F est défini localement près de x_o par des inéquations portant sur des fonctions analytiques φ_j, $j = 1,\ldots,N$, $\varphi_j(x_o) = 0$:

$$F = \{x, \ \forall_j \ \ \varphi_j(x) \leqslant 0\}$$

on a une estimation :

2) $T^*_{F,x_o} \subset \{(x_o,\xi)$, il existe une partie J de $\{1,\ldots,N\}$ et des suites $x_n \to x_o$, $a^j_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{j\in J} a^j_n \, d\varphi_j(x_n) \to -\xi$ $\quad \varphi_j(x_n) = \varphi_{j'}(x_n)$ pour $j,j' \in J$ et $a^j_n\varphi_j(x_n) \to 0\}$.

Exemples : 1 $\quad F = \mathbb{R}^n + i\overline{\Gamma}$ où Γ est un cône convexe saillant, alors on obtient le résultat classique $SS(u) \subset \{(x,\xi), \ \xi \in \Gamma^\circ\}$ $\quad \Gamma^\circ$ = polaire de Γ

② $F = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Im} x_1 = \dots = \operatorname{Im} x_p = 0\}$. On obtient $SS(u) \subset \{(x,\xi)\ \ \xi_{p+1} = \cdot = \xi_n = 0\}$

③ Soit $f_j(x)$ N fonctions analytiques définies près de $x_o \in \mathbb{R}^n$, $f_j(x_o) = 0$, et $\operatorname{Im} f_j(x) \geqslant 0$ pour x réel. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n_x$ dans $\mathbb{R}^N_t$, $t_j = f_j(x)$ et $v(t)$ une fonction holomorphe dans $\operatorname{Im} t_j \geqslant 0$, C^1 jusqu'au bord ; En appliquant le théorème au fermé $F = \{\operatorname{Im} f_j \geqslant 0\}$, et en utilisant (2) avec $\varphi_j = -\operatorname{Im} f_j$, on obtient une majoration de $SS(f^*(v|_{\mathbb{R}^N_t}))$.

Lorsque $v(t) = \prod_{j=1}^{N} (t_j+i0)^{\lambda_j}$, $\operatorname{Re}\lambda_j > 1$. On retrouve ainsi un résultat de Kashiwara-Schapira [5] sur le spectre de $\prod_{j=1}^{N} (f_j + i0)^{\lambda_j}$, qui étend des résultats de [4] .

2. IDEE DE LA PREUVE.

On fixe $x_o \in \mathbb{R}^n$, et pour $0 < r < R$ on pose

(3) $$K = \{z \in F,\ |z-x_o| \leqslant R\}$$

(4) $$(Tu)(z,\lambda) = \int_{\Sigma_o} e^{-\frac{\lambda}{2}(z-x)^2} u(x)dx \qquad \Sigma_o = \{|x-x_o| \leqslant r,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

Alors T est la transformation F.B.I. usuelle, associée à la transformation canonique complexe χ de $T^*\mathbb{C}^n$

(5) $$(x,\xi) \xrightarrow{\chi} (z,\zeta) \quad z = x-i\xi \qquad \zeta = \xi$$

elle envoie $\mathcal{E}'(|x-x_o| < r)$ dans l'espace de Sjöstrand [8] H_{φ_o} , avec $\varphi_o(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} z)^2$, on a

(6) $$\chi(T^*\mathbb{R}^n) = \Lambda_{\varphi_o} = \{(z, \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi_o}{\partial z}(z))\}$$

et le spectre analytique de u en x_o est caractérisé par

(7) $(x_o,\xi^o) \notin SS(u) \Leftrightarrow \exists$ $C_o > 0$ tel que pour z près de $z_o = x_o - i\xi_o$, $\lambda \geqslant 1$, on ait $|T(u)(z,\lambda)| \leqslant \frac{1}{C_o}\, e^{\lambda[\varphi_o(z)-C_o]}$.

On définit alors une fonction ψ sur $\mathbb{C}^n$ en posant

(8) $$\psi(z) = \inf_{\substack{\Sigma \subset K \\ \partial\Sigma = \partial\Sigma_o}} \sup_{x \in \mathrm{supp}(\Sigma)} - \frac{1}{2} \mathrm{Re}(z-x)^2$$

l'infimum étant pris sur les n-chaînes sous-analytiques Σ à coefficient dans $\mathbb{C}$ [6] . On a évidemment $\psi \leqslant \varphi_o$. Le théorème (1) résulte alors essentiellement des deux propositions suivantes :

(9) Proposition 1 : $\psi(z)$ est localement lipschitzienne, sous-analytique et sur un ouvert Ω sous-analytique dense de $\mathbb{C}^n$ on a :

$$(z \, , \frac{2}{i} \frac{\partial\psi}{\partial z}) \in \chi((T_K^* \cup T_{\partial\Sigma_o}^*)^a) \text{ pour } z \in \Omega$$

(10) Proposition 2 : Pour tout compact $W \subset\subset \mathbb{C}^n$, il existe C_W tel que pour $z \in W$, $\lambda \geqslant 1$ $|Tu(z,\lambda)| \leqslant C_W \, e^{\lambda\psi(z)}$

En effet, soit alors $z_o = x_o - i\xi° \in \mathbb{C}^n$ tel que $\psi(z_o) = \varphi_o(z_o)$, par le principe du maximum et la caractérisation (7) du spectre analytique, on montre que si $(x_o,\xi°) \in SS(u)$ alors ψ est nécessairement dérivable en x_o et $d\psi(z_o) = d\varphi_o(z_o)$. On achève la preuve en montrant qu'il existe une suite $z_n \in \Omega$ $z_n \to z_o$, telle que : $d\psi(z_n) \to d\psi(z_o)$.

3. MINI MAX DES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES SOUS ANALYTIQUES

Soit M une variété analytique réelle et φ une fonction réelle continue sur M ; par définition φ est sous-analytique ([3]) ssi le surgraphe $G^+(\varphi)$

(11) $$G^+(\varphi) = \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} \ , \ t \geqslant \varphi(x)\}$$

est sous-analytique. On définit alors la différentielle de φ par :

(12) $$\Lambda_\varphi = \{(x,-\xi) \in T^*M \ (x,t = \varphi(x) \ ; \ \xi \ , \ \tau = 1) \in T^*_{G^+(\varphi)} \}$$

Une fonction sous-analytique est analytique sur un ouvert sous-analytique dense de M . Un point au voisinage duquel φ est analytique est dit générique ; en un tel point x , la fibre $\Lambda_{\varphi,x}$ de Λ_φ est égale à $\{d\varphi(x)\}$.

D'après les résultats de [5] , Λ_φ est un fermé sous-analytique de T^*M et on montre que φ est localement Lipschitzienne ssi la projection π : $\Lambda_\varphi \to M$ est propre, ce qu'on suppose dans la suite. Soit $N \hookrightarrow M$ une sous-variété et $p : T^*M \times_M N \to T^*N$ la projection canonique ; on a alors

(13) <u>Propositon 3</u> : 1) $\Lambda_{\varphi|N} \subset p(\Lambda_\varphi)$

2) il existe un sous analytique ferme Z de N , codim $Z \geqslant 1$ tel que pour $x \notin Z$ $\Lambda_{\varphi|N,x} = p(\Lambda_\varphi, x)$.

Soit $\mathcal{K} = \{K_1,\ldots,K_m\}$ une famille finie de compacts sous analytiques de M

(14) <u>Définition</u> : 1) $x \in M$ est un point $\mathcal{K}$-critique de φ ssi il existe ξ tel que $(x,\xi) \in \Lambda_\varphi \cap (\bigcup_j T^*_{K_j})$

2) $C \in \mathbb{R}$ est valeur $\mathcal{K}$-critique de φ ssi $c = \varphi(x)$ avec x point $\mathcal{K}$-critique de φ .

On remarquera qu'il s'agit d'une notion orientée : par exemple avec $M = \mathbb{R}^n$, $\varphi = x_n$, $\mathcal{K} = \{|x| \leqslant 1\}$ -1 est valeur critique, mais pas $+1$.

La proposition 3 entraîne que si $t \to x(t)$ est une courbe contenue dans les points critiques, $\varphi(x(t))$ est constante. Il en résulte

(15) <u>Proposition 4</u> : L'ensemble des valeurs $\mathcal{K}$-critique est fini.

Le résultat géométrique suivant résulte essentiellement de la théorie du micro-support de Kashiwara-Schapira. Il permet de déformer le contour d'intégration dans la transformation de F.B.I. (4).

(16) <u>Proposition 5</u> : Soit φ $M \to \mathbb{R}$ lipschitzienne, sous analytique K un compact de M , $K_c = \{x \in K \ , \ \varphi(x) \leqslant c\}$. Soient c_1 , c_2 tels que $]c_1 , c_2]$ ne contienne pas de valeur K critique ; alors pour $c_1 \leqslant c \leqslant c' \leqslant c_2$, on a un isomorphisme $H_*(K_c) \xrightarrow{\sim} H_*(K_{c'})$ (H_* désignant l'homologie singulière à coefficient dans $\mathbb{C}$).

Soit à présent $x \in M$, $y \in N$, K un compact de N , Σ_o une p-chaîne sous analytique de M contenue dans K , et $\varphi : N \times M \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne et sous analytique. Posons

(17)
$$\psi_K(x) = \inf_{\substack{\Sigma \subset K \\ \partial\Sigma = \partial\Sigma_o}} \ \sup_{y \in \Sigma} \ \varphi(x,y)$$

où l'infimum est pris sur les chaînes singulières Σ à coefficients dans $\mathbb{C}$ (ou sur les chaînes sous-analytiques, ce qui donne la même fonction ψ_K) . Alors il résulte de la proposition 5 que $\psi_K(x)$ est valeur $(K,\partial\Sigma_o)$ critique de $y \to \varphi(x,y)$; comme ψ_K est lipschitzienne, la proposition 4 entraîne alors la sous-analyticité de ψ_K ; on montre alors qu'en un point générique x de ψ_K , avec $\xi = d\psi_K(x)$, il existe $(y,\eta) \in T^*_K \cup T^*_{\partial\Sigma_o}$ tel que $(x,\xi,y,\eta) \in \Lambda_\varphi$, ce qui termine la preuve de la proposition 1.

Comme l'homologie singulière d'un compact sous-analytique se calcule à l'aide des chaînes sous-analytiques, il en résulte que pour tout $x \in M$, il existe une p-chaîne Σ_x sous-analytique telle que $\partial\Sigma_x = \partial\Sigma_o$, support $(\Sigma_x) \subset \{y \in K, \varphi(x,y) \leqslant \psi_K(x)\}$ (i.e. dans (17) l'inf est atteint par une chaîne sous-analytique). En utilisant le résultat de [1] on sait qu'on peut alors supposer le p-volume de Σ_x localement borné en x .
On achève la preuve de la proposition 2 en démontrant la formule de Stockes pour f , et en remarquant que pour R assez petit, K se rétracte sur x_o (F est triangulable) [2] donc n'a pas d'homologie.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> :

[1] J.M. Delort : Résolution d'un bord sous-analytique d'un fermé sous-analytique par une chaîne de mesure uniformément bornée par rapport au paramètre. Note C.R.A.S.

[2] Hardt : Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps. Invent. Math. 38 (1977).

[3] Hironaka : Introduction to real analytic sets and real analytic maps. Instituto Conelli Pisa 1973.

[4] M. Kashiwara,T. Kawai : On holonomic systems for $\pi(f_j+io)^{\lambda_j}$. Publication R.I.M.S. 1979.

[5] M. Kashiwara,P.Schapira : Microlocal Study of Sheaves. A Paraître à Astérisque.

[6] Poly : Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques. Thèse Poitiers 1974.

[7] P. Schapira : Application of the microlocal theory of Sheaves to the Study of $\mathcal{O}_X$. Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 84/85 Exposé n°IV .

[8] J. Sjöstrand : Singularités analytiques microlocales. Astérisque n°95.

***