Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Grigis

Sur l'équation de Hill analytique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

SUR L'EQUATION DE HILL ANALYTIQUE

par A. GRIGIS

Exposé n°XVI

23 Avril 1985

I. INTRODUCTION.

L'équation de Hill, ou équation de Schrödinger à potentiel périodique en dimension un, s'écrit

$$(1.1) \qquad - u''(x) + (V(x)-E)u(x) = 0$$

Où E est un paramètre et V une fonction réelle périodique de période π. Nous supposerons V réel-analytique, toutefois nous citerons des résultats où il suffit que V soit C^∞ et même seulement L^2_{loc}.

Nous noterons τ la translation de π. On a donc

$$(1.2) \qquad \tau V(x) = V(x+\pi) = V(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Rappelons quelques faits biens connus (voir par exemple les ouvrages de Eastham [3] , Magnus et Winkler [10] ou encore Reed et Simon IV Ch 13 [11]).

Le spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est la réunion des bandes d'énergie :

$$(1.3) \qquad [E^+_{n-1}\ ,\ E^-_n] = \{\lambda_n(k) \ ;\ (-1)^{n+1}\, k \in [0,1]\} \ ,\ n \geqslant 1 \ ,$$

où $\lambda_n(k)$ est la $n^{\text{ième}}$ valeur propre du problème autoadjoint sur $L^2([0,\pi])$ (problème de Floquet) :

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} &- u''(x) + (V(x)-\lambda)\, u(x) = 0 \\ &u(\pi) = e^{ik\pi}\, u(0) \\ &u'(\pi) = e^{ik\pi} u'(0) \quad . \end{aligned}$$

Pour tout $n \geqslant 1$ on a les inégalités

$$(1.5) \qquad E^+_{n-1} < E^-_n \leqslant E^+_n < E^-_{n+1}$$

Les valeurs propres périodiques (respectivement anti-périodiques) sont $\{E^\pm_n\ ,\ n \text{ pair}\}$ (respectivement $\{E^\pm_n\ ,\ n \text{ impair}\}$). Les bandes d'énergie sont séparés par des intervalles d'instabilité $]E_n^-, E_n^+[$, éventuellement vides. On s'intéresse à la largeur du n-ième intervalle d'instabilité

$$(1.6) \qquad \gamma_n = E_n^+ - E_n^- \geqslant 0$$

Si $V \in L^2_{loc}$, la suite γ_n est de carré sommable ($(\gamma_n) \in \ell^2_+$) et dans [6] , Garnett et Trubowitz ont montré que l'application $V \to (\gamma_n)$ est surjective sur ℓ^2_+ . D'autre part il est connu que la suite (γ_n) est à décroissance rapide si et seulement si V est C^∞ , [9] , et à décroissance exponentielle si et seulement si V est réel-analytique [13]. Ici nous précisons le résultat de Trubowitz [13] pour les potentiels analytiques. Notre méthode nécessite l'étude de l'extension de l'équation (1-1) au domaine complexe. Nous introduisons une notion particulière d'indicatrice de croissance.

Définition 1.1. Soit v une fonction réel-analytique bornée sur $\mathbb{R}$. Pour $\rho > m = \sup_{\mathbb{R}} |v|$, nous posons

(1.7) $M(v,\rho) = \sup\{A > 0$; v s'étend holomorphiquement à $|\mathrm{Im}\, x| < A$ et $|v(x)| < \rho$ si $|\mathrm{Im}\, x| < A\}$.

La fonction $M(v,\rho)$ est croissante en ρ et v s'étend holomorphiquement au domaine $|\mathrm{Im}\, x| < M(v,+\infty)$. Si v n'est pas constante la fonction M croit moins vite que toute puissance de ρ . Si P_N est un polynôme trigonométrique de degré N on a

$$(1.8) \qquad M(P_N,\rho) = \frac{1}{N} \operatorname{Log} \rho \ (1 + O(1))$$

Nous pouvons énoncer

Théorème (1.2). Soit V un potentiel réel-analytique périodique de période π . Soit $c_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(t)dt$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe n_o tel que pour $n > n_o$ on ait la majoration de la largeur du n-ième intervalle d'instabilité

$$(1.9) \qquad \gamma_n \leqslant \exp(-(2-\varepsilon)nM(n^2 + c_o - \varepsilon)) .$$

Corollaire 1.3 : Si V s'étend holomorphiquement à la bande $|\mathrm{Im}\, x| < B$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_o tel que pour $n > n_o$

(1.10) $$\gamma_n \leqslant \exp(-2(B-\varepsilon)n) \ .$$

Pour l'équation de Mathieu, c'est à dire (1,1) avec $V = \mu \cos 2x$, le comportement asymptotique de γ_n a été trouvé par Harrell [8] et Avron-Simon [1]. Nous retrouvons ce résultat (voir §5).

Dans [7] on trouve un résumé d'autres propriétés de (1-1) liés à la théorie de Korteweg-de Vries ([9] ,[13]). Notamment dès que V est C^∞ il est facile de trouver un développement asymptotique de $E_n^\pm$ en puissances de n , par une méthode WKB. On obtient le même développement non convergent pour E_n^+ et E_n^-

(1.11) $$E_n^\pm \sim n^2 + \sum_o^\infty c_k \, n^{-2^k}$$

où $c_o = \frac{1}{\pi} \int_o^\pi V(t)dt$ et plus généralement, c_k est la moyenne sur $[0,\pi]$ d'un polynôme de V et de ses dérivées. Les coefficients c_k sont des invariants spectraux, reliés simplement aux invariants de Korteweg-de Vries. Pour tout ce qui concerne la théorie de l'isospectralité de l'équation de Hill on peut se référer à la bibliographie de [7], notamment à [9].

L'auteur tient à remercier J. Ecalle, B. Helffer et J. Sjöstrand pour d'intéressantes discussions.

2. METHODE.

La translation τ définit un automorphisme de l'espace des solutions de l'équation (1.1) qui est invariante. Nous utilisons l'équation caractéristique de cet automorphisme qui a pour valeur propre 1 (resp.-1) ssi (1.1) a une solution périodique (resp. anti-périodique).

Rappelons que si (u_1,u_2) sont des solutions de (1.1) le wronskien

(2.1) $$W(u_1,u_2) = u_1(x)\ u_2'(x) - u_2(x)\ u_1'(x)$$

est indépendant de x , et il est nul si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas linéairement indépendantes.

L'équation caractéristique de τ s'écrit

(2.2) $$\lambda^2 - \Delta(E)\lambda + 1 = 0$$

La fonction $\Delta(E)$ est appelée discriminant de l'équation de Hill.

Si (u_1,u_2) est une base de solutions de (1.1), on a :

$$\Delta(E) = \frac{W(\tau u_1,u_2) + W(u_1,\tau u_2)}{W(u_1,u_2)} \tag{2.3}$$

Les valeurs propres périodiques et anti-périodiques de l'équation de Hill sont donc les racines de $\Delta(E) = \pm 2$ soit

$$\Delta(E_n^{\pm}) = 2(-1)^n \tag{2.4}$$

Notre méthode consiste à choisir une base de solutions dépendant analytiquement de E et à estimer le mieux possible les valeurs caractéristiques de τ pour E grand.

On prendra toujours une base de la forme (u_+,u_-) avec

$$u_- = \overline{u}_+ \tag{2.5}$$

On pose

$$a(E) = \frac{W(\tau u_+,u_-)}{W(u_+,u_-)} \qquad b(E) = \frac{W(u_+,\tau u_+)}{W(u_+,u_-)} \tag{2.6}$$

et d'après (2.2) on tire

$$\begin{aligned} (a\overline{a} - b\overline{b})\,(E) &= 1 \\ \Delta(E) &= 2 \operatorname{Re} a(E) \end{aligned} \tag{2.7}$$

et on obtient facilement la

Proposition 2.1 Les valeurs propres périodiques (resp. anti-périodiques) assez grandes de l'équation de Hill sont les solutions de

$$a(E) = (-1)^n \pm i\,|b(E)|\,,\ n \text{ pair (resp. n impair)} \tag{2.8}$$

Pour V analytique et E réel grand, nous construirons une base (u_+,u_-) pour laquelle les fonctions analytiques $a(E)$ et $b(E)$ vérifient

$$\begin{aligned} a(E) &= e^{i\pi E^{1/2}}(1 + O(E^{-1/2})) \\ a'(E) &= e^{i\pi E^{1/2}}\ \frac{i\pi}{2}\, E^{-1/2}(1 + O(E^{-1/2})) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$|b(E)| = O\,(\exp(-c\, E^{1/2})) \qquad c > 0\,. \tag{2.10}$$

On voit que pour n grand il y a deux racines de (2.8) proches de n^2 (voir Magnus-Winkler [10] p.37 pour une démonstration de ce que ces racines sont bien E_n^+ et E_n^-). D'autre part si on améliore l'estimation (2.10) sur $|b(E)|$ on peut immédiatement majorer mieux γ_n pour n grand. C'est ce que nous allons faire. A partir de (2.9) et (2.10) on obtient facilement une majoration pour $n > n_o$

(2.11) $$\gamma_n \leqslant C_o \, n \exp(-cn)$$

3. SOLUTIONS DANS LE DOMAINE COMPLEXE.

Nous résolvons l'équation (1.1) étendue au domaine complexe en donnant des solutions sous la forme de séries de fonctions convergentes. Nous utilisons ici des formules dues à Ecalle [4]. Une partie des notions utilisées se trouve aussi dans Sibuya [12] et Evgrafov-Fedoryuk [5].

Le changement de variable

(3.1) $$z(x) = \int_o^x (V(t)-E)^{1/2} dt$$

et le changement de fonction inconnue

(3.2) $$u(x) = (V(x)-E)^{-\frac{1}{4}} \varphi(z(x))$$

permettent de transformer l'équation (1.1) en

(3.3) $$-\varphi''(z) + (1 + H^2(z) - H'(z))\varphi(z) = 0$$

avec

(3.4) $$H(z(x)) = -\frac{1}{4}(V(x)-E)^{-3/2} \, V'(x)$$

On obtient des solutions de (3.3) sous la forme

(3.5) $$\begin{aligned} \varphi_+(z) &= e^z \Big(\sum_{n=o}^{\infty} W_n(z) \Big) \\ \varphi_-(z) &= e^{-z} \Big(\sum_{n=o}^{\infty} W_{-n}(z) \Big) \end{aligned}$$

ou les W sont obtenus par récurrence à l'aide de

(3.6) $$\begin{aligned} & W_o = 1 \\ & (\partial_z + 2\varepsilon) W_{(2p+1)\varepsilon} = - H W_{2p\varepsilon} \qquad \varepsilon = \pm 1 \\ & \partial_z \, W_{2p\varepsilon} = - H \, W_{(2p+1)\varepsilon} \end{aligned}$$

Afin de préciser le domaine de validité des solutions (3.5) donnons la

<u>Définition 3.1</u> : On appelle <u>point tournant</u> un point $\hat{x}$ du domaine d'analyticité de V vérifiant

$$V(\hat{x}) = E \tag{3.7}$$

On dit que $\hat{x}$ est simple si $V'(\hat{x}) \neq 0$.

Les points tournants dépendent de E . En général ils sont en nombre infini mais tous simples.

Le changement de variable (3.1) est singulier au point tournant. D'ailleurs $z(x)$ n'est bien défini que dans un domaine simplement connexe sans points tournants. Si $\hat{x}$ est un point tournant simple, la fonction $H(z)$ admet un pôle simple au point $\hat{z} = z(\hat{x})$

$$H(z(x)) = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{z(x)-\hat{z}} + O(1) \tag{3.8}$$

En particulier les formules (3.5) ne sont plus valables aux points tournants. Nous allons définir un domaine "de sécurité" exempt de points tournants ou nous pourrons construire les solutions de (1-1) .

<u>Proposition 3.1</u> : Soit $E > m = \sup_{\mathbb{R}} |V|$. Soit le domaine de sécurité

$$D(E) = \{x, |\mathrm{Im}\, x| < M(V,E)\} \tag{3.9}$$

La fonction $z(x)$ est injective dans $D(E)$ et $z(D(E))$ contient la bande

$$\hat{D}(E) = \{z, |\mathrm{Re} z| < E^{1/2} M(V,E)\ (1 - (1- \frac{m}{E}\ )\ (\log \frac{E}{m})^{-1}) \tag{3.10}$$

<u>Preuve</u>. Par définition de $M(V,E)$, la fonction V est holomorphe dans $D(E)$ et il n'y a pas de points tournants dans $D(E)$. Pour x , $y \in D(E)$ on note $[x,y]$ le segment de droite joignant x à y , et on a

$$\begin{aligned} & z(y)-z(x) = iE^{1/2}(y-x) + i \int_{[x,y]} \frac{-V(t)dt}{(E-V(t))^{1/2}+E^{1/2}} \\ & |z(y)-z(x)-iE^{1/2}(y-x)| \leqslant E^{-1/2}|y-x| \sup_{[x,y]} |V| \leqslant (E^{1/2}-\varepsilon)\ |y-x| \end{aligned} \tag{3.11}$$

ce qui montre l'injectivité de z .

Dans D(E) on montre en utilisant le théorème des 3 droites de Hadamard

(3.12) $$|V(x)| \leqslant m\left(\frac{E}{m}\right)^{\frac{|\operatorname{Im} x|}{M(E,V)}}$$

On peut alors majorer $|z(x)- iE^{1/2}x|$ facilement et obtenir la proposition.

Nous pouvons maintenant construire les solutions (3.5) dans $\breve{D}(E)$ en choisissant un point de base $z_o \in \breve{D}(E)$ et en posant

(3.13) $$\begin{aligned} W_{2p+1}(z) &= - \int_{\Gamma_{2p+1}(z_o,z)} e^{2(z_1-z_2+\ldots+z_{2p+1}-z)} H(z_1)\ldots H(z_{2p+1})dz_1\ldots dz_{2p+1} \\ W_{2p}(z) &= \int_{\Gamma_{2p}(z_o,z)} e^{2(z_1-z_2+\ldots-z_{2p})} H(z_1)\ldots H(z_{2p})dz_1\ldots dz_{2p} \end{aligned}$$

où $\Gamma_n(z_o,z)$ représente l'ensemble des n-uples $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ rangés dans cet ordre sur le segment $[z_o,z]$. On utilisera parfois la notation

(3.14) $$\Gamma_n(z_o,z) = \{z_o \leqslant z_1 \leqslant z_2 \ldots \leqslant z_n \leqslant z\}$$

Nous avons défini dans $\breve{D}(E)$ une solution φ_+ de l'équation (3.3) car il est facile de voir que la série des intégrales du type Volterra W_n converge, et la fonction φ_+ vérifie

(3.15) $$\begin{aligned} \varphi_+(z_o) &= e^{z_o} \\ \varphi'_+(z_o) &= e^{z_o}(1-H(z_o)) \end{aligned}$$

Pour définir φ_- on choisit le point de base $-\bar{z}_o$ et on peut poser

(3.16) $$\varphi_-(z) = \overline{\varphi_+(-\bar{z})}$$

ce qui donne des solutions u_+ et u_- conjuguées de l'équation (1-1) par la correspondance (3.2).

On choisit $z_o \in \breve{D}(E)$ avec une partie réelle la plus petite possible, par exemple :

(3.17) $$z_o = - E^{1/2}M(E,V)\ (1-\varepsilon)\ ,\ \varepsilon > 0$$

D'autre part on pose

(3.18) $$T(E) = \int_0^{\pi}(E-V(t))^{1/2}dt$$

et on note encore τ la translation par $iT(E)$ dans le plan des z

$$\tau\varphi(z) = \varphi(z+iT(E)) \tag{3.19}$$

Un calcul un peu long donne la

Proposition (3.3). Pour la base (u_+,u_-) définie ci-dessus on a

$$a(E) = e^{iT(E)} \frac{1+\sum_{p=1}^{\infty} W_{2p}(-\bar{z}_o+iT(E))}{1+\sum_{p=1}^{\infty} W_{2p}(-\bar{z}_o)}$$

(3.20)

$$b(E) = e^{2z_o+iT(E)} \frac{\sum_{p=1}^{\infty} W_{2p+1}(z_o+iT(E))}{1+\sum_{p=1}^{\infty} W_{2p}(-\bar{z}_o)}$$

Avant de donner des majorations des W_n , nous allons illustrer sur un exemple la méthode de résolution de l'équation (1-1) que nous avons apprise d'Ecalle.

Exemple (3.4). L'équation d'Airy

$$u'' - x\,u = 0 \tag{3.21}$$

admet la solution

$$Ai(x) = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\rho e^{\frac{i4\pi}{3}}}^{\rho e^{\frac{i2\pi}{3}}} e^{xt - \frac{t^3}{3}}\, dt \tag{3.22}$$

laquelle admet pour x positif, le développement asymptotique :

$$Ai(x) \sim \frac{x^{-1/4}}{2\pi^{1/2}}\, e^{-2/3\, x^{3/2}} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r\, x^{-3/2\, r}\right) \tag{3.23}$$

On pose

$$\varphi = x^{1/4} u \ , \ z = 2/3\, x^{3/2} \ , \ H(z) = -\frac{1}{6z} \tag{3.24}$$

Si u est solution de (3.21), $\varphi(z)$ est solution de

$$\varphi'' - \frac{5}{36z}\varphi = 0 \tag{3.25}$$

On obtient pour $\varphi_o(z(x)) = 2\pi^{1/2} x^{1/4} \mathrm{Ai}(x)$, le développement

(3.26)
$$\varphi_o(z) = e^{-z}(1 + \sum_1^{\infty} W_{-n}(z))$$

avec

(3.27)
$$W_{-(2p+1)}(z) = (-\frac{1}{6})^{2p+1} \int_{\Gamma_{2p+1}(z,+\infty)} e^{-2(z_1-z_2\ldots+z_{2p+1}-z)} \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_{2p+1}}{z_{2p+1}}$$
$$W_{-2p}(z) = (-\frac{1}{6})^{2p} \int_{\Gamma_{2p}(z,+\infty)} e^{-2(z_1-z_2\ldots-z_{2p})} \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_{2p}}{z_{2p}}$$

Les majorations suivantes s'obtiennent aisément par récurrence :

(3.28)
$$0 < W_{-2p}(z) \leqslant \frac{1}{6^{2p}} \frac{1}{p!} \frac{1}{(2z)^p}$$
$$0 < -W_{-(2p+1)}(z) \leqslant \frac{1}{6^{2p+1}} \frac{1}{p!} \frac{1}{(2z)^{p+1}}$$

Elles montrent la convergence uniforme de la série des W_{-n} et de leurs dérivées, en utilisant les formules (3.5). Par contre il est bien connu que le développement $\Sigma a_r z^{-r}$ est divergent.

4. MAJORATIONS

On établit d'abord le

Lemme 4.1. Soit z_o, $z \in \widetilde{D}(E)$ avec $\mathrm{Re}\, z \geqslant \mathrm{Re}\, z_o$. Soit L la longueur de $[z_o,z]$ et $A = \sup_{[z_o,z]} H$. On a aisément

(4.1)
$$|W_n(z)| \leqslant \frac{A^n L^n}{n!}$$

Si $\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, z_o$ on note $a = \frac{L}{\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Re}\, z_o}$ et on obtient la majoration meilleure pour L grand à p fixé

(4.2)
$$|W_{2p}(z)| \leqslant \frac{A^{2p} a^p L^p}{2^p\ p!}$$
$$|W_{2p+1}(z)| \leqslant \frac{A^{2p+1}\ a^{p+1}\ L^p}{2^{p+1}\ p!} .$$

Des majorations sur les dérivées s'en déduisent immédiatement par les formules (3.6).

Avec z_o choisi en (3.17) on obtient

(4.3) $$A < C\,E^{-1/2}\,,\ C > o$$

pour les chemins $[z_o,-\bar{z}_o]$, $[z_o,-\bar{z}_o + iT(E)]$ et $[z_o,z_o + iT(E)]$

Comme

(4.4) $$T(E) = \pi\,E^{1/2} + O(E^{-1/2})$$

(4.5) $$L([z_o,-\bar{z}_o]) = -\,2\,\mathrm{Re}\,z_o = 2E^{1/2}M(E,V)\ (1-\varepsilon)$$

on déduit de (4.2) des estimations du type (2.9) sur a(E) et pour b(E) la majoration

(4.6) $$|b(E)| \leqslant \exp(-2\,E^{1/2}M(V,E)(1-2\varepsilon))$$

d'où découle le théorème (1.1)

5. EQUATION DE MATHIEU

C'est l'équation (1-1) avec

(5.1) $$V(x) = \mu\cos 2x\,,\ \mu > 0$$

On détermine les points tournants, $\pm\,\tilde{x}(E) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ avec

(5.2) $$\frac{1}{i}\,\tilde{x}(E) = M(E,V) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Log}\,\frac{2E}{\mu} + \sum_{k\geqslant 1}\beta_k\big(\frac{\mu}{E}\big)^{2k}\Big)$$

Ensuite on raffine la méthode précédente en prenant le point de base

(5.3) $$z_o = -\,\infty + i\,\frac{T(E)}{2}$$

On peut alors montrer en notant $\tilde{z}(E) = z(\tilde{x}(E))$

(5.4) $$W(\varphi_+\,,\tau\varphi_+) = -\,2\,\exp(2\tilde{z}(E) + i\,T(E))$$

et en déduire le résultat de Harrel [8] et Avron - Simon [1] :

Théorème (5.1) Soit l'équation de Mathieu

$$- u''(x) + (\mu\cos 2x - E)\, u(x) = 0 \tag{5.5}$$

La largeur du $n^{\text{ième}}$ intervalle d'instabilité admet un développement asymptotique calculable dont les premiers termes donnent :

$$\gamma_n = \frac{\mu^n}{8^{n-1}} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(1 + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) . \tag{5.6}$$

BIBLIOGRAPHIE :

[1] J. Avron, B. Simon : The asymptotics of the Gap in the Mathieu equation, Annals of Physics 134, (1981) 76-84.

[2] E.A. Coddington, N. Levinson : Theory of ordinary differential equations, Mac Graw Hill (1955).

[3] M.S.P. Eastham : The spectral theory of periodic differential equation, Scottish Academic Press (1973).

[4] J. Ecalle : Cinq applications des fonctions resurgentes, Prepublications d'Orsay (1984).

[5] M.A. Evgrafov, M.V. Fedoryuk : Asymptotic behaviour as $\lambda \to \infty$ of the solutions of the equation $W''(z) - p(z,\lambda)W(z) = 0$ in the complex z-plane, Russian Math. Surveys 21 (1966) 1-48.

[6] J. Garnett, E. Trubowitz : Gaps and bands of one dimensional periodic Schrödinger operators, Comment. Math. Helvetici 59 (1984) 258-312.

[7] A. Grigis : Sur l'isospectralité des potentiels périodiques dans $\mathbb{R}^n$ (d'après G. Eskin, J. Ralston, E. Trubowitz) Séminaire d'Analyse de l'Université de Nantes (1983-84) exposé n°1 .

[8] E. Harrel : American J. of Maths, to appear.

[9] H.P. MacKean, E. Trubowitz : Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, CPAM 29 (1976) 143-226.

[10] W. Magnus, S. Winkler : Hill's equation, Interscience Publishers (1966).

[11] M. Reed, B. Simon : Methods of Modern Mathematical physics, IV, Academic Press (1978).

[12] Y. Sibuya : Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient, North Holland (1975).

[13] E. Trubowitz : The inverse problem for periodic potentials, CPAM 30 (1977) 321-337.

[14] A. Voros : The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 29, n°3 (1983) 211-338.

[15] W. Wasow : Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Krieger (1976).

***