SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

V. M. PETKOV

Propriétés génériques des rayons réfléchissants et applications aux problèmes spectraux

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 12, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

PROPRIETES GENERIQUES DES RAYONS REFLECHISSANTS ET APPLICATIONS AUX PROBLEMES SPECTRAUX.

par V.M. PETKOV

Exposé n°XII

26 Février 1985

I. INTRODUCTION

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, un domaine borné ayant une frontière C^∞ notée $\partial\Omega$. Soit $-\Delta_D$ l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$ associé au laplacien $-\Delta$ avec la condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$. On sait que le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta_D u = \lambda_j^2 u \ , & x \in \Omega \ , \\ u = 0 \ , & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

a un ensemble dénombrable de valeurs propres $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$. De plus la trace de $\cos(\sqrt{-\Delta_D}t)$ est une distribution tempérée et

$$\sigma_D(t) = \sum_j \cos\lambda_j t = \mathrm{tr}(\cos\sqrt{-\Delta_D}t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \ .$$

Soit $\mathcal{L}_\Omega$ l'union des toutes géodésiques généralisées périodiques dans $\overline{\Omega}$ y compris les géodésiques périodiques sur $\partial\Omega$ correspondant à la métrique de Riemann induite sur $\partial\Omega$. Les géodésiques généralisées sont des projections sur $\overline{\Omega}$ des bicaractéristiques généralisées de l'opérateur des ondes $\Box = \partial_t^2 - \Delta$. On renvoie à [17] pour une définition précise. La relation de Poisson a la forme suivante :

$$(2) \qquad \text{sing supp } \sigma_D(t) \subset -\bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_\Omega} T_\gamma \cup \{0\} \cup \bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_\Omega} T_\gamma \ ,$$

où T_γ est la période de γ (cf.[1], [2], [19]).

Quand on considère le domaine non-borné $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, on obtient une relation de Poisson de type (2) en introduisant les pôles $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ de la matrice de diffusion $S(\lambda)$, associée au problème de Dirichlet pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R} \times \mathcal{O}$. Les pôles μ_j sont placés dans le demi-plane $\mathrm{Im} z > 0$ (cf.[15]) et on peut introduire

$$\mu_D(t) = \sum_j e^{i\mu_j t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$$

(on renvoie à [18] pour la justification de la sommation). En utilisant la vitesse finie des propagations on peut déduire de (2) la relation

$$(3) \qquad \text{sing supp } \mu_D(t) \subset \bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_\mathcal{O}} T_\gamma \ .$$

Ici $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ est l'union des géodésiques généralisées périodiques dans $\hat{\mathcal{O}}$ obtenus comme les projections sur $\mathcal{O}$ des bicaractéristiques généralisées propageant les singularités C^{∞} . Par exemple, si $\mathcal{O}$ est le complémentaire d'un domaine strictement convexe, $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ est vide car les géodésiques périodiques sur $\partial\Omega$ ne sont pas essentielles pour des singularités C^{∞} .

Nous nous intéressons au problème suivant :

(4) Quand T_{γ} appartient-il au sing supp$\sigma_D(t)$ (sing supp$\mu_D(t)$) ?

On ne considèrera que les rayons réfléchissants puisque pour les autres il est très difficile de construire une paramétrix globale pour $\cos(\sqrt{-\Delta_D}t)$. De plus nous allons traiter le cas générique qui sera précisé ci-dessous. Soit $\mathcal{L}'_{\Omega} \subset \mathcal{L}_{\Omega}$ l'ensemble de géodésiques réfléchissantes et périodiques. L'analyse de (4) repose sur la solution de deux problèmes importants :

($\mathcal{R}$) Est-ce que génériquement pour tous γ , $\delta \in \mathcal{L}'_{\Omega}$ nous avons $T_{\gamma}/T_{\delta} \notin \mathbb{Q}$?

(S) Est-ce que génériquement la période T_{γ} de chaque $\gamma \in \mathcal{L}'_{\Omega}$ est isolé parmi les périodes des géodésiques réfléchissantes placées dans un voisinage suffisamment petit de γ ?

Dans cet exposé on donne une réponse affirmative de ($\mathcal{R}$) et (S) et aussi on présente quelques applications concernant le problème (4). En particulier, on prouve que génériquement, pour des domaines strictement convexes dans $\mathbb{R}^2$ la relation (2) devient une égalité et que de plus nous pouvons déterminer le spectre de l'application de Poincaré de chaque $\gamma \in \mathcal{L}'_{\Omega}$ en connaissant le spectre $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^{\infty}$. D'autre part, la réponse de (S) nous permet de conclure que la conjecture de Weyl sur le développement asymptotique de $N(\lambda) = \#\ \{\lambda_j^2 \leqslant \lambda^2\}$ est satisfaite dans le cas générique (cf.[11], [9]). Remarquons que la réponse de (S) n'entraîne pas que T_{γ} pour chaque $\gamma \in \mathcal{L}'_{\Omega}$ est isolée dans sing supp $\sigma_D(t)$. On peut faire la conjecture que ce résultat plus fort est aussi vrai génériquement.

Les résultats de cet exposé ont été obtenus en collaboration avec L. Stojanov et on renvoie pour plus de détails à [23] .

2. LES PROBLEMES ($\mathcal{R}$) ET (S).

Soit $\partial\Omega = X$ et soit $C^{\infty}(X,\mathbb{R}^n)$ l'espace des applications C^{∞} muni de la topologie de Whitney [6]. Notons par $C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ le sous espace de tous plongements C^{∞} de X dans $\mathbb{R}^n$ ayant une différentielle injective. $C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $C^{\infty}(X,\mathbb{R}^n)$ et par conséquence $C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ est un espace de Baire (cf.[6],[10]). Pour $f \in C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ on note par Ω_f le domaine ayant la frontière

$f(X)$. Pour nos applications il est essentiel de disposer d'une notion de géodésiques réfléchissantes comprenant des segments tangents.

Définition. On dit que γ est une géodésique (rayon) réfléchissante et périodique si $\gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \ell_i$, où $\ell_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,\dots,k$, $x_{k+1} = x_1$ et pour chaque $i = 1,\dots,k$, nous avons :

(a) $\ell_i \cap \ell_{i+1} = \{x_{i+1}\} \in X$, $\ell_{k+1} = \ell_1$,

(b) ℓ_i et ℓ_{i+1} forment des angles aigus et égaux avec l'une des (deux) normales de X en x_{i+1} ,

(c) le segment (x_i, x_{i+1}) ne coupe pas transversalement X .

On appelle $x_1,\dots,x_k$ les points de réflexion et la période (primitive) T_γ de γ est égale à la somme des longueurs de ℓ_i .

Cette définition donne la possibilité de considérer des géodésiques ayant des segments tangents parce qu'on n'exclut pas le cas où (x_i, x_{i+1}) puisse avoir de points sur X . De plus on ne distingue pas les géodésiques placées dans l'intérieur de Ω de celles placées à l'extérieur de Ω . On rappelle qu'un ensemble R est résiduel si R est intersection d'ensembles ouverts et denses. Dans la suite on appelle simplement rayons les géodésiques réfléchissantes.

Théorème 1. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de $f \in C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$ telles que deux rayons quelconques ayant des points de réflexion sur $f(X)$ aient des périodes rationnellement indépendantes. Alors $\mathcal{H}$ contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$.

Afin d'énoncer notre théorème suivant introduisons pour $s \geq 2$, $s \in \mathbb{N}$ l'ensemble

$$X^{(s)} = \{x \in X^s \; ; \; x = (x_1,\dots,x_s),\; x_i \neq x_j \;,\; i \neq j\}.$$

Etant donnée une application $f \in C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$, notons par $\mathcal{K}_s(f)$ l'ensemble des points $x = (x_1,\dots,x_s) \in X^{(s)}$ tels que $f^s(x) = (f(x_1),\dots,f(x_s))$ soient tous les points de réflexion d'un certain rayon périodique ayant s réflexions.

Théorème 2. Soit N l'ensemble des $f \in C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$ telles que pour chaque $s \geq 2$, $\mathcal{K}_s(f)$ soit un ensemble discret de $X^{(s)}$, c'est-à-dire un ensemble de points isolés de $X^{(s)}$. Alors N contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$.

Corollaire 3. Soit $\Omega_o \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ayant une frontière C^∞ notée $\partial\Omega_o = X$. Il existe un ensemble résiduel $R \subset C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$ tel que pour chaque $f \in R$ l'ensemble des rayons périodiques ayant de points de réflexion sur $f(X)$ est au plus dénombrable.

Soit $N(\lambda) = \# \{\lambda_j^2 \leqslant \lambda^2\}$, où $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^\infty$ sont les valeurs propres de (1). La conjecture de Weyl dit que $N(\lambda)$ admet un développement asymptotique pour $\lambda \to +\infty$ avec deux termes associés au $\mathrm{vol}(\Omega)$ et $\mathrm{vol}(\partial\Omega)$. V. Ivrii [11] a démontré cette conjecture sous l'hypothèse que l'ensemble $\Sigma_\Omega = \{(x,\xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1}$ tel qu'il existe un rayon périodique passant par x en direction $\xi\}$ est de mesure nulle dans $\partial\Omega \times S^{n-1}$. Comme une conséquence de Corollaire 3 on obtient le

Corollaire 4. Sous les hypothèses du corollaire 3 il existe un voisinage W de Id dans $C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$ et un ensemble résiduel $R \subset W$ tel que pour toute $f \in R$ on ait :

$$(5) \quad N(\lambda) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} (\mathrm{vol}\Omega_f)\lambda^n - \frac{(4\pi)^{-(\frac{n-1}{2})}}{4\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)} \mathrm{vol}(f(X))\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \ \lambda \to +\infty,$$

où $N(\lambda)$ est associée aux valeurs propres de (1) avec $\Omega = \Omega_f$.

Remarque. B. Helffer et Pham The Lai [9] ont montré qu'il existe un opérateur de Laplace-Beltrami dans un cercle de $\mathbb{R}^2$ pour lequel la formule (5) n'est pas satisfaite.

3. IDEE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 1 :

La démonstration repose sur l'application d'un théorème général concernant les propriétés génériques des éléments de $C^\infty_{emb}(X, \mathbb{R}^n)$.

Théorème 5. Soit $n \geqslant 2$, $s \geqslant 2$, u, v des nombres entiers et soit $U \subset (\mathbb{R}^n)^{(s)}$ un ensemble ouvert. Supposons que

$$H = (H_1, \dots, H_u) : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$
$$L = (L_1, \dots, L_v) : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}^v$$

soient des applications C^∞ ayant des propriétés suivantes :

(i) pour $\forall i \leqslant s$ il y a $r_i \leqslant u$ tel que pour $\forall y \in U$ il existe $j \leqslant n$ avec $\dfrac{\partial H_{r_i}}{\partial y_i^{(j)}}(y) \neq 0$ (on désigne par $y_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(n)})$, $i=1,\dots,s$ les variables dans $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$),

(ii) pour $\forall y \in U$, $dL(y) \neq 0$.

Soit $T \subset C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications f pour lesquelles pour tout $x \in X^{(s)}$ tel que $f^s(x) \in U$ on ait $L(f^s(x)) \neq 0$ si x est un point critique de $(H \circ f^s)$. Alors T contient un ensemble résiduel dans $C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$.

La démonstration est longue et nous n'en donnerons ici qu'une esquisse. On voit facilement qu'il suffit de traiter le cas $v = 1$, où $L : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère la variété $\mathcal{J}^1(X,\mathbb{R}^n)$ des 1-jets et les projections :

$$
\begin{array}{ccc}
 & (\mathcal{J}^1(X,\mathbb{R}^n))^s & \\
\swarrow^{\alpha^s} & & \searrow^{\beta^s} \\
X^{(s)} \subset X^s & & (\mathbb{R}^n)^s \supset U .
\end{array}
$$

On pose $\mathcal{J}^1_s(X,\mathbb{R}^n) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$, $M = (\beta^s)^{-1}(U) \cap \mathcal{J}^1_s(X,\mathbb{R}^n)$.

Dans cette section nous utilisons les notations de [6] .
On détermine une application $Q : M \longrightarrow \mathcal{J}^1(X^{(s)},\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$Q([f_1]_{x_1},\dots,[f_s]_{x_s})$$

$$= ([Ho(f_1\times\dots\times f_s)]_{(x_1,\dots,x_s)} , Lo(f_1\times\dots\times f_s)\ (x_1,\dots,x_s)) ,$$

où

$$Ho(f_1\times\dots\times f_s) \ : X^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}^u$$

est donnée par

$$Ho(f_1\times\dots\times f_s)(x_1,\dots,x_s)$$

$$= (H_1(f_1(x),\dots,f_s(x)),\dots,H_n(f_1(x),\dots,f_s(x))) ,$$

$$x = (x_1,\dots,x_s) \in X^{(s)} .$$

L'application Q est régulière et nous introduirons l'ensemble

$$Q^{-1}(\Sigma) \subset M ,$$

où

$$\Sigma = \{([G]_x,0) \ ; \ [G]_x \in \mathcal{J}^1(X^{(s)},\mathbb{R}^n) , \ dG(x) = 0\} .$$

En général $Q^{-1}(\Sigma)$ n'est pas une variété et afin de surmonter cette difficulté on prouve le

Lemme 6. Il existe une famille dénombrable $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ de sous-variétés C^{∞} dans M telles que :

$$\operatorname{codim} W_m = (n-1)\, s+1 \ , \ m \in \mathbb{N} \ ,$$
$$Q^{-1}(\Sigma) \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m \ .$$

Chaque W_m est une sous-variété de $\mathcal{J}^1_s(X,\mathbb{R}^n)$ puisque M est ouvert. Maintenant on applique le théorème de transversalité pour multijets (cf. théorème 4.13 dans [6]). On trouve que pour $\forall\, m \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$T_m = \{f \in C^{\infty}(X,\mathbb{R}^n) \ ; \ j^1_s f \pitchfork W_m\}$$

est résiduel dans $C^{\infty}(X,\mathbb{R}^n)$ donc $\bigcap_m T_m \cap C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ sera résiduel dans $C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$. En observant que

$$\dim X^{(s)} = (n-1)s < \operatorname{codim} W_m \ , \ \forall\, m \in \mathbb{N} \ ,$$

on obtient facilement

$$\bigcap_m T_m \cap C^{\infty}_{emb}(X,\mathbb{R}^n) \subset T \ ,$$

c.q.f.d.

Afin de démontrer le théorème 1 on se place dans une situation fixée. Soit $n \geqslant 2$, $s \geqslant 2$ deux nombres entiers et soit

$$\alpha : \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,s\}$$

une application telle que

$$(6) \qquad \alpha(i+1) \neq \alpha(i) \ , \qquad i = 1,\ldots,k$$

(On pose $\alpha(n) = \alpha(i)$ si $n = i + mk$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $m \in \mathbb{N}$). On dit que α est non-symétrique si

$$\{\alpha(i),\ \alpha(i+1)\} \neq \{\alpha(j),\alpha(j+1)\},\ 1 \leqslant i < j \leqslant k \ .$$

D'autre part, on dit que α est symétrique si $k = 2m$ et s'il existe i_o , $1 \leqslant i_o \leqslant k$, tel que

$$\{\alpha(i),\ \alpha(i+1)\} \neq \{\alpha(j),\alpha(j+1)\},\ i_o \leqslant i < j \leqslant i_o + m\ ,$$
$$\alpha(i_o+m+j) = \alpha(i_o+m-j),\ j = 1,2,\ldots,m-1\ .$$

Définition. Une application α est admissible si (6) est satisfaite et de plus α est non-symétrique ou symétrique.

Remarquons qu'il y a des applications α pour lesquelles (6) est vrai mais qui ne sont pas admissibles.

Soit $\Gamma = (k,\ell,s,\alpha,\beta)$ un symbole, où $k,\ell,\ s \in \mathbb{N}$ et

$$\alpha : \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,s\}\ ,$$
$$\beta : \{1,\ldots,\ell\} \longrightarrow \{1,\ldots,s\}$$

sont des applications admissibles telles que

$$\{\alpha(i),\alpha(i+1)\} \neq \{\beta(j),\beta(j+1)\},\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell\ ,\ \mathrm{Im}\alpha \cup \mathrm{Im}\beta = \{1,\ldots,s\}\ .$$

Dans ce cas nous dirons que Γ forme une configuration. Introduisons les ensembles :

$$I_i = \{j \in \mathrm{Im}\alpha\ ;\ \exists\, t \leqslant k \ \text{ tel que } (i,j) = (\alpha(t),\ \alpha(t+1))\}\ ,\ i \in \mathrm{Im}\alpha\ ,$$

$$J_i = \{j \in \mathrm{Im}\beta\ ;\ \exists\ t \leqslant k \text{ tel que } (i,j) = (\beta(t),\ \beta(t+1))\}\ ,\ i \in \mathrm{Im}\beta\ .$$

Etant donnée une sous-variété $Y \subset \mathbb{R}^n$ et une paire (γ,δ) de rayons ayant points de réflexion sur Y, nous dirons que (γ,δ) a type Γ s'il y a s points différents $y_1,\ldots,y_s \in Y$ tels que

$$y_{\alpha(1)},\ldots,y_{\alpha(k)}$$

soient tous les points de réflexion de γ ordonnés suivant l'ordre des réflexions, y compris celles qui se répètent, tandis que

$$y_{\beta(1)},\ldots,y_{\beta(\ell)}$$

sont tous les points de réflexion de δ ordonnés comme ci-dessus. Soit

$U_\alpha = \{y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}\ ;\ y_i$ n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $(y_j\ ,\ j \in I_i)$, $\forall i \in \mathrm{Im}\ \alpha\}$,

$U_\beta = \{y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)}\ ;\ y_i$ n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $(y_j,\ j \in J_i)$, $\forall i \in \mathrm{im}\beta\}$.

Les ensembles U_α , U_β sont ouverts dans $(\mathbb{R}^n)^{(s)}$ et on voit aisément que les points $(y_1,\ldots,y_s) = y$ associés au γ et δ satisfont à la condition

$$y \in U_\alpha \cap U_\beta .$$

Finalement pour décrire les périodes on introduit les applications $F,G : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}$, déterminées par

$$F(y_1,\ldots,y_s) = p \sum_{i=1}^{k} \| y_{\alpha(i)} - y_{\alpha(i+1)} \| ,$$

$$G(y_1,\ldots,y_s) = q \sum_{i=1}^{\ell} \| y_{\beta(i)} - y_{\beta(i+1)} \| ,$$

où $p,q \in \mathbb{N}$. On fixe une configuration Γ et aussi p et q. De telle manière F et G seront aussi fixées. Il suffit de prouver la

<u>Proposition 7</u>. Soit $\mathcal{H}_{\Gamma,p,q}$ l'ensemble des applications $f \in C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $x \in X^{(s)}$ avec $f^s(x) \in U_\alpha \cap U_\beta$ nous avons $(F-G)(f^s(x)) \neq 0$ si x est un point critique pour les applications $(F\circ f^s)$ et $(G\circ f^s)$. Alors $\mathcal{H}_{\Gamma,p,q}$ contient un ensemble résiduel dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$.

La démonstration repose sur l'application du théorème 5 et pour cela on prouve le

<u>Lemme 8</u>. Pour chaque $y \in U_\alpha$ et chaque $i \in \operatorname{Im}\alpha$ il existe $j \leqslant n$ tel que $\dfrac{\partial F}{\partial y_i^{(j)}}(y) \neq 0$, où $y = (y_1,\ldots,y_s)$, $y_i = (y_i^{(1)},\ldots,y_i^{(n)})$.

Introduisons l'ensemble

$$V = \{y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)} , d(F-G)(y) \neq 0\} .$$

Soit $T_1 \subset C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications f telles que pour tout $x \in X^{(s)}$ avec $f^s(x) \in V$ nous avons $(F-G)(f^s(x)) \neq 0$ si x est un point critique de $(F\circ f^s)$ et $(G\circ f^s)$. Le lemme 8 et le choix de V nous permettent d'appliquer le théorème 5 en posant $H_1 = F$, $H_2 = G$, $L = F-G$, $U = V$, $u = 2$, $v = 1$. On en déduit que T_1 contient un ensemble résidual.

Dans le cas $\operatorname{Im}\alpha \neq \{1,\ldots,s\}$ nous avons $U_\alpha \cap U_\beta \subset V$ et on obtient immédiatement $T_1 \subset \mathcal{H}_{\Gamma,p,q}$. Si $\operatorname{Im}\alpha = \{1,\ldots,s\}$ on applique une seconde fois le théorème 5. Pour cela on suppose sans une perte de la généralité que $1 \in \operatorname{Im}\alpha$ et on introduit

$$L = (L_1,\ldots,L_n) : (\mathbb{R}^n)^{(s)} \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$L_t(y) = \frac{\partial(F-G)}{\partial y_1^{(t)}}(y),\ t = 1,\dots,n,\ y \in (\mathbb{R}^n)^{(s)} .$$

On observe que $I_1 \cap J_1 = \emptyset$ et cela entraîne $dL(y) \neq 0$. Soit $T_2 \subset C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications f telles que $f^s(x) \in U_\alpha$, $x \in X^{(s)}$ impliquent $L(f^s(x)) \neq 0$ si x est un point critique de $F\circ f^s$. Alors d'après le théorème 5 appliqué pour $H = F$, $U = U_\alpha$ on conclut que T_2 contient un ensemble résiduel et finalement $T = T_1 \cap T_2 \subset \mathcal{K}_{T,p,q}$.

4. PROBLEMES INVERSES SPECTRAUX.

4.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine strictement convexe. La longueur de $\partial\Omega$ sera notée par L . Considérons l'ensemble

$$Y = \{(x,v);\ x \in \partial\Omega\ ,\ v \in T^*_x(\partial\Omega),\ \|v\| < 1\}\ ,$$

$\|.\|$ étant la norme associée à la métrique Riemmanienne induite sur $\partial\Omega$. Etant donné $(x,v) \in Y$, on considère le vecteur $\xi \in T^*_x(\Omega)$ tel que

$$\|\xi\| = 1,\ \langle \xi, n_x \rangle > 0,\ \xi\big|_{T_x(\partial\Omega)} = v\ ,$$

où n_x est la normale de Ω en x orientée vers Ω et normée par $\|n_x\| = 1$. Le rayon γ qui passe par x en direction ξ coupe transversalement $\partial\Omega$ dans un point $y \in \partial\Omega$. Soit $\eta \in T^*_x(\Omega)$ le vecteur pour lequel

$$\|\eta\| = 1,\ \langle \eta, n_y\rangle = -\ \langle \xi, n_y\rangle\ .$$

L'application de billiard $B : Y \longrightarrow Y$ est déterminée par

$$B(x,v) = (y,w),\ w = \eta\big|_{T_y(\partial\Omega)}\ .$$

Si $B^s(x_o,v_o) = (x_o,v_o)$ on trouve un rayon périodique γ passant par x_o en direction v_o ayant s réflexions. La différentielle $P_\gamma = dB^s(x_o,v_o)$ s'appelle l'application de Poincaré associée à γ . Le spectre de P_γ ne dépend pas du choix de (x_o,v_o). De plus P_γ est une application réelle symplectique et l'inversibilité de $(I-P_\gamma)$ entraîne que dans un voisinage assez petit de γ il n'y a pas des rayons ayant des périodes suffisamment près de T_γ . Pour des domaines strictement convexes dans $\mathbb{R}^2$, Lazutkin (théorème 3, p.32,[14]) a montré que génériquement pour chaque $\gamma \in \mathcal{L}'_\Omega$ nous avons

$$\sqrt[p]{1} \notin \operatorname{spectre}(P_\gamma), \quad \forall p \in \mathbb{N} .$$

L'existence d'un ensemble résiduel dans la topologie introduite par Lazutuin implique l'existence d'un ensemble résiduel au sens du Corollaire 4. D'après le théorème 1 il existe un voisinage W de Id dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^2)$, $X = \partial\Omega$ et un ensemble résiduel $R \subset W$ tels que

$$(7) \qquad T_\gamma/T_\delta \notin \mathbb{Q} , \forall \gamma, \forall \delta \in \mathcal{L}'_{\Omega_f} , \forall f \in R .$$

Soit L_f la longueur de $f(X)$. En profitant du Corollaire 3 et aussi du fait que X est strictement convexe on arrange génériquement la condition :

$$(8) \qquad T_\gamma \neq \frac{m}{2} L_f , \forall \gamma \in \mathcal{L}'_{\Omega_f} , \forall m \in \mathbb{N} , \forall f \in R_1$$

en remplaçant R par un autre ensemble résiduel $R_1 \subset R$. Finalement (7), (8) et les propriétés de l'application de Poincaré impliquent que T_γ et $2T_\gamma$ sont des points isolés dans sing supp $\sigma_D(t)$ si $\gamma \in \mathcal{L}_{\Omega_f}$, $f \in R_1$. Il reste à trouver la singularité de $\sigma_D(t)$ près de T_γ et pour cela on applique les résultats dans [7] . Plus précisément, $\sigma_D(t)$ près de T_γ a la forme :

$$(9) \qquad \sigma_D(t) = (-1)^{N_\gamma} T_\gamma |\det(I-P_\gamma)|^{-\frac{1}{2}} \delta(t-T_\gamma) + L^1_{loc} ,$$

N_γ étant le nombre de réflexions de γ . Cela donne

$$T_\gamma \in \text{sing supp } \sigma_D(t) , \forall \gamma \in \mathcal{L}'_{\Omega_f} , \forall f \in R_1 .$$

En approximant mL_f par des périodes de rayons réfléchissants on trouve que

$$mL_f \in \text{sing supp } \sigma_D(t), \quad \forall m \in \mathbb{N} , \quad \forall f \in R_1 .$$

De plus, les nombres

$$d_1 = |\det(I-P_\gamma)| , \; d_2 = |\det(I-P^2_\gamma)|$$

déterminent le spectre de P_γ et on obtient

Théorème 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine strictement convexe. Alors il existe un voisinage W de Id dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^2)$ et un ensemble résiduel $R \subset W$ tel que pour $\forall f \in R$ on ait

$$(10)\qquad \operatorname{sing\,supp} \sigma_D(t) = -\bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_{\Omega_f}} T_\gamma \cup \{0\} \cup \bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}_{\Omega_f}} T_\gamma ,$$

où la distribution $\sigma_D(t)$ est associée au spectre du problème (1) avec $\Omega = \Omega_f$, $\partial\Omega = f(X)$. De plus pour chaque $\gamma \in \mathcal{L}'_{\Omega_f}$, $f \in R$ on peut trouver le spectre de l'application de Poincaré de γ en connaissant le spectre $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^{\infty}$.

<u>Remarque</u>. Guillemin et Melrose [8] ont montré que le spectre des longueurs $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{L}'_\Omega}$ est un invariant symplectique. D'autre part, Marvizi et Melrose [16] et Colin de Verdière [4] ont étudié les invariants spectraux qu'on peut trouver si on connait le spectre des longueurs.

4.2 Soit maintenant $\Omega = \bigcup_{i=1}^{M} K_i$, où K_i , $i = 1,\dots,M$, sont strictement convexes, $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$. On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, n impair, et on désigne par $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ le complémentaire de Ω . Dans ce cas $\mathcal{L}_\Omega$ contient certaines géodésiques ayant des segments tangents à $\partial\Omega$, mais le théorème 1 traite ce cas. Par conséquence, génériquement on a

$$\forall\gamma , \forall\delta \in \mathcal{L}'_{\mathcal{O}_f} , \; T_\gamma/T_\delta \notin \mathbb{Q} ,$$

où $\mathcal{O}_f$ est le domaine $\mathcal{O}_f = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_f$, $f \in R \subset W$, W étant un voisinage de Id dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$, $X = \partial\Omega$. En généralisant un résultat dans [20] pour le cas de dimension quelconque on montre que l'application de Poincaré P_γ de $\gamma \in \mathcal{L}'_{\mathcal{O}_f}$ n'a pas de valeurs propres sur le cercle $|z| = 1$ si la frontière $\partial\Omega_f$ est strictement convexe en chaque point de réflexion de γ . Cela nous permet de démontrer le

<u>Théorème 8</u>. Soit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{M} K_i$, où K_i , $i = 1,\dots,M$, sont strictement convexes dans $\mathbb{R}^n$, $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$ et soit $n \geqslant 3$, n impair. Alors il existe un voisinage W de Id dans $C^\infty_{emb}(X,\mathbb{R}^n)$ et un ensemble résiduel $R \subset W$ tels que pour chaque $f \in R$ on ait

$$(11)\qquad \bigcup_{\gamma\in\mathcal{L}'_{\mathcal{O}_f}} T_\gamma \subset \operatorname{sing\,supp}\mu_D(t) .$$

De plus pour chaque $\gamma \in \mathcal{L}'_{\mathcal{O}_f}$, $f \in R$ on peut trouver le spectre de l'application de Poincaré de γ en connaissant les pôles $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ de la matrice de diffusion associée à $\mathcal{O}_f$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ ce théorème montre dans le cas générique l'existence des pôles μ_j associés à $\mathcal{O}_f$, $f \in R$ pour lesquels

(12) $$0 < \operatorname{Im}\mu_j < \varepsilon \operatorname{Log}|\mu_j| \ .$$

(cf.[21], [22]).

Dans les applications ci-dessus nous avons exploité le fait que la matrice $(I-P_\gamma)$ est inversible pour obtenir (9) après une application de la méthode de la phase stationnaire. Soit $E(t,x,y)$, $t \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, la solution du problème mixte :

(13) $$\begin{cases} (\partial_t^2-\Delta_x)\ E = 0, (t,x) \in \mathbb{R}\times \Omega \ , \\ E = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega \ , \\ E\big|_{t=0} = 0 \ , \quad \partial_t\ E\big|_{t=0} = \delta(x-y) . \end{cases}$$

Alors on obtient

$$\sigma_D(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega E(t,x,x)dx \ .$$

Etant donné un rayon périodique γ ayant m réflexions on peut construire une paramétrix $I(t,x,y)$ microlocale de (13) pour t près de T_γ et $(x,y) \in U_\gamma \times U_\gamma$, où U_γ est un voisinage suffisamment petit de γ . Si la période T_γ est un point isolé de sing supp$\sigma_D(t)$ on puisse ramener l'étude de $\sigma_D(t)$ près de T_γ à celle de l'intégrale

$$\int_{U_\gamma} I(t,x,x)dx$$

(cf.[7] pour plus de détails).

Quand la condition $\det(I-P\ ) \neq 0$ n'est pas satisfaite il semble plus utile de ramener l'étude de $\sigma_D(t)$ à l'analyse des intégrales sur la frontière $\partial\Omega$. Soit $F^+(t,x,y)$, $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$ la solution du problème mixte

$$\begin{cases} (\partial_t^2-\Delta_x)F^+ = 0 \ , \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \\ F^+\big|_{x \in \partial\Omega} = \delta(t) \otimes \delta(x-y), \\ F^+\big|_{t<0} = 0 \ . \end{cases}$$

Introduisons les distributions :

$$k^+(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial n_x}[F^+(t,x,y)]\Big|_{x \in \partial\Omega} ,$$

$$\widetilde{E}(t,x,y) = E_o^+(t,x-y) - E(t,x,y) ,$$

où $E_o^+(t,x-y)$ est déterminée par

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)E_o^+ = \delta(t) \otimes \delta(x-y), \\ E_o^+\Big|_{t<0} = 0 . \end{cases}$$

Alors pour $t > 0$, $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ on trouve

$$\widetilde{E}(t,x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial\Omega} F^+(t-s,x,z)E_o^+(s,z-y)\,ds\,dz ,$$

Soit $E_1^+(t,x-y)$ la solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)E_1^+ = E_o^+ , \\ E_1^+\Big|_{t<0} = 0 . \end{cases}$$

En utilisant une intégration par parties on prouve que pour $t > 0$ modulo une fonction C^∞ de t on a

$$\int_\Omega E(t,x,x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} E_1^+(t-s,x-z)k^+(s,x,z)\,ds\,dz\,dx . \tag{14}$$

Supposons maintenant que γ soit un rayon réfléchissant ayant m points de réflexions $P_1,\ldots,P_m \in \partial\Omega$ et de plus soit T_γ un point isolé de sing supp$\sigma_D(t)$. Tenant compte des singularités de $k^+(s,x,z)$, $0 \leq s \leq t$, et du fait que t est suffisamment près de T_γ on voit que la singularité de $\sigma_D(t)$ en T_γ coincide avec celle de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{U_i} I_i(t,x,x)\,dx , \tag{15}$$

où $U_i \subset \partial\Omega$ sont des voisinages suffisamment petits des points P_i , $i = 1,\ldots,m$. De plus $I_i(t,x,y)$ est un opérateur intégral de Fourier ayant une relation canonique $C_i \subset T^*(\mathbb{R} \times U_i \times U_i) \setminus 0$ correspondante à m réflexions des rayons passant par U_i en direction près de telle de γ . Il est facile de trouver une transformation canonique χ_i pour laquelle $C_i = \chi_i \circ C_1 \circ \chi_i^{-1}$, $i = 2,\ldots,m$. Cela permet d'écrire (15) comme un intégrale avec une seule fonction de phase et on peut espérer d'appliquer le résultat de Soga [25] concernant l'asymptotique des intégrales oscillants ayant des points critiques dégénérés quelconques. Remarquons enfin que Ikawa [11] a traité le cas de deux obstacles convexes et disjoints en étudiant la singularité de $\mu_D(t)$ associée au rayon captif.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] K. Andersson and R. Melrose, Invent. Math., 41, (1977), 197-232.

[2] C. Bardos, Y.C. Guillot et J. Ralston, Comm. in PDE, 7, (1982), 905-958.

[3] J. Chazarain, Invent. Math., 24, (1974), 65-82.

[4] Y. Colin de Verdière, Sur les longueurs des trajectoires périodiques d'un billiard, Institut Fourier de l'Université de Grenoble I , preprint, 1983.

[5] J.J. Duistermaat and V. Guillemin, Invent. Math., 29, (1975), 39-79.

[6] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mapping and their singularities, Springer, 1973.

[7] V. Guillemin and R. Melrose, Advances in Math., 32, (1979), 204-232.

[8] V. Guillemin and R. Melrose, A cohomological invariant of discrete dynamical systems, p. 672-679 in Christoffel Centennial Volume, Ed. P.L. Butzer and F. Feher, Birkhauser Verlag, Basel, 1981.

[9] B. Helffer et Pham The Lai, Math. Scand., 48, (1981), 39-40.

[10] M. Hirsch, Differential Topology, Springer, New-York, 1976.

[11] M. Ikawa, Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis, University of Osaka, preprint, 1984.

[12] V. Ia. Ivrii, Funct. Analysis and its Appl., 14, (1980), 98-106.

[13] M. Kac, Amer. Math. Soc. Monthly, 73, (1966), 1-23.

[14] V.F. Lazutkin, Convex billiard and eigenfunctions of the laplace operator, Ed. Lenigrad University, 1981, (in Russian).

[15] P. Lax and R. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, New-York, 1967.

[16] S. Marvizi and R. Melrose, J. Diff. Geometry, 17, (1982), 475-502.

[17] R. Melrose and J. Sjöstrand, Comm. Pure Appl. Math., 31, (1978), 593-617 and 35, (1982), 129-168.

[18] R. Melrose, J. Funct. Anal., 53, (1983), 287-303.

[19] V. Petkov et G. Popov, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 32, (1982), 114-149.

[20] V. Petkov et P. Vogel, C.R. Acad. Sci. Paris, ser.A, 296, (1983), 633-635.

[21] V. Petkov, J. Math. Anal. Appl., 101, (1984), 582-587.

[22] V. Petkov, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1982-1983, Exposé n°VII.

[23] V. Petkov and L. Stojanov, Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectral problems, preprint.

[24] O.A. Platonova, Russian Math. Surveys, 36, (1981), 248-249.

[25] H. Soga, Conditions againt rapid decrease of oscillatory integrals and their applications to inverse scattering problems, preprint, 1984.

***