Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Bérard

Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 14, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

VOLUME DES ENSEMBLES NODAUX DES FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN

par P. BERARD

Exposé n° XIV

26 Février 1985

MOTIVATIONS.

Etant donné f_n une $n^{ième}$ fonction propre du problème de Sturm-Liouville

$$(1)\qquad \begin{cases} u''(x) + (\lambda\rho(x) - q(x))u(x) = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

sur l'intervalle $[a,b]$, on sait que f_n s'annule exactement $(n-1)$ fois dans $]a,b[$.

Cette propriété peut se lire de deux manières différentes

(2 a) f_n a exactement n domaines nodaux (i.e. n intervalles sur lesquels elle ne s'annule pas) ;

(2 b) f_n a un ensemble nodal composé de $(n-1)$ points dans $]a,b[$.

Soit maintenant (M,g) une variété riemannienne C^∞, compacte, connexe de dimension n . On considère le problème

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta u = \lambda u \text{ dans } M \text{, avec conditions de Dirichlet ou de} \\ \text{Neumann si } \partial M \neq \emptyset . \end{cases}$$

Il est possible de généraliser la propriété (2a) ci-dessus. On a le

THEOREME (Courant). - Une fonction propre u associée à la $n^{ième}$ valeur propre λ_n (comptées avec multiplicités et à partir de $n=1$) du problème (3) admet au plus n domaines nodaux (composantes connexes de $M\backslash u^{-1}(0)$).

4. REMARQUES.

(i) Si $n \geq 2$, u a au moins deux domaines nodaux, mais on n'a pas a priori de meilleure minoration du nombre de domaines nodaux de u (voir [C-H], § VI.6, p. 456).

(ii) Si $\partial M = \emptyset$ ou si on prend la condition de Dirichlet sur ∂M, on peut montrer que le nombre de domaines nodaux de u associée à λ_n est strictement inférieur à n sauf pour un nombre fini de valeurs propres (dont λ_1). On ne connaît pas de majoration autre qu'asymptotique de ce nombre (voir [B-M], p. 523). Le cas du problème de Neumann est ouvert au moins en dimension 2 (en dimension ≥ 3, on peut donner une réponse positive, mais peu satisfaisante).

5. La propriété (2b) est beaucoup plus fine. On ne connaît pas bien la structure des ensembles nodaux $u^{-1}(0)$ des fonctions propres du laplacien en dimension supérieure ou égale à 3. En dimension 2, cette structure est bien comprise et on peut généraliser (2b) de la manière suivante :

THEOREME (Brüning-Gromes). - Soit Ω un domaine compact lisse de $\mathbb{R}^2$ et soit u une fonction propre du problème de Dirichlet dans Ω, associée à la $n^{\text{ième}}$ valeur propre λ_n. Alors, on a :

$$\mathrm{long}(u^{-1}(0)) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{long}(\partial\Omega) \geq \frac{\mathrm{Aire}(\Omega)}{2j_0}\sqrt{\lambda_n} - \pi(g(\Omega)-1)\frac{j_0}{2\sqrt{\lambda_n}}$$

j_0 = 1er zéro positif de J_0 ; $g(\Omega)$ = nombre de trous de Ω.

Ce résultat a été étendu au cas des surfaces riemanniennes compactes sans bord par Brüning (minoration asymptotique avec des constantes qui dépendent de la géométrie de M : courbure, rayon d'injectivité,...). Voir [B-G] et [BR].

6. QUESTIONS.

(a) Peut-on généraliser le théorème ci-dessus au cas de la condition de Neumann sur $\partial\Omega$?

(b) Peut-on majorer $\mathrm{long}(u^{-1}(0))$ en fonction de λ_n et de la géométrie ? (cf. [YU], Problème n° 74).

(c) Peut-on généraliser le théorème ci-dessus au cas de la dimension supérieure ou égale à 3 ?

7. Le but de cet exposé est de décrire une solution, <u>en un sens faible</u>, aux problèmes (6b) et (6c), dans le cas d'une variété riemannienne compacte sans bord. L'idée essentielle est d'obtenir un résultat "en moyenne", analogue à ceux de KAC sur le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme de degré n à coefficients réels : voir [KC]. Cette démarche est assez naturelle si l'on a à l'esprit l'historique des estimées sur les valeurs propres :

(i) estimée, quand $t \to 0_+$, de $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}$;

(ii) estimée asymptotique de λ_j (où seuls le volume et la dimension apparaissent) ;

(iii) minorations des λ_j (on a besoin ici de la courbure de Ricci, du diamètre et de la dimension).

Cet article doit tout à une conversation avec M. GROMOV. C'est lui qui a attiré mon attention sur l'article de KAC [KC] ; c'est encore lui qui m'a indiqué l'intérêt des méthodes de géométrie intégrale. Je l'en remercie chaleureusement.

Nous commençons par décrire un cas simple, pour illustrer la méthode ; nous passerons ensuite au cas général. Pour les détails techniques, voir [BD].

PREMIERE GENERALISATION

8. Soit (M,g) un espace symétrique compact de rang un (ESCRU) muni de sa structure riemannienne naturelle, c'est-à-dire S^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, $\mathbb{C}aP^2$ - can .

Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(M,g)$, de multiplicité $N+1$, et soit $\varphi_0,\ldots,\varphi_N$ une base $L^2(M,g)$-orthonormée de l'espace propre associé E_λ .

On considère l'application

$$\Lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \qquad x \longmapsto (\varphi_0(x),\ldots,\varphi_N(x)) .$$

Cette application jouit des propriétés suivantes ([BE], p. 174) :

$$(9) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \bar{M} = \Lambda(M) \subset S^N(R) \text{ sphère de rayon } R \text{ de } \mathbb{R}^{N+1} \text{, avec} \\ & R = \left(\dfrac{N+1}{\mathrm{vol}(M,g)}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et c'est un plongement, sauf si } M = S^n \\ & \text{et } \bar{M} = \mathbb{R}P^n . \\ \text{(ii)} & \Lambda^* \bar{g} = kg \text{ où } \bar{g} \text{ est la métrique riemannienne induite par} \\ & \text{celle de } \mathbb{R}^{N+1} \text{ sur } \bar{M} \text{, avec } k = \dfrac{\lambda R^2}{n} \quad (n = \dim M) . \end{cases}$$

Soit H_a l'hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^{N+1}$ défini par l'équation

$$(H_a) \qquad a_0X_0 + \ldots + a_NX_N = 0$$

où l'on voit $(a_0,\ldots,a_N)$ comme un point a de $\mathbb{R}P^N$. On a alors la formule ([SO], p. 245 et 309).

$$(10) \qquad \mathrm{Vol}(\overline{M},\overline{g}) = \frac{\mathrm{Vol}(S^n(R))}{\mathrm{Vol}(S^{n-1}(R))} \; \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}P^N)} \int_{\mathbb{R}P^N} \mathrm{Vol}(\overline{M} \cap H_a, \overline{g})\,da$$

(où les volumes sont relatifs aux structures riemanniennes indiquées - ou naturelles - et où da est la mesure riemannienne naturelle sur $\mathbb{R}P^N$).

Remarquant que $\overline{M} \cap H_a$ n'est autre que l'image par Λ de l'ensemble nodal

$$N_a(\lambda) = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_i^{-1}(0) , \qquad a = [a_0, \dots, a_N]$$

et reportant (9) dans (10), il vient :

11. THEOREME. - Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}P^n)} \int_{\mathbb{R}P^N} \mathrm{Vol}(N_a(\lambda), g)\,da = \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))}{\sqrt{n}\,\mathrm{Vol}(S^n(1))} \mathrm{Vol}(M,g)\sqrt{\lambda} .$$

Ainsi, le volume moyen des ensembles nodaux des fonctions propres de E_λ est proportionnel à $\mathrm{Vol}(M,g)\sqrt{\lambda}$; en particulier, le nombre $\mathrm{Vol}(N_a(\lambda),g)/\mathrm{Vol}(M,g)\sqrt{\lambda}$ ne peut être ni trop grand, ni trop petit sur un ensemble A de $\mathbb{R}P^N$ de grand volume. On obtient bien, comme annoncé, une réponse "en moyenne" aux questions (6b) et (6c).

LE CAS GENERAL

12. L'idée de la démonstration est essentiellement la même que ci-dessus, au moins au niveau des idées. Comme on ne peut pas espérer plonger une variété riemannienne quelconque par un seul espace propre, on va utiliser les fonctions propres jusqu'à un certain rang.

On désigne par

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$	le spectre de (M,g)
$\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots$	une base $L^2(M,g)$-orthonormée de fonctions propres associées

$$N(\lambda) = \mathrm{Card}\{j \geq 1 \mid \lambda_j \leq \lambda\}$$

$$\nu(x,\lambda) = \Big(\sum_{\lambda_j \leq \lambda} \varphi_j^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda^{n/2}}{(4\pi)^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2}+1)}(1+a(x,\lambda))$$

où $a(x,\lambda) = 0(\lambda^{-\frac{1}{2}})$ uniformément en $x \in M$, quand λ tend vers $+\infty$. On considère l'application

$$\Phi_\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}^{N(\lambda)+1} \qquad x \longmapsto \left(\frac{\varphi_0(x)}{\nu(x,\lambda)}, \dots, \frac{\varphi_{N(\lambda)}(x)}{\nu(x,\lambda)}\right).$$

On a alors

13. THEOREME. - L'application Φ_λ jouit des propriétés suivantes

(i) $\Phi_\lambda(M) \subset S^{N(\lambda)}(1)$ sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{N(\lambda)+1}$;

(ii) $\forall X \in TM\backslash\{0\}$, $\|d\Phi_\lambda(X)\|^2_{\mathbb{R}^{N(\lambda)+1}} = \frac{\lambda}{n+2}\, g(X,X)[1+b(X,\lambda)]$

où $b(X,\lambda) = o(1)$ uniformément en X quand λ tend vers $+\infty$;

(iii) Φ_λ est un plongement pour λ assez grand.

Si on applique maintenant la formule (10) à la variété $\Phi_\lambda(M) \subset S^{N(\lambda)}(1)$, on obtient le

14. COROLLAIRE. -

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}P^{N(\lambda)})}\int_{\mathbb{R}P^{N(\lambda)}} \mathrm{Vol}(N_a(\lambda),g)\,da = \frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}{\sqrt{n+2}\ \mathrm{vol}(S^n)}\,\mathrm{Vol}(M,g)\sqrt{\lambda}\,(1+o(1))$$

quand λ tend vers $+\infty$, où, pour $a = [a_0,\dots,a_{N(\lambda)}] \in \mathbb{R}P^{N(\lambda)}$, on pose

$$N_a(\lambda) = \Big(\sum_{j=0}^{N(\lambda)} a_j\varphi_j\Big)^{-1}(0).$$

Le Corollaire 14 apporte, dans le cas général, une réponse "en moyenne" aux questions (6b) et (6c).

ELEMENTS DE DEMONSTRATION.

15. L'assertion (i) du Théorème est bien sûr évidente. Pour (ii), on peut se limiter, par homogénéité, au cas où $X \in UM$, fibré unitaire tangent à M. On calcule alors

$$(16) \qquad \|d\Phi_\lambda(X)\|^2 = \frac{1}{\nu^2(x,\lambda)} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} (d\varphi_j(X))^2 - \frac{1}{4\nu^4(x,\lambda)} (d\nu^2(\cdot,\lambda)(X))^2 .$$

Par dérivation de la formule asymptotique

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x)\varphi_j(y) \underset{t\to 0_+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\overline{xy}^2/4t) \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y) t^k$$

où $\overline{xy}$ = distance riemannienne de x à y est petite, on obtient

$$(17) \left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \varphi_j(x) d\varphi_j(X) = 0\left(t^{-\frac{n}{2}+1}\right), \text{ quand } t \to 0_+, \text{ car} \\ & du_0(x,\cdot)(X_x) = 0 \text{ (l'élément de volume est euclidien à} \\ & \text{l'ordre 2) ;} \\ \text{(ii)} & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (d\varphi_j(X))^2 = \frac{t^{-\frac{n}{2}-1}}{2(4\pi)^{n/2}} (1+0(t)), \text{ quand } t \to 0_+ . \end{array} \right.$$

Le théorème de Karamata appliqué à (17 ii), ainsi que la formule asymptotique pour $\nu(x,\lambda)$ donnent

$$\frac{1}{\nu^2(x,\lambda)} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} (d\varphi_j(X))^2 = \frac{\lambda}{n+2} (1+o(1)) \quad \text{quand } \lambda \text{ tend vers } +\infty .$$

On ne peut malheureusement pas appliquer le théorème de Karamata à (17 i) - manque de positivité -, ni traiter le deuxième terme de (16) directement par Cauchy-Schwarz. On utilise alors le stratagème suivant : on étudie $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (\lambda_j^{1/4} \varphi_j(x) + \lambda_j^{-1/4} d\varphi_j(X))^2$, puis on applique le théorème de Karamata trois fois, ceci permet de montrer que le deuxième terme dans (16) est en fait un $o(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$, ce qui démontre la partie (ii) du théorème. Pour démontrer (iii), on remarque que $\Phi_\lambda(x) = \Phi_\lambda(y)$ implique en particulier $\nu(x,\lambda) = \nu(y,\lambda)$, car $\varphi_0(x) \equiv (\mathrm{vol}(M,g))^{-\frac{1}{2}}$; on en déduit alors que, pour tout $j \leq N(\lambda)$, $\varphi_j(x) = \varphi_j(y)$. En particulier, si Φ_λ est injective, alors Φ_μ l'est aussi dès que $\mu \geq \lambda$. On termine par un raisonnement par l'absurde en utilisant ce qui précède et (ii) qui garantit l'injectivité locale.

18. REMARQUES.

(a) Il est relativement déplaisant de faire intervenir φ_0 dans le plongement Φ_λ , car on a alors des ensembles de niveau $\left(\sum_{j=1}^{N(\lambda)} a_j\varphi_j\right)^{-1}\left(-a_0 \operatorname{vol}(M,g)^{-\frac{1}{2}}\right)$ plutôt que des ensembles nodaux. En fait, on peut se passer de φ_0 dans le plongement Φ_λ et même d'un ensemble fini quelconque (mais fixé une fois pour toutes) de fonctions propres.

(b) La même méthode permet d'obtenir un résultat "localisé" en plongeant un ouvert U de M au lieu de M elle-même.

(c) Pour le cas à bord, $\partial M \neq \phi$, on peut sans doute (modulo quelques vérifications techniques à faire) démontrer le résultat suivant : si $M_\epsilon = \{x \in M \mid \operatorname{dist}(x,\partial M) \geq \epsilon\}$ et si l'on prend le laplacien dans M avec condition de Dirichlet ou de Neumann sur ∂M , alors

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(\mathbb{R}P^{N(\lambda)})}\int_{\mathbb{R}P^{N(\lambda)}} \operatorname{Vol}(N_a^\epsilon(\lambda),g)da = C(n)\operatorname{Vol}(M_\epsilon,g)\sqrt{\lambda}\,(1+o_\epsilon(1))$$

où $N_a^\epsilon(\lambda) = N_a(\lambda) \cap M_\epsilon$.

REFERENCES.

[BD] BERARD, P., Volume des ensembles nodaux des fonctions propres du laplacien. Prétirage Université de Savoie, 1985.

[BE] BESSE, A. L., Manifolds all of whose geodesics are closed. Springer 1978.

[B-G] BRÜNING, J. - GROMES, D., Über die Länge der Knotenlienien schwingender Membranen.
Math. Z. 124 (1972), 79-82.

[B-M] BERARD, P. - MEYER, D., Inégalités isopérimétriques et applications.
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 15 (1982), 513-542.

[BR] BRÜNING, J., Über die Knoten von Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators.
Math. Z. 158 (1978), 15-21.

[C-H] COURANT, R. - HILBERT, D., Methods of mathematical physics.
Wiley-Interscience 1953.

[KC] KAC, M., On the average number of real roots of a Random Algebraic equation,
in Selected papers : Probability, number theory and Statistical Physics. MIT PRESS 1979.

[SO] SANTALO, L., Integral geometry and geometric probability.
Addison-Wesley 1976.

[YU] YAU, S.T., Problem section in Seminar on Differential Geometry.
Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press 1982.
