Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. MEYER

# Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens, d'après G. C. Verchota

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1982-1983), exp. n° 5, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1982-1983

# THEORIE DU POTENTIEL DANS LES DOMAINES LIPSCHITZIENS D'APRES G. C. VERCHOTA

par Y. MEYER

Exposé n° V

14 Décembre 1982

## 1. NOTATIONS ET ENONCES DES RESULTATS

Dans tout ce qui suit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est un ouvert connexe et borné. Nous dirons que $\Omega$ est un domaine lipschitzien si les conditions suivantes sont satisfaites : la frontière $V = \partial\Omega$ a un nombre fini de composantes connexes et, pour tout $x_o \in \partial\Omega$ , on peut trouver un repère orthonormé dont $x_o$ est l'origine, une fonction lipschitzienne $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et deux nombres $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ tels qu'en appelant $V_{x_o} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ le voisinage de $x_o$ défini par

$$|x'| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant \varepsilon \quad , - \eta \leqslant x_{n+1} \leqslant \eta \quad ,$$

alors $V_{x_o} \cap \Omega$ soit défini par $x_{n+1} > \varphi(x')$, $|x'| \leqslant \varepsilon$ et $V_{x_o} \cap \Omega^c$ par $x_{n+1} \leqslant \varphi(x')$, $|x'| \leqslant \varepsilon$ .

Le but de ce travail est de démontrer que le problème de Dirichlet et le problème de Neumann peuvent être résolus dans $\Omega$ par la méthode usuelle du potentiel de double couche.

Soit $x \in \Omega$ ; la mesure harmonique $\omega^x$ sur $\partial\Omega$ est définie par la condition que $g(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\, d\,\omega^x(y)$ si g est continue sur $\bar{\Omega}$ et harmonique dans $\Omega$ . Différents choix de x conduisent à des mesures $\omega^x$ absolument continues les unes par rapport aux autres et les densités correspondantes sont uniformément bornées. Le lien entre la mesure harmonique et la mesure "élément d'aire" $d\sigma$ sur $\partial\Omega$ est donné par le théorème suivant de B.E.J. Dahlberg ([4]).

Théorème 1 : Soit $\Omega$ un domaine lipschitzien. Alors la mesure harmonique $\omega$ est absolument continue par rapport à la mesure de surface $\sigma$ sur $\partial\Omega$ . La densité $k(y) = \frac{d\omega}{d\sigma}$ est un poids de la classe $A^\infty$ de Muckenhoupt. Plus précisément il existe une constante C telle que, pour toute boule

$$\Delta = \{z \in V,\ |z - z_o| \leqslant r\} \quad \text{où} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad z_o \in V \ ,$$

on ait

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{\sigma(\Delta)} \int_\Delta k^2\, d\sigma\right)^{1/2} \leqslant \frac{C}{\sigma(\Delta)} \int_\Delta k\, d\sigma \ .$$

La mesure $d\sigma$ est absolument continue par rapport à $d\omega$.

Si $\Omega$ est un domaine lipschitzien, on peut trouver deux constantes $\alpha > 0$ et $\tau > 0$ ayant les propriétés suivantes . Pour tout $x_o \in \partial\Omega$ , dans le repère orthonormé servant à définir $\partial\Omega$ comme un graphe lipschitzien, le tronc de cône d'équation $\alpha|x'| < x_{n+1} < \tau$ est tout entier contenu dans $\Omega$ . On désignera par $\Gamma(x_o)$ ce tronc de cône et, si $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction harmonique on posera

$$(2) \qquad u^*(x_o) = \sup_{x \in \Gamma(x_o)} |u(x)|$$

et l'on dira que $u(x)$ tend non tangentiellement en $x_o$ vers une limite $\ell$ si $\lim\limits_{\substack{x \in \Gamma(x_o) \\ x \to x_o}} u(x) = \ell$ .

Le premier corollaire du théorème de Dahlberg est un théorème de trace permettant de définir dans certaines conditions les valeurs au bord de fonctions harmoniques.

Corollaire 1 : Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction harmonique telle que $u^* \in L^2(V;d\sigma)$. Alors $u$ a des limites non tangentielles $d\sigma$ - presque partout sur $V$ et l'on a

$$(3) \qquad u(x) = \int_V u(y)\,d\omega^x(y) \quad , \quad x \in \Omega.$$

Le corollaire 2 exprime que la "valeur au bord" $u(y)$ est arbitraire dans $L^2(V;d\sigma)$.

Corollaire 2 : Soit $g \in L^2(V;d\sigma)$. Alors l'unique fonction harmonique $u$ dans $\Omega$ telle que $u^* \in L^2(V;d\sigma)$ et dont $g$ est la trace est définie par (3).

Une démonstration simplifiée du théorème de Dahlberg a été obtenue par D. S. Jerison et C. E. Kenig. Ces auteurs ont également obtenu des résultats analogues pour le problème de Neumann ([ 6 ] et [ 7 ]).

Désignons par $n(y)$ le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ , orienté vers l'extérieur et par $\omega_n$ l'aire de la sphère unité $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . On pose

$$(4) \qquad \mathcal{K} f(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{(y-x).n(y)}{|y-x|^{n+1}} f(y)\,d\sigma(y)$$

pour $f \in L^2(V;d\sigma)$ et $x \in \Omega$.

Théorème 2 : Si $f \in L^2(V;d\sigma)$, on a $d\sigma$ -presque-partout

$$\lim_{\xi \in \Gamma(x),\ \xi \to x} \mathcal{K} f(\xi) = (\frac{1}{2} + K) f(x)$$

où $\mathcal{K} f(x) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{(y-x).n(y)}{|y-x|^{n+1}} f(y) d\sigma\ (y).$

De plus l'opérateur K ainsi défini est continu sur $L^2(V;d\sigma)$.

Théorème 3 : Pour tout domaine lipschitzien $\Omega$ , l'opérateur

(5) $$\frac{1}{2} + K : L^2(V;d\sigma) \longrightarrow L^2(V;d\sigma)$$

est un isomorphisme.

Si $g \in L^2(V;d\sigma)$, **alors** $u = \mathcal{K} (\frac{1}{2} + K)^{-1} g$ est l'unique solution du problème de Dirichlet suivant

(6) $$\Delta u = 0$$

(7) $$u^* \in L^2(V;d\sigma)$$

(8) $$\text{limite}_{n.t}\ u = g \qquad d\sigma \text{ -presque-partout .}$$

Pour aborder le problème de Neumann, désignons par $f_o$ l'unique fonction de $L^2(V;d\sigma)$ telle que $(\frac{1}{2} - K^*) f_o = 0$ et $\int_V f_o d\sigma = 1$ et par $L_o^2(V;d\sigma)$ le sous-espace de $L^2(V;d\sigma)$ composé des fonctions d'intégrale nulle .

Théorème 4 : L'opérateur $\frac{1}{2} - K^* : L_o^2(V;d\sigma) \rightarrow L_o^2(V;d\sigma)$ est un isomorphisme.

Désignons par S l'opérateur dit "potentiel de simple couche" et défini par

(9) $$Sf(x) = - \frac{1}{(n-1)\omega_n} \int_V |x-y|^{-n+1} f(y) d\sigma(y).$$

alors on a

<u>Théorème 5</u> : <u>Soit</u> $g \in L^2_o(V;d\sigma)$. <u>Alors</u> $u = -S(\frac{1}{2} - K^*)^{-1} g$ <u>est l'unique solution du problème de Neumann suivant</u> :

(10) $$\Delta u = 0$$

(11) $$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \underline{\text{presque-partout}} \text{ sur } V \text{ muni de } d\sigma$$

(12) $$\int_V u \, f_o \, d\sigma = 0$$

(13) $$(\nabla u)^* \in L^2(V;d\sigma).$$

Là encore la condition de "sécurité" (13) assure l'existence de la trace $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_V$ et donne donc un sens à (11).

## 2. LE POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE

Nous allons résolument nous placer dans le cadre où V est globalement le graphe d'une fonction lipschitzienne $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. C'est à dire que $\|\nabla\varphi\| \leqslant M$ et l'on ne suppose pas que $\varphi$ soit bornée. On désignera par $\Omega$ l'ouvert défini par $t > \varphi(x)$ et l'on se propose de démontrer, dans ce cadre, les analogues des théorèmes 3, 4 et 5. Les adaptations nécessaires au cas borné sont de nature technique et n'apportent aucune idée nouvelle [8]. Observons qu'alors $L^2_o(V;d\sigma) = L^2(V;d\sigma)$ et que $f_o$ n'existe pas.

Nous commençons par changer légèrement les notations. On désignera par $X = (x,t)$ les élements de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors, on a, par exemple

(14) $$\frac{Y - X}{|Y - X|^{n+1}} . N(Y) d\sigma(Y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y) - (x-y).\nabla\varphi(y)}{[|x-y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

si $X = (x, \varphi(x))$, $Y = (y, \varphi(y))$ et si $N(Y)$ est le vecteur normal unitaire en $Y \in V$, orienté vers le bas. Nous désignerons par $K(\varphi;x,y) = K(x,y)$ le noyau singulier par l'un des deux membres de (14).

On a, dans ces conditions, le résultat fondamental suivant .

Théorème 6 : Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n;dx)$,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} K(\varphi;x,y)f(y)dy = T_\varphi f(x) \tag{15}$$

existe presque-partout. L'opérateur ainsi défini est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n;dx)$ et s'appelle "potentiel de double couche".

Avant d'énoncer le théorème 7, nous avons besoin d'une nouvelle définition. Nous écrirons, pour une suite $\varphi_j$ de fonctions lipschitziennes, $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ si $\|\nabla\varphi_j\|_\infty \leqslant M$ et si $\varphi_j(x) \longrightarrow \varphi(x)$ au sens de la convergence simple. (ou de la convergence sur tout compact).

Théorème 7 : Soient $\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions lipschitziennes telles que $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ au sens précédent. Alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n;dx)$, on a

$$\|T_{\varphi_j}(f) - T_\varphi(f)\|_2 \longrightarrow 0. \tag{16}$$

Nous nous proposons de démontrer ces deux résultats. Au départ, nous utilisons l'estimation suivante ([2] et [3]).

Lemme 1 : Soient $d \geqslant 1$ un entier, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ une fonction lipschitzienne et $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction indéfiniment dérivable. On suppose $\|A'\|_\infty \leqslant M$.

Alors l'opérateur maximal défini par

$$T_*f(s) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|t-s|\geqslant\varepsilon} F\left(\frac{A(s)-A(t)}{s-t}\right) \frac{f(t)}{s-t}\, dt \right| \tag{17}$$

est borné sur $L^2(\mathbb{R};dt)$ et

$$\|T_*f\|_2 \leqslant C(M,d,F)\|f\|_2 . \tag{18}$$

A l'aide de cette estimation de base et de la méthode des rotations de Calderón et Zygmund, on obtient le résultat suivant :

Lemme 2 : Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et indéfiniment dérivable. Soient $A$ et $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions lipschitziennes.

Considérons alors le noyau $K(x,y) =$

$$\frac{A(x)-A(y)}{|x-y|^{n+1}}\, \theta\left(\frac{B(x)-B(y)}{|x-y|}\right) . \tag{19}$$

Alors l'opérateur maximal défini par

(20) $$T_*f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy \right|$$

est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ et $\|T_*(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2$ où $C = C(M,\theta,n)$ dès que $\|A'\|_\infty \leqslant M$, $\|B'\|_\infty \leqslant M$.

Ce résultat s'applique à chacun des noyaux

$$\frac{x_k - y_k}{\left[|x-y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2\right]^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{et à} \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\left[|x-y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}$$

pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

## 3. L'EXISTENCE PRESQUE PARTOUT DU POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE

Il est bien connu qu'étant donnée une suite $L_j$ d'opérateurs linéaires définis disons sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et à valeurs dans $C(\mathbb{R}^n)$, pour montrer l'existence presque partout de $\lim_{j\to+\infty} L_jf(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, il suffit de savoir que

(21) $$\lim_{j\to+\infty} L_jf(x) \quad \text{existe presque partout lorsque } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

et

(22) $$\left\| \sup_{j\geqslant 1} |L_j(f)| \right\|_2 \leqslant C\|f\|_2 .$$

Nous allons employer cette démarche dans le cas des noyaux tronqués $K_\varepsilon(x,y) = K(x,y)\, \mathbb{1}_{|x-y|\geqslant\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K(x,y) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y) - (x-y)\cdot\nabla\varphi(y)}{\left[|x-y|^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2\right]^{\frac{n+1}{2}}}$.

En effet on a :

Lemme 3 : Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a, avec les notations précédentes

(23) $$\lim_{\varepsilon \quad 0} \int K_\varepsilon(x,y)f(y)\,dy =$$

$$- \sum_1^n \int \frac{x_k - y_k}{|x-y|^n}\, \lambda\left(\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|}\right) \frac{\partial f}{\partial y_k}\,dy .$$

La fonction $\lambda$ est définie par $\lambda(0) = 0$ et $\lambda'(t) = (1+t^2)^{-\frac{n+1}{2}}$.

En fait (23) se démontre grâce à la formule de Green et a lieu en tout point x où $\varphi$ est différentiable, c'est-à-dire presque partout. Les détails ne présentent aucune difficulté et sont laissés au lecteur.

Le lemme 3 fournit également la démonstration du théorème 7 lorsque $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ . En effet la fonction $\lambda$ est bornée ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue au second membre de (23). Le cas général $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ s'obtient grâce à $\|T_{\varphi_j}\| \leqslant C$ où C ne dépend pas de j et où la norme est la norme d'opérateur.

## 4. LIMITES NON TANGENTIELLES DU POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE

On a le lemme suivant :

Lemme 4 : Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , $a \neq \varphi(\alpha)$, $w_n$ la surface de la sphère unité $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $\lambda$ la fonction du lemme 3. Alors on a, si $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\text{(24)} \qquad \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{a-\varphi(y)-(\alpha-y).\ \nabla\varphi(y)}{[|y-\alpha|^2+(\varphi(y)-a)^2]^{\frac{n+1}{2}}} f(y)\,dy = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(a-\varphi(\alpha))f(\alpha) -$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_1^n \frac{y_k-\alpha_k}{|y-\alpha|^n}\ \lambda\left(\frac{\varphi(y)-a}{|y-\alpha|}\right) \frac{\partial f}{\partial y_k}\,dy\ .$$

L'intégrale figurant au second membre de (24) est une fonction continue de $(\alpha,a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Pour le voir, il suffit de découper cette intégrale en $|y-\alpha| \leqslant \delta$ (partie dont la contribution ne dépasse pas $C\delta$ ) et en $|y-\alpha| > \delta$ (partie que l'on traite à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue).

Désignons par $\mathcal{K} f(\alpha,a)$ le premier membre de (24), par $\Gamma(x_o)$ le cône $a - \varphi(x_o) > M'|\alpha - x_o|$ où $M' > M \geqslant \|\nabla\varphi\|_\infty$ et montrons, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , l'existence de $\displaystyle\lim_{\substack{(\alpha,a) \in \Gamma(x_o) \\ a \to \varphi(x_o)}} \mathcal{K} f(\alpha,a)$.

Là encore il suffit de vérifier cette existence lorsque f est régulière et de prouver l'estimation maximale. A savoir :

$$\Big\| \sup_{(\alpha,a)\,\in\,\Gamma(x)} |\mathcal{K}f(\alpha,a)|\,\Big\|_{L^2(dx)} \leqslant C(M,M'\,\|f\|_2 \,.$$

Cette estimation maximale s'obtient par des remarques géométriques. Si $\varepsilon = a - \varphi(x_o)$, un calcul facile donnè

$$(25)\qquad \frac{a-\varphi(y)-(\alpha-y).\,\nabla\varphi(y)}{[\,|\alpha-y\,|^2+(a-\varphi(y))^2]^{\frac{n+1}{2}}} = K(x_o,y)\ 1_{|x_o-y|\geqslant\varepsilon} + R_\varepsilon(x_o,y)$$

où

$$K(x_o,y) = \frac{\varphi(x_o)-\varphi(y)-(x_o-y).\,\nabla\varphi(y)}{[\,|x_o-y|^2+(\varphi(x_o)-\varphi(y))^2]}$$

et où $|R_\varepsilon(x_o,y)| \leqslant C\,\varepsilon^{-n}$ si $|x_o-y| \leqslant \varepsilon$, $|R_\varepsilon(x_o,y)| \leqslant C\varepsilon|x_o-y|^{-n-1}$ si $|x_o-y| \geqslant \varepsilon$ .

On sait que $\varepsilon\displaystyle\int_{|x_o-y|\geqslant\varepsilon} |x_o-y|^{-n-1}\,|f(y)|dy \leqslant C_n f^*(x_o)$ où $f^*$ est la fonction maximale de Hardy et Littlewood de f et l'on a donc

$$(26)\qquad \sup_{(\alpha,a)\,\in\,\Gamma(x)} |\mathcal{K}f(\alpha,a)| \leqslant K_* f(x) + Cf^*(x)$$

où

$$K_*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \Big|\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} K(x,y)f(y)dy\,\Big|$$

et K est défini par (25).

Nous pouvons conclure

<u>Lemme 5</u> : <u>Le potentiel de double couche est défini si</u> $X \notin V$ <u>par</u> $\mathcal{K}f(X) = \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_V \frac{Y-X}{|Y-X|^{n+1}}\,.\,N(Y)\ f(Y)d\sigma(Y)$ <u>et l'on a</u>, <u>presque partout sur</u> V :

(27) $$\lim_{X \to X_o \in V} \text{n.t.} \quad \mathcal{K}f(X) = \pm \frac{1}{2} f(X_o) + \text{v.p.} \int_V \frac{Y - X_o}{|Y - X_o|^{n+1}} . N(Y) f(Y) d\sigma(Y).$$

On rappelle que $N(Y)$ est le vecteur normal en $Y$ à $V$, dirigé vers l'extérieur de $\Omega$ (c'est-à-dire vers le bas) et le signe $\pm$ dans le second membre de (27) est celui de $t - \varphi(x)$ quand $X = (x,t)$.

## 5. LE POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE ET SON GRADIENT

Si $n \geqslant 3$, le potentiel de simple couche de $f \in L^2(V;d\sigma)$ est défini dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus V$ par

(28) $$Sf(X) = - \frac{1}{(n-1)\,\omega_n} \int_V |X - Y|^{-n+1} f(Y)\, d\sigma(Y) .$$

En dimension 3 $(n = 2)$, cette intégrale diverge. Pour la rendre convergente, on fixe $X_o \in V$ et l'on remplace le noyau $|X - Y|^{-n+1}$ par $|X - Y|^{-n+1} - |X_o - Y|^{-n+1}$ . Seules interviendront dans la suite les dérivées partielles de $Sf(X)$ et le choix de $X_o$ n'a aucune importance.

On a, si $X = (x,t) \in V$,

(29) $$\nabla Sf(X) = \frac{1}{\omega_n} \int_V \frac{X - Y}{|X - Y|^{n+1}} f(Y) d\sigma(Y)$$

<u>Lemme 6</u> : <u>On a, avec les notations précédentes</u>

(30) $$\lim_{X \to X_o \in V} \text{n.t.} \quad \nabla Sf(X) = \pm \frac{1}{2} f(X_o)\vec{N}(X_o) + \frac{1}{\omega_n} \text{v.p.} \int_V \frac{X_o - Y}{|X_o - Y|^{n+1}} f(Y) d\sigma(Y) .$$

<u>L'égalité</u> (30) <u>et l'existence de la valeur principale sont assurées presque partout et</u>

(31) $$\Big\| \sup_{X \in \Gamma(x)} |\nabla Sf(X)| \Big\|_{L^2(dx)} \leqslant C\|f\|_{L^2(dx)} .$$

Pour démontrer ces résultats, on emploie la méthode canonique. On commence par vérifier l'inégalité maximale (31) et il suffit ensuite d'assurer (30) lorsque $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui permet d'intégrer par parties et de diminuer la singularité du noyau.

Pour démontrer (31), on pose $X_o = (x_o, \varphi(x_o))$, $X \in \Gamma(x_o)$, $Y = (y, \varphi(y))$ $\varepsilon = |X - X_o|$ et l'on remarque simplement que dans ces conditions

$$\frac{X - Y}{|X - Y|^{n+1}} = \frac{X_o - Y}{|X_o - Y|^{n+1}} \mathbb{1}_{|X_o - Y| \geqslant \varepsilon} + R_\varepsilon(X_o, Y)$$

où $|R_\varepsilon(X,Y)| \leqslant C\,\varepsilon^{-n}$ et $|R_\varepsilon(X,Y)| \leqslant C\varepsilon\,|X_o - Y|^{-n-1}$ .

On conclut comme pour (26).

L'existence de la limite non tangentielle lorsque $f \in L^2(V;d\sigma)$ s'établit comme suit. On pose $\cos\theta(y) = (1 + |\nabla\varphi(y)|^2)^{-1/2}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta(y) < \frac{\pi}{2}$ et l'on définit les vecteurs $T_1(Y), \dots, T_n(Y)$, tangents en $Y$ à $V$, par

$$T_1(Y) = (\cos\theta(y), 0, \dots, 0, \cos\theta(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1})$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$T_n(Y) = (0, \dots, 0, \cos\theta(y), \cos\theta(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_n})$$

tandis que le vecteur normal unitaire $N(Y)$ est défini par

$$N(Y) = (\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \dots, \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}, -\cos\theta).$$

On remarque que les longueurs de ces vecteurs appartiennent à $[\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}, 1]$ si $\|\nabla\varphi\|_\infty \leqslant M$. Leur déterminant vaut $(-\cos\theta)^{n-1}$. Ce déterminant est uniformément minoré, en module.

Désignons par $(T_1^*, \dots, T_n^*, N)$ la base duale de $(T_1, \dots, T_n, N)$. C'est-à-dire que pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$Z = (Z.T_1)T_1^* + \dots + (Z.T_n)T_n^* + (Z.N)N .$$

Nous appliquerons cette décomposition à $\frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}}$ et remarquons simplement que les vecteurs $T_j(Y)$ sont des fonctions mesurables et uniformément bornées (dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Ces vecteurs seront incorporés dans la fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ à laquelle l'opérateur est appliqué. Nous pouvons donc ignorer les $T_j^*$ et remplacer tout simplement $\frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}}$ par $K_j(X,Y) = \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} \cdot T_j^*$ ou par $\tilde{K}(X,Y) = \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} . N(Y)$.

Un calcul simple donne

$$(32) \qquad K_j(X,Y)\,d\sigma(Y) = \frac{1}{n-1} \left\{\frac{\partial}{\partial y_j} |X-Y|^{-n+1}\right\} dy$$

et cette identité est la raison d'être de la définition des vecteurs $T_j$.

D'autre part $-\tilde{K}(X,Y)d\sigma(Y)$ est le noyau du potentiel de double couche.

Enfin le lemme 2 fournit la continuité sur $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ de l'opérateur maximal associé à $K_j$ et $\tilde{K}$.

Si $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a, pour $X \notin V$,

$$\int_V K_j(X,Y)g(y)d\sigma(Y) = -\frac{1}{\omega_n(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} |X-Y|^{-n+1} \frac{\partial g}{\partial y_j}\, dy$$

et cette intégrale converge non tangentiellement en tout point $X_0 \in V$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. Elle contribue à la valeur principale qui apparaît dans le second membre de (30) tandis que le terme de saut vient du potentiel de double couche $\int_V \tilde{K}(X,Y)g(y)d\sigma(Y)$. Les détails ne présentent aucune difficulté et sont laissés au lecteur.

Dans le résultat qui suit, nous commettrons l'abus de langage suivant :

Définition 1 : Soit $K : L^2(V; d\sigma) \to L^2(V; d\sigma)$ l'opérateur défini par le noyau v.p. $\frac{1}{\omega_n} \frac{(Y-X).N(Y)}{|Y-X|^{n+1}} d\sigma(Y) = K(X,Y)$. Nous désignerons par $K^*$ l'adjoint de cet opérateur $K$.

On a alors le résultat suivant qui sera essentiel dans l'étude des opérateurs $\frac{1}{2} \pm K$.

Proposition 1 : Avec les notations précédentes, on a pour toute fonction $f \in L^2(V)$ et pour presque tout $X \in V$

$$(33) \qquad \lim_{Y \to X} \text{n.t. } \nabla Sf(Y).N(X) = \pm \frac{1}{2} f(X) + K^* f(X)$$

où le signe est - si $Y = (y,t)$, $X = (x, \varphi(x))$ et $t - \varphi(x) > M'|x-y|$ et le signe est + si, avec les mêmes notations $t - \varphi(x) < -M'|x-y|$.

Il s'agit d'une simple corollaire du lemme 6. En effet, on remarque que l'opérateur

$$\frac{1}{\omega_n} \text{ v.p. } \int_V N(X) \, . \, \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} \, f(Y) d\sigma(Y)$$

est la limite (forte) des opérateurs définis par les noyaux tronqués $L_\varepsilon(X,Y) = \frac{1}{\omega_n} N(X) \, . \, \frac{X-Y}{|X-Y|^{n+1}} \, 1\!\!1_{|x-y| \geq \varepsilon}$ $(X = (x, \varphi(x))$ et $Y = (y, \varphi(y))$ appartiennent à $V)$.

Finalement le noyau de l'opérateur $L_\varepsilon^*$ est $\overline{L_\varepsilon}(Y,X)$ si le noyau de $L_\varepsilon$ est $L_\varepsilon(X,Y)$. Cette remarque termine la preuve de la proposition 1.

On peut reformuler (33) en désignant par $\Omega_+$ l'ouvert situé au-dessus des graphes de $\varphi$ (et $\Omega_-$ celui en dessous) et en appelant $N_\pm(X)$, $X \in V$, le vecteur normal unitaire au graphe de $\varphi$ dirigé vers l'extérieur du domaine $\Omega_\pm$ . On a, dans ces conditions

$$(34) \qquad f \in L^2(V;d\sigma) \text{ et } u = S(f) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial N_\pm} = \left(-\frac{1}{2} \pm K^*\right) f \; .$$

Ceci en convenant que la dérivée normale en question est définie par le procédé de la limite non tangentielle des gradients dans les cônes d'approche non tangentielle.

## 6. L'INEGALITE DE PAYNE ET WEINBERGER

On reprend les notations précédentes. On suppose $f \in L^2(V;d\sigma)$, $u = S(f)$ et l'on étudie le gradient de $u$, $\nabla u$, que l'on décompose en $\overrightarrow{\nabla_t u} + \frac{\partial u}{\partial N_\pm} \overrightarrow{N_\pm}$ . On appellera $\nabla_t u$ le gradient tangentiel.

Avec ces notations, on a (si $u = S(f)$ et $f \in L^2(V;d\sigma)$):

Proposition 2 :

$$(35)\qquad \int_V |\nabla_t u|^2\, \vec{N}_\pm\, d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial N_\pm}\right)^2 \vec{N}_\pm\, d\sigma + 2\int_V \overrightarrow{\nabla_t u}\, \frac{\partial u}{\partial N_\pm}\, d\sigma .$$

La démonstration de ce résultat se décompose en deux étapes. On commence par l'établir lorsque V est remplacé par le bord $\partial B$ d'un domaine $C^\infty$ B tel que $\bar{B}$ soit contenu dans $\Omega_+$ ou $\Omega_-$ ; alors $\vec{N}$ désignera la normale extérieure à $\partial B$ etc. En suite on approche l'ouvert $\Omega$ par une suite croissante $B_j$ d'ouverts réguliers. Dans le cas régulier, $\overrightarrow{\nabla_t u} = \overrightarrow{\nabla u} - (\frac{\partial u}{\partial N})\,\vec{N}$ ramène (35) à

$$\int_{\partial B} |\nabla u|^2\, \vec{N}\, d\sigma = 2\int_{\partial B} \overrightarrow{\nabla u}\, \frac{\partial u}{\partial N}\, d\sigma .$$

Cela revient à prouver que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ fixé,

$$\int_{\partial B} \{|\nabla u|^2\, \vec{n}.\vec{a} - 2(\overrightarrow{\nabla u}.\vec{a})(\overrightarrow{\nabla u}.\vec{n})\}\, d\sigma = 0$$

ou encore que $\operatorname{div}\{|\nabla u|^2 \vec{a} - 2(\overrightarrow{\nabla u}.\vec{a})\,\overrightarrow{\nabla u}\} = -2(\overrightarrow{\nabla u}.\vec{a})\,\Delta u = 0$. Ceci caractérise en fait les fonctions harmoniques.

Pour passer au cas général, on commence par supposer que f a un support compact. Alors $|\nabla Sf(X)| = O(|X|^{-n})$ à l'infini.

On appelle $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une suite telle que $\varphi_j(x) > \varphi(x)$, $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$ uniformément sur tout compact et $\|\nabla\varphi_j\|_\infty \leqslant M'$, $\nabla\varphi_j(x) \to \nabla\varphi(x)$ presque-partout. On désigne par $B_j$ une suite croissante de domaines réguliers ayant les propriétés suivantes

(36) $\qquad B_j$ est contenu dans $y \geqslant \varphi_j(x)$

(37) $\qquad \partial B_j = E_j \cup F_j$ où $E_j = \{y = \varphi_j(x)\ ,\ |x| \leqslant j\}$ et où

$$F_j \subset \{|x| \geqslant j - 10\}$$

(38) $\qquad$ la surface totale de $F_j$ ne dépasse pas $Cj^n$ .

Le lemme 7 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraînent

$$\int_{E_j} |\nabla_t u|^2 \vec{N}_j \, d\sigma \longrightarrow \int_V |\nabla_t u|^2 \vec{N} \, d\sigma$$

($j \to +\infty$) et de même pour les autres termes.

Par ailleurs $\nabla Sf(X) = O(|X|^{-n})$ implique que $\int_{F_j} |\nabla Sf(X)|^2 d\sigma \longrightarrow 0$ avec $j^{-1}$. La proposition est prouvée dans le cas particulier où f a un support compact.

Pour passer au cas général, il suffit d'observer que, grâce au lemme 2, les deux membres de (35) sont des formes quadratiques continues sur $L^2(V;d\sigma)$. Puisqu'elles coïncident sur une partie dense, elles sont identiques.

<u>Corollaire 1</u> : <u>Les trois normes</u> $\|(\frac{1}{2}+K^*)f\|_2$ , $\|(\frac{1}{2}-K^*)f\|_2$ <u>et</u> $\|\nabla_t Sf\|_2$ <u>sont équivalentes sur</u> $L^2(V;d\sigma)$.

En effet, on part de (35) et l'on fait le produit scalaire avec $(0,0,\ldots,0,-1)$. On a

$$N_+(X).(0,0,\ldots,0,-1) = \cos\theta\,(X) \in [\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}, 1] .$$

Si bien que (35) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent

$$\|\nabla_t u\|_2^2 \leqslant \sqrt{1+M^2}\ \left( \|\frac{\partial u}{\partial N_\pm}\|_2^2 + 2\,\|\nabla_t u\|_2\ \|\frac{\partial u}{\partial N_\pm}\|_2 \right)$$

et également

$$\|\frac{\partial u}{\partial N_\pm}\|_2^2 \leqslant \sqrt{1+M^2}\,( \|\nabla_t u\|_2^2 + 2\,\|\nabla_t u\|_2\ \|\frac{\partial u}{\partial N}\|_2).$$

On appelle C(M) la constante $\sqrt{1+M^2} + \sqrt{1+M^2+\sqrt{1+M^2}}$ et l'on a

$\|\nabla_t u\|_2 \leqslant C(M)\,\|\frac{\partial u}{\partial N_\pm}\|_2$ et

$$\|\frac{\partial u}{\partial N_\pm}\|_2 \leqslant C(M)\,\|\nabla_t u\|_2 .$$

Ceci montre que les normes $\|(\frac{1}{2}\pm K^*)f\|_2$ sont équivalentes à $\|\nabla_t Sf\|_2$ .

<u>Corollaire 2</u> : <u>Les trois normes</u> $\|(\frac{1}{2}+K^*)f\|_2$ , $\|(\frac{1}{2}-K^*)f\|_2$ <u>et</u> $\|f\|_2$ <u>sont équivalentes sur</u> $L^2(V;d\sigma)$. On a d'une part $\|(\frac{1}{2}\pm K^*)f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$ grâce à la continuité de $K^*$ . En sens inverse on a

$$\|f\|_2 \leqslant \|(\frac{1}{2}+K^*)f\|_2 + \|(\frac{1}{2}-K^*)f\|_2 .$$

et l'on utilise alors le corollaire 1.

## 7. LE SCHEMA HILBERTIEN ET SON APPLICATION

<u>Lemme 7</u> : <u>Soient</u> $T_j : H \to H$ <u>et</u> $T : H \to H$ <u>des opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert. On suppose qu'il existe deux constantes</u> $C > \delta > 0$ <u>telles que</u>

(39) $$\delta\|x\| \leqslant \|T_j(x)\| \leqslant C\|x\|$$

<u>et que</u>

(40)

$$\lim_{j\to+\infty} \|T_j^*(x) - T^*(x)\| = 0 \quad \text{pour tout } x \in H .$$

<u>Alors si les</u> $T_j$ <u>sont des isomorphismes</u>, T <u>est surjective</u>.

Remarquons d'abord qu'il est possible de construire des isomorphismes isométriques $T_j$ qui tendent fortement vers une isométrie non surjective. Par exemple, on pose $T_j(x_1,\dots,x_j,\dots) = (x_j,x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots)$ avec $H = \ell^2(\mathbb{N})$ . Alors $\|T_j(x) - S(x)\|_2 \to 0$ où $S(x_1,\dots,x_j,\dots) = (0,x_1,\dots,x_j,\dots)$.

La preuve du lemme est par ailleurs facile et laissée au lecteur.

Pour appliquer le schéma hilbertien, on désigne par $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne arbitraire et par $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une suite de fonctions vérifiant

$$\|\nabla\varphi_j\|_\infty \leqslant C \quad \text{et} \quad \varphi_j(x) \to \varphi(x)$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ .

Appelons $T_j$ l'opérateur $-\frac{1}{2}+K_j^*$ où $K_j$ est défini par le noyau $K(\varphi_j;x,y)$ du théorème.

Alors le théorème 7 donne $\|T_j^* f - T^* f\|_2 \to 0$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n;dx)$.

Montrons d'abord que chaque $T_j^*$ est un isomorphisme. Le corollaire 2 donne (39). D'autre part, on remplace $\varphi_j$ par $\lambda\varphi_j$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, et au lieu de $T_j^*$, on obtient $T_{j,\lambda}^*$ pour lequel on a encore (39). Finalement le théorème 7 montre que l'application de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ qui à $\lambda$ associe $T_{j,\lambda}^*$ est continue. On peut donc appliquer le théorème de l'indice et les $T_{j,\lambda}^*$ sont des isomorphismes.

L'opérateur $-\frac{1}{2}+K^*$ est surjectif. Le corollaire 2 montre que cet opérateur est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La même démonstration s'applique à $\frac{1}{2}+K^*$. Finalement les deux opérateurs $\pm\frac{1}{2}+K$ sont également des isomorphismes.

Les théorèmes 3 et 5 (du cas ouvert non borné) sont alors évidents. Rappelons que dans le cas du théorème 5, les contraintes du cas borné disparaissent.

---

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Carleson : On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables. Ark. Mat. 4 (1962) 393-399.

[2] R. R. Coifman, G. David et Y. Meyer : La solution des conjectures de Calderon. A paraître aux Advances in Mathematics.

[3] R. R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer : L'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes. Annals of Mathematics 116 (1982) 361-387.

[4] B. Dahlberg : Estimates of harmonic measure. Arch. for Rat. Mech. and Anal. 65 (1977), 275-288.

[5] D. S. Jerison and C. Kenig : An identity with applications to harmonic measure. Bulletin A.M.S. Vol. 2, n° 3, May 1980, 447-451.

[6] D. S. Jerison and C. Kenig : The Dirichlet problem in non smooth domains. Annals of Mathematics 113 (1981) 367-382.

[7] D. S. Jerison and C. Kenig : The Neumann problem on Lipschitz domains. Bull. A.M.S., Vol. 4 (1981) 203-207.

[8] G. C. Verchota : Layer potentials and boundary value problems for Laplace equation in Lipschitz domains. University of Minnesota, Minneapolis (June 1982)

* * *