Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Unicité pour certains problèmes de Cauchy non-linéaires, complexes, du premier ordre

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1983-1984

UNICITE POUR CERTAINS PROBLEMES DE CAUCHY NON-LINEAIRES, COMPLEXES, DU PREMIER ORDRE

par S. ALINHAC

(d'après M.S. Baouendi, C. Goulaouic, F. Treves)

Exposé n° VIII

Février 1984

Nous présentons ici un article de M.S. Baouendi, C. Goulaouic et F. Treves [3], diffusé en prépublication en Novembre 1983, peu avant la mort de C. Goulaouic. Nous souhaitons, par cet exposé, rendre hommage à son travail.

1. LES THEOREMES

Soit $F(t,x,\zeta,\xi)$ une fonction holomorphe au voisinage de $(t_o,x_o,\zeta_o,\xi_o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^{2n+2}$.

Nous étudions l'unicité locale des solutions complexes $u(x,t)$, de classe C^2 dans un voisinage de (x_o,t_o) dans $\mathbb{R}^{n+1}$, du problème de Cauchy

$$(1.1)\qquad \begin{cases} u_t = F(t,x,u,u_x) \\ u(t_o,x) = u_o(x) \qquad \text{avec } u_o(x_o) = \zeta_o,\ u_{o,x}(x_o) = \xi_o \ . \end{cases}$$

Plus généralement, on peut considérer des systèmes $(t \in \mathbb{R}^m)$

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u_{t_i} = F_i(t,x,u,u_x)\ , \qquad i = 1,\dots,m \\ u(t_o,x) = u_o(x) \end{cases}$$

pour lesquels on suppose satisfaite une condition d'intégrabilité formelle (ou involution).Les théorèmes énoncés ci-dessous pour $m = 1$ restent valables pour $m \geqslant 1$. Pour la simplicité de l'exposé, nous nous limiterons au cas $m = 1$, où toutes les difficultés sont déjà présentes, renvoyant le lecteur à la remarque (5) ou, plus généralement, à [9], pour le cas des systèmes.

En dimension quelconque $n \geqslant 1$, on n'obtient l'unicité que dans les cas particuliers d'une équation semi-linéaire, ou d'une trace u_o analytique.

<u>Théorème 1</u> : <u>Supposons</u> u_o <u>analytique près de</u> x_o. <u>Alors</u> u <u>est analytique près de</u> (t_o, x_o), <u>et donc unique</u>. ∎

<u>Théorème 2 (cas semi-linéaire)</u> : <u>Supposons</u> $F(t,x,\zeta,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t,x)\xi_k + f(t,x,\zeta)$. <u>Si</u> u_o <u>est de classe</u> C^1, <u>il existe au plus une solution</u> u <u>de classe</u> C^1 <u>du problème (1.1)</u>. ∎

Dans le cas $n = 1$, l'unicité est vraie en général.

<u>Théorème 3</u> : <u>Supposons</u> $n = 1$, <u>et</u> u_o <u>de classe</u> C^2. <u>Alors il existe au plus une solution</u> u <u>de classe</u> C^2 <u>du problème (1.1)</u>. ∎

2. QUELQUES REMARQUES SUR LE PROBLEME DE L'UNICITE NON-LINEAIRE

Le problème de l'unicité de Cauchy pour des équations (d'ordre un ou plus) ou des systèmes non-linéaires comporte plusieurs aspects bien différents.

1°) Si l'on considère des solutions peu régulières (comme c'est le cas par exemple des solutions avec chocs de systèmes de lois de conservations (cf.[6])), la "qualité"de l'opérateur (hyperbolique , par exemple) ne suffit pas à assurer l'unicité, et d'autres conditions (d'entropie,par exemple) doivent être imposées aux solutions.

2°) Si l'on se limite à des solutions assez régulières, la non-linéarité de l'équation importe peu pourvu que l'opérateur linéarisé soit de "bonne qualité" (par exemple hyperbolique strict, elliptique réel du second ordre, etc, ...). Ces cas se traitent à l'aide des théorème classiques pour les équations linéaires

3°) Si l'opérateur linéarisé n'est pas de "bonne qualité", on n'obtient l'unicité que dans certains cas particuliers, moyennant des hypothèses très "instables", c'est-à-dire s'appliquant à l'opérateur mais non, en général, à ses petites perturbations (dans ces cas d'ailleurs, l'université de Cauchy n'a effectivement pas lieu pour certaines perturbations de l'opérateur ; cf. par exemple, Alinhac [1]).

Les résultats de ce type que nous connaissons sont :

i) Le théorème de Holmgren et ses extensions (cf. Sjöstrand [8]).

ii) Le théorème d'unicité pour les systèmes intégrables (cf. Baouendi et Treves [4], et la partie 6).

iii) Le résultat partiel d'unicité de Alinhac et Métivier [2] pour les équations analytiques non-linéaires.

Les résultats de la partie 1 sont également de ce type (le cas "trivial" 2°) correspondant au cas où F et u sont réelles).

3. LE PLAN DE LA PREUVE DES THEOREMES

La preuve est fondée sur une analyse de l'équation linéarisée, et sur les relations qu'elle entretient avec l'équation de départ.

1. Une machinerie de linéarisation (exposée en 4.) permet de représenter une solution donnée de (1.1) à l'aide de solutions w de l'équation linéarisée sur u : $L_u = L = \partial_t - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}(t,x,u,u_x) \frac{\partial}{\partial x_k}$.

2. Cette même machinerie permet de montrer l'intégrabilité de L (partie 5.).

3. Enfin, le résultat d'unicité et d'approximation de [4] pour les systèmes intégrables (rappelé en 6.), combiné à *1.* et *2.*, permet de conclure (parties 7.,8.)

On remarquera que la preuve n'utilise pas un résultat d'uncicité pour des opérateurs à coefficients **analytiques** : L n'est pas de "bonne qualité" en général. L'hypothèse d'analycité n'intervient qu'en ce qu'elle rend possible la mise en place de la machinerie (grâce à la résolution de certains problèmes de Cauchy holomorphes linéaires (cf. Corollaire 4)) et la preuve de l'intégrabilité de L (cf. Proposition 5)).

4. LINEARISATION DE L'EQUATION ET REPRESENTATION DES SOLUTIONS

Une fonction $u(t,x)$ (complexe, de classe C^2) étant donnée , on note, pour v holomorphe près de (t_o,x_o,ζ_o,ξ_o), $\tilde{v}(t,x) = v(t,x,u(t,x),u_x(t,x))$.

Soit d'autre part $\mathcal{L}$ le champ (à coefficients holomorphes en (t,x,ζ,ξ))

$$\mathcal{L} = \partial_t - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \xi_k \right) \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \left(F - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} .$$

La proposition suivante précise le lien entre L et $\mathcal{L}$ (cf. [5]) :

Proposition 4 : Soit u donnée comme plus haut.
Pour toute fonction v holomorphe de (t,x,ζ,ξ), on a

$$L\tilde{v} = \widetilde{\mathcal{L} v} + \widetilde{\frac{\partial v}{\partial \zeta}} (u_t - F) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\frac{\partial v}{\partial \xi_k}} \frac{\partial}{\partial x_k} [u_t - F] . \ \blacksquare$$

Cette proposition se vérifie par un calcul direct, et s'interprète géométriquement en termes de géométrie de contact.

Le corollaire ci-dessous donne la représentation des solutions.

Corollaire 4 : Il existe $(n+1)$ fonctions holomorphes $H, H_1,\dots,H_n$ satisfaisant

$$H|_{t=t_o} = \zeta \ , \quad H_k|_{t=t_o} = \xi_k \quad , \quad k=1,\dots,n \ ,$$

telles que $u \in C^2$ est solution de $u_t = F$ si et seulement si il existe $(n+1)$ fonctions $w, w_1,\dots,w_n$ (de classe C^1) vérifiant :

i) $L_u w = L_u w_k = 0$, $\qquad k=1,\dots,n$.

ii) $u = H(t,x,w,w_1,\dots,w_n)$, $\qquad u_{x_k} = H_k(t,x,w,w_1,\dots,w_n)$. ∎

Preuve : D'après Cauchy-Kowalevski, il existe des fonctions holomorphes G, G_j $(j=1,\dots,n)$ vérifiant :

$$\mathcal{L}\, G = \mathcal{L}\, G_j = 0 \ , \quad G|_{t=t_o} = \zeta \quad , \quad G_j|_{t=t_o} = \xi_j \quad .$$

On pose $w = \widetilde{G}$, $w_j = \widetilde{G}_j$ et l'on inverse ce système pour obtenir u, u_x en termes de w, w_j . ∎

5. INTEGRABILITE DU LINEARISE L

C'est la propriété suivante.

Proposition 5 : Il existe des fonctions $\widetilde{Z}_k(t,x)$ telles que

$$L\widetilde{Z}_k = 0 \quad , \quad \widetilde{Z}_k|_{t=t_o} = x_k - x_{0,k} \ . \ ∎$$

Preuve : Soient Z_k holomorphes vérifiant

$$\mathcal{L} Z_k = 0 \ , \quad Z_k|_{t=t_o} = x_k - x_{0,k} \ .$$

On pose $\widetilde{Z}_k = Z_k(t,x,u,u_x)$. ∎

Remarque sur le cas d'un système (1.2) : On définit alors $\mathcal{L}_i$ comme $\mathcal{L}$ et L_i comme L (avec ∂_{t_i} et F_i remplaçant ∂_t et F).

L'hypothèse d'involution que l'on fait est $[\mathcal{L}_i , \mathcal{L}_j] = 0$. La proposition 4 et son corollaire demeurent, et la proposition 5 reflète la condition d'involution : on obtient $[L_i,L_j] = 0$ (cf. [5]).

6. UN RESULTAT D'UNICITE ET D'APPROXIMATION POUR L.

Nous l'énonçons de façon précise dans le cas $n = 1$, où nous l'utiliserons (cf. [4]).

Soit $\tilde{Z}(t,x) = x + i\,\phi(t,x)$, avec $\phi(t_o,x) \equiv 0$; soit L vérifiant $L\tilde{Z} = 0$, c'est-à-dire $L = \partial_t - \dfrac{\tilde{Z}_t}{\tilde{Z}_x}\,\partial_x$.

On suppose ϕ de classe C^1 dans $I \times J$. ($I =]t_o - A, t_o + A[$, $J =]-B,B[$, $A > 0$, $B > 0$)

Théorème 6 : Soit $w \in C^1(I \times J)$ solution de

$$L\,w = 0 , \qquad w(t_o,x) = w_o(x).$$

Pour $g \in C_o^\infty(J)$, $g = 1$ près de 0, on pose

$$P_\nu(z) = \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int \exp[-\nu^2(z-y)^2]\; g(y)\, w_o(y)\, dy .$$

Alors, si K est un compact suffisamment voisin de 0, on a :

$$w = \lim_{\nu \to +\infty} P_\nu(\tilde{Z})$$

$$\tilde{Z}_x^{-1}\, w_x = \lim_{\nu \to \infty} P'_\nu(\tilde{Z}) ,$$

au sens de la convergence uniforme sur K. ∎

Remarquons que la suite $P_\nu(z)$ ne converge pas en général au voisinage de 0, pour $w_o \in C^1(J)$ quelconque. Le théorème contient donc une information fine sur l'image de $\tilde{Z}$, et la "qualité" de la trace w_o de w.

Plus précisément, si $\mathcal{W}$ est la limite de la suite P_ν sur $\tilde{Z}(K)$, $\mathcal{W}$ est holomorphe à l'intérieur de $\tilde{Z}(K)$, et $w_o(x) = w(t_o,x) = \mathcal{W}(0,x)$; si $(0,x_1)$ est intérieur à $\tilde{Z}(K)$, alors $w_o(x)$ est analytique près de x_1.

Prenons par exemple $t_o = 0$, $\tilde{Z} = x+it^2/2$, et $K = \{|x| \leqslant B, |t| \leqslant A\}$: l'opérateur L est $L = \partial_t - it^2\partial_x$ (opérateur de Mizohata), et $\tilde{Z}(K) = \{|x| \leqslant B, 0 \leqslant t \leqslant A^2/2\}$: la fonction w_o est la trace d'une fonction holomorphe au-dessus de l'axe des x (on dit maintenant, de façon synonyme, que la direction -1 n'est pas dans le front d'onde analytique de w_o).

7. PREUVE DU THEOREME 3 (esquisse)

Les preuves des théorèmes 1 et 2 sont immédiates (en utilisant les résultats des parties 4., 5., et 6.) et laissées au lecteur.

Indiquons les étapes de la preuve du théorème 3 :

Soit u (resp. $u^\#$) une solution de (1.1), et soient L (resp. $L^\#$) et $\tilde{Z}$ (resp. $\tilde{Z}^\#$) le linéarisé sur u (resp. $u^\#$) de l'équation et sa solution introduite à la proposition 5.

1) Le corollaire 4 permet de représenter u(resp. $u^\#$) à l'aide de solutions w, w_1 (resp. $w^\#$, $w_1^\#$) de $Lw = 0$ (resp. $L^\# w^\# = 0$).

Les fonctions H et H_1, bien entendu, ne dépendent pas de u ou $u^\#$.

2) Les fonctions w et $w^\#$ (resp. w_1 et $w_1^\#$) ont même trace u_o (resp. u_{o_x}).

Pour des compacts assez petits K et $K^\#$, les fonctions

$$P_\nu(z) = \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int \exp[-\nu^2(z-y)^2]\ g(y)\ u_o(y)\, dy \quad \text{et}$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \int \exp[-\nu^2(z-y)^2]\ g(y)\ u_{o_x}(y)\, dy \ , \text{ définies au théorème 6,}$$

convergent donc uniformément sur $\tilde{Z}(K) \cup \tilde{Z}^\#(K^\#)$.

Soient $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_1$ leurs limites. De même, les dérivées P' et Q' de ces fonctions convergent uniformément vers des limites que nous notons $\mathcal{W}'$ et $\mathcal{W}_1'$.

3) Avec ces notations, on obtient donc, d'après le théorème 6,

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= H(t,x,\mathcal{W}(\widetilde{Z}(t,x)),\mathcal{W}_1(\widetilde{Z}(t,x)))\\
u^{\#}(t,x) &= H(t,x,\mathcal{W}(\widetilde{Z}^{\#}(t,x)),\mathcal{W}_1(\widetilde{Z}^{\#}(t,x))\\
u_x(t,x) &= H_1(t,x,\mathcal{W}(\widetilde{Z}(t,x)),\mathcal{W}_1(\widetilde{Z}^{\#}(t,x)))\\
u_x^{\#}(t,x) &= H_1(t,x,\mathcal{W}(\widetilde{Z}(t,x)),\mathcal{W}_1(\widetilde{Z}^{\#}(t,x)))
\end{aligned}
$$

pour $(t,x) \in K \cap K^{\#}$.

Rappelons maintenant que $\widetilde{Z}$ et $\widetilde{Z}^{\#}$ dépendent en fait "très peu" de u et $u^{\#}$ (cf. proposition 5) :

$$\widetilde{Z}(t,x) = Z(t,x,u,u_x), \quad \text{avec} \quad Z_{|t=t_o} = x-x_o .$$

Si donc l'on peut prouver que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_1$ sont lipschitziennes dans $\widetilde{Z}(K) \cup \widetilde{Z}^{\#}(K^{\#})$, on obtiendra $u=u^{\#}$ pour $|t|$ assez petit, $(x,t) \in K \cap K^{\#}$.

4) Toute la difficulté consiste donc à analyser la géométrie de $\widetilde{Z}(K)$ et $\widetilde{Z}^{\#}(K^{\#})$ (pour des compacts K et $K^{\#}$ encore à choisir), afin de prouver la proposition suivante :

Proposition 7 : Deux points z_1 et z_2 de $\widetilde{Z}(K) \cup \widetilde{Z}^{\#}(K^{\#})$ peuvent être joints par une courbe lipschitzienne $\gamma(z_1,z_2)$ telle que

$$\text{longueur } \gamma(z_1,z_2) \leqslant C\ |z_1-z_2| \ \blacksquare$$

8. PREUVE DU THEOREME 3 (fin)

Nous prouvons si la proposition 7 et le caractère lipschitzien de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_1$

1. Analyse de la fonction $\widetilde{Z}(t,x)$ et choix de K.

Puisque $\widetilde{Z}(t_o,x) = x-x_o$, on peut choisir comme nouvelles coordonnées

$X = \operatorname{Re}\widetilde{Z}(t,x)$, $T=t$. En supposant d'emblée $(x_o,t_o) = (0\ )$, $\widetilde{Z}$ s'écrit, dans ces nouvelles coordonnées, $\widetilde{Z}(T,X) = X+i\phi(T,X)$, $\phi(0,X) \equiv 0 (\phi \in C^1)$.

L'image par $\tilde{Z}$ du rectangle $R=\{|X|\leqslant B\ ,\ |T|\leqslant A\}$ est alors le domaine borné par les verticales $x=-B$, $x=B$, et les lignes $y=m(x)$, $y=M(x)$, où

$$M(x) = \sup_{|t|\leqslant A} \phi(t,x) \ , \ m(x) = \inf_{|t|\leqslant A} \phi(t,x) \ .$$

On voit facilement que M et m sont lipschitziennes.

On choisira donc pour K la préimage de R pour l'application $(x,t)\to(X,T)$, avec A et B assez petits : le domaine $\tilde{Z}(K)$ est alors

$$\tilde{Z}(K) = \{(x,y)\ ,\ |x|\leqslant B\ ,\ m(x)\leqslant y\leqslant M(x)\}\ .$$

2. Preuve de la proposition 7 :

On choisit de même $K^{\#}$ correspondant à $Z^{\#}$ et au rectangle $\{|X^{\#}|\leqslant B\ ,|T^{\#}|\leqslant A\}$ en sorte que

$$Z^{\#}(K^{\#}) = \{(x,y)\ ,\ |x|\leqslant B\ ,\ m^{\#}(x)\leqslant y\leqslant M^{\#}(x)\}\ .$$

Alors

$$\tilde{Z}(k)\cup\tilde{Z}^{\#}(K^{\#}) = \{(x,y)\ ,\ |x|\leqslant B\ ,\ \bar{m}(x)\leqslant y\leqslant \bar{M}(x)\}\ ,$$

où $\bar{m}(x)=\inf\,(m(x),\,m^{\#}(x))$ et $\bar{M}(x)=\sup\,(M(x),\,M^{\#}(x))$ sont lipschitziennes.

On choisit enfin pour $\gamma(z_1,z_2)$ le segment z_1,z_2 , que l'on remplace, toutes les fois qu'il sort du domaine, par des arcs correspondants des courbes $y=\bar{M}(x)$ ou $y=\bar{m}(x)$.

3. $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}_1$ sont lipschitziennes

En effet on a

$$P_\nu(z_2)-P_\nu(z_1) = \int_{\gamma(z_1,z_2)} P'_\nu(z)\,dz\ ,$$ et, en passant à la limite (cf.7,2)),

$$\mathcal{W}(z_2)-\mathcal{W}(z_1) = \int_{\gamma(z_1,z_2)} \mathcal{W}'(z)\,dz\ :$$ le résultat est une conséquence de la continuité de $\mathcal{W}'$ et de la proposition 7.

4. Remarque sur le cas $n \geq 2$

La démonstration du théorème 3 dans le cas $n \geq 2$ se heurte à la difficulté de décrire les ensembles $\widetilde{Z}(K)$ et $\widetilde{Z}^{\#}(K^{\#})$ dans $\mathbb{C}^n$, puis à celle de comparer les solutions d'opérateurs voisins.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC : Non-unicité du problème de Cauchy, Ann. Maths. 117 (1983), 77-10

[2] S. ALINHAC et G. METIVIER : Propagation de l'analycité des solutions d'équations non-linéaires de type principal, à paraître dans Comm. in PDE(1984

[3] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC, F. TREVES : Uniqueness in certain first-order non linear complex Cauchy problems, preprint.

[4] M.S. BAOUENDI, F. TREVES : A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields, Ann. Maths. 113 (1981), 387-421.

[5] C. CARATHEODORY : Calculus of variations and partial differential equations of the first order. Part. I, Holden Day, Inc. San-Francisco 1965.

[6] R. DI PERNA : Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws, Ind. Univ. Math. J. 28 (1979), 137-188.

[7] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer Verlag (1963).

[8] J. SJÖSTRAND : Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982).

[9] F. TREVES : Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields, Ecole Polytechnique, Palaiseau (France), 1981.

* * * *