J. P. Bourguignon

Introduction aux problèmes analytiques posés par le système des équations de Yang-Mills

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 18, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

INTRODUCTION AUX PROBLEMES ANALYTIQUES POSES PAR LE SYSTEME DES EQUATIONS DE YANG-MILLS

par J. P. BOURGUIGNON

Exposé n° XVIII

18 janvier 1983

Le système des équations de Yang-Mills a suscité beaucoup d'intérêt parmi les physiciens comme équations du champ d'une théorie de jauge non-abélienne qui pourrait fournir des modèles du confinement des quarks.(Pour les motivations physiques nous renvoyons le lecteur à [2], [8] ou [7]).

D'un point de vue purement mathématique,ce système est l'équation des points critiques d'une fonctionnelle naturelle sur l'espace des connexions d'un fibré à groupe structural non abélien sur une variété riemannienne. C'est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre qui a des propriétés particulières lorsque la variété de base est de dimension 4 : les minima de la fonctionnelle sont alors solutions d'un système du 1er ordre, les équations dites d'auto-dualité.

Dans un premier temps,l'accent a été mis sur la recherche de solutions explicites, puis de toutes les solutions minimales sur des espaces simples comme les sphères ou les espaces plats. De façon assez étonnante, grâce à une traduction appropriée du système des équations de Yang-Mills en termes complexes introduite par R. Penrose avec les espaces de twisteurs, ces problèmes ont fait appel à des résultats très récents de géométrie algébrique.

Dans une étape suivante du développement de la théorie, on s'est intéressé à des solutions sur des espaces plus généraux. Les méthodes analytiques sont alors venues au premier plan. Leur application est rendue difficile par la présence inévitable d'un groupe d'invariance de dimension infinie. On met là le doigt sur une des difficultés essentielles de l'application de techniques d'analyse à la géométrie : les problèmes d'origine géométrique placent souvent a priori l'analyste dans une situation qu'il a l'habitude de considérer comme mauvaise à cause de contraintes qui traduisent justement la nature géométrique du problème.

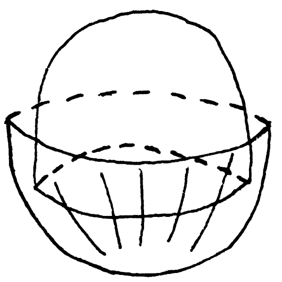
De nombreux résultats sur le système des équations de Yang-Mills ont déjà été obtenus par des méthodes analytiques par K. Uhlenbeck (cf [17], [18]), C. Taubes (cf [14], [15], [16]) entre autres. Certains de ces résultats ont des conséquences tout à fait spectaculaires et inattendues (voir par exemple [6]).

Le but de cet exposé est de présenter le cadre général du problème ainsi que certains des résultats déjà obtenus et par là-même d'inviter des non-géomètres à se plonger dans la lecture (captivante !) des articles déjà mentionnés. En effet beaucoup de problèmes restent encore ouverts. Nous avons donc délibérément sacrifié la motivation physique initiale en nous limitant à des allusions. Il en est de même des développements proprement géométriques qui ne sont pas évoqués.

I - LES OBJETS

Nous allons travailler sur une variété différentielle M (de dimension n), donc sur un espace topologique dont chaque point m possède un voisinage homéomorphe à une boule U de $\mathbb{R}^n$ et une famille distinguée de cartes qui permet de définir sur M une notion de fonction C^∞.

Au-delà de la structure évidente de variété différentielle de $\mathbb{R}^n$ lui-même avec ses fonctions C^∞ habituelles (même là attention ! sur $\mathbb{R}^4$ il existe au moins deux structures différentielles non équivalentes : l'évidente et une autre, mais c'est la seule dimension où une telle bizarrerie existe), le premier exemple non trivial est donné par la sphère S^n pour laquelle la structure différentielle peut-être décrite en termes de recollement autour de l'équateur de deux calottes hémi-sphériques, voisinages privilégiés des pôles nord et sud.



Pour les physiciens, la variété M est l'espace-temps d'où l'intérêt marqué pour le cas n = 4.

Sur M nous considérons des espaces fibrés, i.e. des variétés munies d'une projection π sur M telle que, pour tout point m de M, il existe un voisinage U de m tel que $\pi^{-1}(U)$ soit difféomorphe à U x F où F est la fibre-type. Le difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ est appelé une trivialisation du fibré. La structure du fibré est déterminée dès qu'on s'est donné un ensemble compatible de trivialisations recouvrant M (pour une introduction systématique, voir [12]). Nous sommes en fait intéressés à des fibrés particuliers, les fibrés à groupe structural un groupe de Lie. Cela signifie que la projection préserve la structure supplémentaire donnée par l'action d'un groupe de Lie G dans la fibre-type en un sens que nous précisons. Deux cas valent qu'on s'y arrête.

i) Le groupe G agit librement sur l'espace total P du fibré et de plus l'espace des orbites s'identifie à M. La fibre-type s'identifie alors avec le groupe G, l'action à la multiplication à droite. Dans une trivialisation, un tel fibré se présente donc comme $pr_1 : U \times G \to U$. On appelle de tels fibrés des fibrés principaux. Ils jouent un rôle particulier dans la théorie des fibrés, comme nous allons le voir.

ii) Le groupe G n'agit pas directement sur l'espace total du fibré (que nous noterons E dans ce cas), mais une structure dont G est groupe d'invariance est préservée par les trivialisations.

Donnons quelques exemples : si la structure supplémentaire est vectorielle sur $\mathbb{R}$, alors $F = \mathbb{R}^k$ et $G \subset Gl(k, \mathbb{R})$ (k est alors appelé <u>le rang</u> du fibré) et on demande que chaque trivialisation ϕ soit linéaire sur les fibres ; si on veut en plus qu'un produit scalaire soit spécifié dans chaque fibre, alors ϕ doit être orthogonale (et $G \subset O(k)$).

Soulignons que dans <u>une</u> trivialisation ces données peuvent toujours être obtenues par transport à partir de la fibre-type, mais que la structure supplémentaire du fibré provient de ce que les données transportées par différentes trivialisations coïncident.

A partir d'un G-fibré au sens précédent, on peut construire un fibré principal, <u>le fibré de ses G-repères</u> en prenant en un point m pour fibre de ce fibré $P_m = \mathrm{Hom}_G(F, E_m)$. On construit aisément une famille de trivialisations compatibles de P à partir d'une telle famille pour E.

Réciproquement, à toute représentation P du groupe G dans un espace V et à tout G-fibré principal, on associe un fibré, dit <u>fibré associé</u>, $E = P \underset{\rho}{\times} V$ où $P \underset{\rho}{\times} V$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence $(p, v) \sim (pg^{-1}, \rho(g).v)$ pour g dans G.

Parmi les fibrés qu'on peut naturellement associer à un fibré donné figurent : pour un G-fibré principal $\pi : P \to M$, son <u>fibré des automorphismes</u> $G_P = P \underset{ad}{\times} G$ où ad désigne la représentation adjointe de G sur lui-même $ad(g)(g') = gg'g^{-1}$. Il faut prendre garde que si ce fibré est bien localement au-dessus d'un ouvert U isomorphe à un produit $U \times G$ il n'est pas en général isomorphe au fibré principal P dont nous sommes partis ; c'est ainsi que si G est abélien alors G_P est nécessairement le fibré M trivial ; $G_P \to M$ est quelquefois appelé <u>le fibré de jauge</u> associé à P ; son <u>fibré des automorphismes infinitésimaux</u> $\mathcal{G}_P = P \underset{Ad}{\times} \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ désigne l'algèbre de Lie du groupe G et Ad la représentation linéaire du G dans $\mathcal{G}$.

-pour un G-fibré vectoriel $\pi : E \to M$ associé par une représentation ρ à un G-fibré principal $\pi : P \to M$, les fibrés G_P et $\mathcal{G}_P$ admettent des images G_E et $\mathcal{G}_E$ qui sont tous deux contenus dans le fibré $E^* \otimes E$ des endomorphismes de E.

En fait, décrire un fibré par un système particulier de trivialisations est trop restrictif et la bonne notion consiste à identifier deux fibrés qui sont échangés par <u>une équivalence de G-fibrés</u>, i.e. <u>un homéomorphisme</u> ϕ G-équivariant

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & P_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(il applique alors fibre dans fibre). On appelle ainsi <u>fibré trivial</u> tout fibré équivalent à un fibré produit $pr_1 : M \times G \to M$ auquel on réserve le nom de <u>fibré trivialisé</u>. Une classification des G-fibrés devient alors possible (voir [12] pour des détails et des exemples).

Nous en donnons l'illustration suivante. Remarquons d'abord que tout fibré sur un espace contractible est trivial. Comme les sphères S^n s'obtiennent par recollement le long de l'équateur de deux disques, la classification des G-fibrés sur S^n peut se décrire en termes des composantes connexes d'applications de l'équateur S^{n-1} dans le groupe G, autrement dit par le groupe d'homotopie $\pi_{n-1}(G)$. Le cas particulier des SU_2 fibrés sur S^4 est spécialement intéressant puisque le groupe SU_2 s'identifie au groupe S^3 des quaternions unités de $\mathbb{R}^4$. Les SU_2-fibrés sur S^4 sont donc classifiés par un entier relatif, le degré de l'application de S^3 dans S^3 par laquelle on effectue le recollement de deux trivialisations le long de l'équateur.

Après ce préambule un peu long pour décrire le cadre dans lequel la théorie de Yang-Mills se développe, nous en arrivons maintenant aux objets centraux de la théorie : les <u>dérivations covariantes</u> ou <u>G-connexions</u>, dont nous donnons une définition maintenant dans le cas des fibrés vectoriels. Une <u>connexion</u> D est un opérateur différentiel du 1er ordre appliquant l'espace $\Omega^0(M,E)$ des sections du fibré vectoriel $\pi : E \to M$ dans l'espace $\Omega^1(M,E)$ des 1-formes à valeurs dans E tel que, pour toute fonction f sur M et toute section s de E (i.e. une application de M dans E telle que $\pi \circ s = Id_M$), $D(fs) = f\,D\,s + df \otimes s$, autrement dit dont le symbole principal est l'identité de $T^*M \otimes E$. On dit que D est une <u>G-connexion</u> si les structures supplémentaires définies par G dans les fibres sont préservées par D. Ainsi, si G définit un produit scalaire h dans les fibres, on demande que, pour toute section s de E, $d(h(s,s)) = 2h(Ds,s)$.

(Une notion équivalente peut être introduite dans le cadre des fibrés principaux ; nous l'omettrons, voir par exemple [13]).

On peut noter que toute trivialisation d'un fibré vectoriel sur un ouvert U définit une G-connexion en différentiant les sections comme si elles étaient à valeurs dans un espace vectoriel fixe. La nécessité d'introduire le concept de G-connexion provient justement de ce que les notions de dérivations obtenues à partir de deux trivialisations ne coïncident pas en général.

Si l'expression d'une section s dans une trivialisation au-dessus d'un ouvert de coordonnées (x^i) est $s(m) = s^\alpha(m)\,\varepsilon_\alpha(m)$ (où α varie de 1 au rang du fibré), alors l'expression locale de Ds est

$$(Ds)(m) = \sum_{\substack{i=1\\ \alpha=1}}^{n,k} \left(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^{k} A^\alpha_{i\beta}\, s^\beta\right) dx^i \otimes \varepsilon_\alpha$$

où les symboles A représentant la connexion dans cette trivialisation sont des applications de U dans $T^*U \otimes E$ (puisque D et D' ont par définition même symbole principal), donc un champ de 1-formes à valeurs dans $E^* \otimes E$. La G-invariance de D et D' fait de D-D' une section de $T^*M \otimes \mathfrak{g}_E$.

On voit ainsi que l'espace $\mathcal{C}(M,E)$ des G-connexions sur E est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel $\Omega^1(M,\mathfrak{g}_E)$ des 1-formes à valeurs dans le fibré $\mathfrak{g}_E \to M$.

En revenant sur ce que nous avons dit à propos d'une trivialisation sur un ouvert U, nous noterons D^U la dérivation covariante qu'elle définit de telle sorte que l'expression locale $A(D)^U$ de D est caractérisée par

$$D - D^U = A(D)^U$$

s'identifie donc à une 1-forme sur U à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$.

De la même façon que la dérivation ordinaire pour les fonctions à valeurs vectorielles se globalise sur une variété en la <u>différentielle extérieure</u> agissant sur les formes différentielles extérieures, une connexion D sur un fibré E donne naissance à une <u>différentielle extérieure des formes différentielles extérieures à valeurs dans E</u>. Pour une k-forme décomposée à valeurs dans E, soit $\omega = \alpha \otimes s$ où α est une k-forme différentielle ordinaire sur M et s une section de E, on pose

$$d^D\omega = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \wedge Ds$$

où le dernier produit extérieur rend $\alpha \otimes Ds$ antisymétrique en ses $(k+1)$ premiers arguments

On pose $R^D = (d^D)^2$ qu'on nomme <u>la courbure de la G-connexion</u> D. Puisque, pour toute section s de E, $d^D(d^D s)$ est une 2-forme différentielle extérieure sur M à valeurs dans E et que $d^2 = 0$ (ce qui implique que $R^D(fs) = f\,R^D(s)$ pour toute fonction f sur M, R^D apparaît comme une section de $\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E$. La G-invariance de D implique en fait que $R^D \in \Omega^2(M,\mathfrak{g}_E)$ comme nous allons le voir sur l'expression locale dans une trivialisation : si

$$R^D = (R^D)_{ij}{}^{\alpha}{}_{\beta}\; dx^i \wedge dx^j \otimes \varepsilon^{*\beta} \otimes \varepsilon_\alpha,$$

$$(R^D)_{ij}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial A_i{}^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j{}^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^i} + [A_i, A_j]^{\alpha}_{\beta}$$

où $[A_i, A_j]^{\alpha}_{\beta}$ désigne la composante ${}^{\alpha}_{\beta}$ du crochet dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de A_i et A_j, qui peut encore s'exprimer

$$\sum_{\gamma=1}^{k} (A_i{}^{\alpha}{}_{\gamma}\, A_j{}^{\gamma}{}_{\beta} - A_j{}^{\alpha}{}_{\gamma}\, A_i{}^{\gamma}{}_{\beta}).$$

La formule fondamentale consiste à étudier la variation de la courbure lorsqu'on change la connexion. Si $D' - D = A$, alors $R^{D'} - R^{D} = d^{D}A + [A \wedge A]$.

On peut remarquer que la formule locale donnée précédemment est un cas particulier, à ceci près que la connexion D^{U} a pour courbure 0.

Il est important de souligner que, dès que le groupe G n'est pas abélien, l'expression locale de R^{D} est un opérateur différentiel du 1er ordre quasi-linéaire présentant des termes quadratiques d'ordre 0.

D'un point de vue analytique, il est déjà intéressant de voir comment se comporte l'application $R : D \mapsto R^{D}$ de $\mathcal{C}(M,E)$ dans $\Omega^2(M,\mathcal{G}_E)$ lorsque D a une régularité plus faible, par exemple lorsque D appartient à $\mathcal{C}_1^{p}(M,E)$, l'espace des connexions qui sont localement de classe de Sobolev L_1^{p}. L'application R est continue dès que $2p \geq n$ de telle sorte que, pour D de classe de Sobolev H^1, R^{D} n'est L^2 qu'en dimension 2, 3 et 4. La preuve se fait à partir de l'expression locale de la courbure par rapport à la connexion d'une trivialisation et les théorèmes d'inclusion de Sobolev (cf [17]).

II - LA FONCTIONNELLE DE YANG ET MILLS

Nous sommes maintenant en mesure de définir la fonctionnelle de Yang-Mills, soit $\mathcal{YM}: \mathcal{C}(M,E) \to \mathbb{R}$, définie par

$$\mathcal{YM}(D) = \frac{1}{2} \int_M \| R^{D} \|_g^2 \, v_g$$

où la norme de la courbure R^{D} est prise en utilisant un produit scalaire sur M et un produit scalaire sur $\mathcal{G}$ (puisqu'en chaque point m, R^{D} est un élément de $\Lambda^2 T_m^* M \otimes \mathcal{G}$) et où v_g désigne l'élément de volume défini par le produit scalaire g.

Ainsi la fonctionnelle dépend de la donnée sur M d'un G-fibré $\pi : E \to M$, d'un produit scalaire sur M et d'une métrique sur le fibré $\mathcal{G}_E$. Il est raisonnable de supposer que cette dernière métrique provient d'une métrique bi-invariante sur le groupe G. Comme il a été mentionné précédemment, M représente l'espace-temps physique ; on peut penser que le produit scalaire sur M sera pris lorentzien. Pour des raisons liées aux méthodes de quantification actuellement utilisées, il n'en est en fait rien et g est le plus souvent une métrique riemannienne sur M. Cette hypothèse a des conséquences que nous verrons ultérieurement sur la nature analytique du système des équations de Yang-Mills.

Pour être sûr que la fonctionnelle soit bornée avec des données lisses, il faut supposer soit que M est compacte soit que la courbure décroît assez vite à l'infini.

Le comportement de la fonctionnelle par dilatation de la métrique (i.e. l'opération qui consiste à remplacer g par $\lambda^2 g$) prendra dans la suite une grande importance. Une façon de le voir est de détailler l'intégrand de la fonctionnelle

$$\| R^D \|_g^2 \, v_g = g^{ik} g^{jl} R_{ij\,\beta}^{\ \ \alpha} R_{kl\,\alpha}^{\ \ \beta} \sqrt{\det(g_{ij})}$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}).

(On a supposé pour simplifier que la métrique sur $\mathcal{G}$ était la métrique de Killing qui est bien une métrique biinvariante pour tous les groupes linéaires semi-simples). Il est alors facile de voir que

$$\| R^D \|_{\lambda^2 g} \, v_{\lambda^2 g} = \lambda^{n-4} \, \| R^D \|_g^2 \, v_g .$$

Ainsi il apparaît qu'en dimension 4 la fonctionnelle ne dépend que de la classe conforme de la métrique, point sur lequel nous revenons ultérieurement.

De la remarque faite précédemment sur la régularité de la courbure par rapport à la connexion, il ressort que la fonctionnelle est finie pour toute connexion de classe de Sobolev L_1^p dès que $2p \geq n$, donc pour toute connexion de classe de Sobolev H^1 pour $n = 4$.

III - LE SYSTEME DES EQUATIONS DE YANG-MILLS

L'objet de la théorie de Yang-Mills est l'étude des points critiques de la fonctionnelle $\mathcal{YM}$.

Ils satisfont l'équation d'Euler-Lagrange de ce problème de calcul des variations que nous dérivons maintenant. De la formule générale de dépendance de la courbure par rapport à la connexion suit

$$\frac{d}{dt} R^{D+tB}{}_{|t=0} = d^D B \ ,$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \mathcal{YM}(D+tB)_{|t=0} = \int_M (d^{D*} R, B)_g \, v_g$$

où d^{D^*} désigne l'adjoint de la différentielle extérieure des 2-formes à valeurs dans E définie au moyen de D.

Nous obtenons donc le système des équations de Yang-Mills

$$d^{D^*} R^D = 0$$

Si D satisfait ce système d'équations, nous dirons que D est une connexion de Yang-Mills.

Il est intéressant de regarder de plus près l'expression analytique de ce système dans une trivialisation en utilisant l'expression de R^D par rapport à l'expression locale de D que nous notons A. Nous avons

$$(d^{D^*}R^R)_{i\ \beta}^{\ \alpha} = - \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} \frac{\partial^2 A_{i\ \beta}^{\ \alpha}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 A_{j\ \beta}^{\ \alpha}}{\partial x^i\ \partial x^k} + (\text{termes bilinéaires en } A \text{ et } (\frac{\partial A}{\partial x^i})$$

$$+ \text{ termes cubiques en } A).$$

Ce système n'est pas elliptique à cause de la présence du second terme du second ordre. (Remarquons que si g était une métrique de Lorentz de signature $(+,\ldots,+,-)$, le système ne serait pas hyperbolique pour la même raison). Nous allons voir que cette difficulté analytique ne fait que refléter la géométrie du problème. En effet le système des équations de Yang-Mills ne peut être elliptique car il possède un groupe d'invariance de dimension infinie, le fameux groupe de jauge.

En effet le groupe $\mathcal{G}_E$ des sections du fibré G_E des G-automorphismes de E opère sur l'espace $\mathcal{C}(M,E)$ des G-connexions de la façon suivante : si γ appartient à G_E et D à $\mathcal{C}(M,E)$, on définit la G-connexion D^γ par

$$D^\gamma s = \gamma^{-1}(D(\gamma(s))).$$

Il est alors facile de voir que la courbure de D n'est autre que

$$R^{D^\gamma} = \gamma^{-1} \circ R \circ \gamma\ ,$$

de sorte que, si G n'est pas abélien, R^{D^γ} peut ne pas être lisse même si R^D l'est, quand γ ne l'est pas. Par suite

$$\mathcal{YM}(D) = \mathcal{YM}(D^\gamma)\ ,$$

ceci dès que l'action de G est orthogonale (dans le calcul de la norme dans la fibre, on utilise en effet que $\gamma^{-1} = \gamma^t$). Il suit alors trivialement que l'orbite d'une connexion de Yang-Mills est formée de connexions de Yang-Mills. On vérifie aussi facilement qu'en une connexion D, l'espace tangent à cette orbite s'identifie à l'espace $d^D(\Omega^0(M,E))$ qui est de dimension infinie. Tous les éléments de cet espace sont bien sûr dans le noyau du linéarisé en la connexion D du système des équations Yang-Mills, qui ne peut donc être elliptique.

En fait on peut voir que toutes les directions caractéristiques sont fournies par cette construction . C'est l'invariance géométrique du système qui lui dicte son comportement analytique.

Là aussi il est intéressant de considérer le groupe de jauge lorsqu'on affaiblit la régularité de la connexion. Il est facile de voir que, pour agir sur $\mathcal{C}^p_k$, une transformation de jauge γ doit appartenir à $(G_E)^p_{k+1}$ le groupe des sections de classe de Sobolev L^p_{k+1} du fibré G_E.

On peut travailler sur l'expression locale de D dans une trivialisation au-dessus de U. Nous avons

$$D^\gamma = \gamma^{-1} \circ D \circ \gamma = \gamma^{-1} \circ (D^U + A(D)^U) \circ \gamma = D^U + \gamma^{-1}(D^U\gamma) + \gamma^{-1} \circ A(D)^U \circ \gamma.$$

On voit donc que l'expression locale de D^γ est donnée par

$$A(D^\gamma)^U = \gamma^{-1}(D^U\gamma) + \gamma^{-1} \circ A(D)^U \circ \gamma.$$

La propriété importante est alors la suivante (cf [17]) :"Le groupe de jauge $(G_E)^p_2$ est un groupe de Lie généralisé si $2p > n$. L'action de $(G_E)^p_2$ sur $\mathcal{C}^p_k$ est alors lisse et même on peut assurer que γ est de classe de Sobolev L^p_2 dès que D et D^γ sont de classe de Sobolev L^p_1".

La preuve utilise la comparaison de D et D^γ à leur expression dans une carte $D = D^U + A(D)^U$ et $D^\gamma = D^U + A(D^\gamma)^U$. On a en fait

$$D^U \gamma = \gamma \circ A(D)^U - A(D^\gamma)^U \circ \gamma .$$

On utilise alors les théorèmes sur la régularité du composé comme on les trouve dans [5] ou [10] par exemple.

Il est intéressant de noter qu'en dimension 4 les transformations de jauge qui opèrent sur les connexions de classe de Sobolev H^1 sont de classe de Sobolev H^2. Nous sommes donc dans le cas-limite des inégalités de Sobolev et les transformations de jauge qui sont de classe L^p pour tout p ne sont pas continues. Comme nous l'avons vu précédemment, la classification des fibrés utilise de façon essentielle des transformations de jauge bicontinues dans le cadre de la théorie de l'homotopie. Cette absence de continuité des transformations de jauge a priori permises complique le problème analytique considérablement comme nous le verrons ultérieurement.

Il y a encore une identité qui joue un rôle important dans la théorie de Yang-Mills, la seconde identité de Bianchi, qui dit que pour toute connexion D sur un fibré

$$d^D R^D \equiv 0 .$$

(Une preuve peut en être donnée en revenant à la définition de $R^D = d^D \circ d^D$ et en méditant sur l'identité $d^D \circ (d^D \circ d^D) - (d^D \circ d^D) \circ d^D = 0$).

C'est à cause d'elle que les connexions de Yang-Mills sont quelquefois appelées connexions à courbure harmonique. Il faut souligner que, dès que le groupe G n'est pas abélien, la courbure est vraiment une 2-forme à valeurs vectorielles. Le système auquel doit satisfaire R^D est bien du type des 2-formes harmoniques, mais il est non-linéaire ; aussi dit-on quelquefois que la théorie de Yang-Mills est une théorie de Hodge non-linéaire.

Devant ce système, deux stratégies sont possibles :

i) tirer partie de ce que le système des équations de Yang-Mills est elliptique par rapport à la courbure ; comme l'application qui à une connexion associe sa courbure est compliquée (en particulier il est difficile de savoir si une 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}_E$ est la courbure d'une connexion), cette méthode a surtout porté ses fruits pour des théorèmes de non-existence.

ii) restaurer l'ellipticité du système sur la connexion, cela nécessairement au prix d'une perte de symétrie ; cette méthode a été récemment couronnée de succès et c'est la voie suivie par K. Uhlenbeck par exemple dans [17] et [18].

IV - LE SYSTEME DES EQUATIONS SUR LA COURBURE

Nous n'allons donner qu'un commentaire bref sur ce point de vue. Il a permis d'obtenir par exemple les résultats suivants : non-existence de minima locaux pour la fonctionnelle pour tout G-fibré sur la sphère S^n munie de sa métrique standard pour $n \geq 5$ ou de minima locaux non globaux sur la sphère S^4 munie de sa structure conforme standard ou tout autre espace riemannien homogène orientable de dimension 4 comme $S^1 \times S^3$ par exemple pourvu que le groupe G ne soit pas trop gros ($G = SU_2$, U_2 ou SU_3) (voir [1] et [2]).

Un autre résultat fait appel à des techniques plus analytiques comme les inégalités de Sobolev avec leurs meilleures constantes. Il est dû à Min'O o et J. Dodziuk (voir [9] et [3]).

Les propriétés spécifiques de la dimension 4 ont une traduction particulière au niveau de la courbure. L'application $*$ de Hodge qui à une k-forme extérieure associe une (n-k)-forme extérieure sur toute variété riemannienne orientée devient en dimension 4 un endomorphisme de $\Lambda^2 T^* M$. En fait, si (e_i) est une base orthonormée, nous avons

$$*(e_i^* \wedge e_j^*) = e_k^* \wedge e_\ell^*$$

où (i,j,k,l) est une permutation paire de (1,2,3,4), de telle sorte que $*$ est alors une involution. Nous pouvons donc décomposer toute 2-forme extérieure ω en ses parties positive et négative ω^+ et ω^-, respectivement vecteurs propres pour les valeurs propres +1 et -1 de l'opérateur de Hodge $*$. Nous notons $\Lambda^2 T^*M = \Lambda^+ T^*M \otimes \Lambda^- T^*M$ cette décomposition qui joue dans la théorie de Yang-Mills de dimension 4 un rôle essentiel à cause du fait suivant : sur une variété compacte M de dimension 4 et pour tout G-fibré E sur M, il est possible d'exprimer un invariant topologique associé au fibré, son nombre de Pontryaguine $p_1(E)$, au moyen de la courbure d'une connexion arbitraire D sur lui, par la formule

$$8\pi^2 p_1(E) = \int_M \{\| R^{D+}\|_g^2 - \|R^{D-}\|_g^2\} v_g$$

Cette relation, qui malgré les apparences ne contient pas la métrique sur M, provient de la théorie de Chern-Weil des classes caractéristiques. Elle peut être conçue comme une contrainte sur les 2-formes différentielles extérieures à valeurs dans $\mathcal{G}_E$ qui peuvent être la courbure d'une connexion sur E. Dans le cas de SU_2-fibré sur S^4, $p_1(E)$ s'identifie au degré de l'application de S^3 dans S^3 dont nous avons parlé dans le paragraphe I.

Comme $\mathcal{YM}(D) = \frac{1}{2} \int_M \{\| R^{D+}\|_g^2 + \| R^{D-}\|_g^2\} v_g$, nous voyons que cette relation fournit une borne inférieure de nature topologique à la fonctionnelle

$$|4\pi^2 p_1(E)| \leq \mathcal{YM}(D).$$

De plus si l'égalité a lieu, on voit que, suivant le signe de $p_1(E)$, soit $R^{D+} = 0$, soit $R^{D-} = 0$. On dit alors que la connexion est respectivement anti-autoduale ou autoduale. Puisqu'alors la fonctionnelle atteint son minimum absolu, de telles connexions sont nécessairement des connexions de Yang-Mills. Elles satisfont un système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre, ce qui est une illustration du fait que les solutions minimisantes de problèmes variationnels vérifient souvent des propriétés particulières de régularité.

C'est la recherche des solutions autoduales qui peut faire l'objet, si (M,g) vérifie elle-même une propriété particulière ("être demi-conformément plate"), d'une traduction en termes holomorphes grâce à la transformation de Penrose. Appliquée à S^4 munie de sa classe conforme standard, cette méthode nécessite l'étude de certains fibrés dits stables sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$.

V - THEOREMES D'EXISTENCE ET DE REGULARITE DE CONNEXIONS DE YANG-MILLS

Pour pouvoir étudier la régularité des connexions de Yang-Mills, on peut localiser le problème et choisir une jauge particulière dans laquelle le système deviendra elliptique.

Une méthode possible consiste à minimiser parmi les transformations de jauge γ définies sur un ouvert U la fonctionnelle auxiliaire

$$J(\gamma) = \frac{1}{2} \int_V |\gamma^{-1} D\gamma + \gamma^{-1} A(D)^U \gamma|^2$$

Il est en fait facile de trouver un extrêmum γ_0 pour J. La jauge γ_0 ainsi trouvée est dite de Hodge ou harmonique : elle vérifie $d^{D^*} A_{\gamma_0} = 0$. Il faut remarquer que γ_0 peut être vue comme une sorte d'application harmonique à valeurs dans le groupe de Lie G puisque la fonctionnelle a comme terme dominant une intégrale de Dirichlet. La conséquence importante est un contrôle de l'expression locale de la connexion harmonique du type

$$\| A(D)^U \|_{1,p} \leq C(n) \| R^D \|_{0,p}$$

dès que $2p > n$.

On retombe bien sûr sur le fait qu'en dimension 4 la fonctionnelle de Yang-Mills est justement a priori insuffisante pour contrôler l'expression locale de D. C'est là que réside une des principales difficultés du problème.

Grâce à ce théorème d'existence de jauges harmoniques, la régularité des connexions de Yang-Mills suit facilement (cf [17]) puisque dans cette jauge particulière le terme qui empêchait le système des équations de Yang-Mills d'être elliptique disparaît.

Les jauges harmoniques (en fait cette fois solutions de problèmes de Neuman sur des domaines annulaires) trouvent une belle application dans la preuve du théorème de singularité non essentielle suivant dû à K. Uhlenbeck (cf [18]) :

"Soit D une connexion de Yang-Mills sur un G-fibré défini sur la boule pointée $B^4-\{0\}$ telle que $\mathcal{YM}(D) = \frac{1}{2}\int_B \|R^D\|_g^2 v_g$ soit finie. Alors D se prolonge en une connexion de Yang-Mills sur B^4 entière pour une extension à B^4 du fibré dont nous sommes partis".

Ce théorème a une extension à la dimension n à condition de remplacer la fonctionnelle de Yang-Mills par la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la courbure.

Si on le combine avec le fait qu'en dimension 4 la fonctionnelle de Yang-Mills ne dépend que de la structure conforme, on obtient le fait intéressant suivant : toute connexion de Yang-Mills D sur $\mathbb{R}^4$ telle que $\int_{\mathbb{R}^4} \|R^D\|^2 < +\infty$ provient en fait d'une connexion de Yang-Mills sur S^4 (ceci s'appuie sur le fait que la métrique canonique sur $S^4-\{0\}$ est conformément équivalente à la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^4$).

La méthode directe du calcul des variations a été appliquée globalement avec un certain succès par S. Sedlacek (cf [11]). Malheureusement, s'il est bien possible de trouver une connexion minimisante de classe de Sobolev H^1, il n'est pas possible d'assurer que cette connexion se trouve bien être sur le fibré considéré au départ. En effet la contrainte intégrale qui donne le nombre de Pontyaguine n'est pas nécessairement préservée par limite faible. Dans le cas d'un groupe simple comme SU_2, où cet invariant topologique est le seul, la connexion minimisante peut se trouve être une connexion triviale sur le fibré trivial ! Si le groupe n'est pas simple, il peut y avoir plus d'invariants: pour U_2 par exemple, il y a un autre invariant, la première classe de Chern, qui est une classe cohomologie de dimension 2. Dans [11], S. Sedlacek montre que cet invariant là est préservé par passage à la limite faible grâce à un modèle d'apparition de singularité dans le passage à la limite.

Le résultat d'existence le plus général est dû à C. Taubes qui a obtenu le résultat suivant (cf [14]) : "Si M est une variété de dimension 4 compacte orientable dont la forme d'intersection est positive, tout fibré à classe de Pontryaguine positive admet une connexion à courbure autoduale , donc minimisante, ceci pour toute classe conforme de métriques riemanniennes".

Rappelons que la forme d'intersection d'une variété compacte de dimension 4 est la forme quadratique définie sur l'espace de cohomologie $H^2(M,\mathbb{R})$ (elle est même définie sur $H^2(M, \mathbb{Z})$) qui peut se représenter grâce à l'isomorphisme de de Rham comme $(\alpha,\beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ où α et β sont des 2-formes différentielles extérieures fermées.

La preuve de ce théorème se fait par des techniques d'analyse différentes de celles présentées précédemment puisque l'argument principal est un théorème des fonctions implicites.

De ce point de vue, l'hypothèse faite sur la forme d'intersection permet de s'assurer de l'inversibilité du problème linéarisé.

En fait, plus récemment (cf [16]), C. Taubes a étendu son résultat au cas général. Les fibrés pour lesquels l'existence d'une connexion auto-duale est assurée doivent avoir un nombre de Pontryaguine assez grand par rapport au nombre de directions négatives de la forme d'intersection.

S'appuyant sur les résultats de C. Taubes et K. Uhlenbeck, S.K. Donaldson (cf [4]) a réussi à décrire complètement l'espace des modules des connexions minimales d'une variété compacte orientable de dimension 4 à forme d'intersection positive. C'est grâce à cette description qu'il obtient un résultat important et inattendu de topologie différentielle sur la nature (sur $\mathbb{Z}$) de la forme d'intersection. Un des corollaires les plus surprenants est d'assurer l'existence d'au moins deux structures différentielles non isomorphes sur $\mathbb{R}^4$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON, Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys. 79 (1981), 189-230.

[2] J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON, Yang-Mills theory : its physical origin and differential geometric aspects, in Seminar on Differential Geometry edited by S.T. Yau, Annals of Mathematical Studies N° 102, Princeton University Press, Princeton, (1982).

[3] J. DODZIUK, MIN'OO, An L^2- isolation theorem for Yang-Mills fields over complete manifolds, Compositio Mathematica 47 (1982), 165-169.

[4] S.K. DONALDSON, An application of gauge theory to four dimensional topology, à paraître au J. of Differential Geometry.

[5] D.G. EBIN, Espace des métriques riemanniennes et mouvement des fluides via les variétés d'applications, Notes de Cours, Ecole Polytechnique, (1972).

[6] N. HITCHIN, The Yang-Mills equations and the topology of 4-manifolds, Exposé n°606 au séminaire Bourbaki, (1983).

[7] J. ILIOPOULOS, Unified theories of elementary particle interactions, Contemp. Phys. 21 (1980), 159-183.

[8] A. JAFFE, C. TAUBES, Vortices and Monopoles, Birkhäuser, Boston, (1980).

[9] MIN'OO, An L^2-isolation theorem for Yang-Mills fields, Composition Mathematica 47 (1982), 153-163.

[10] R.S. PALAIS, Foundations of global non-linear analysis, Benjamin, New York (1968).

[11] S. SEDLACEK, A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds, Comm. Math. Phys.

[12] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton University Press, Princeton, (1951).

[13] S. STERNBERG, Lectures on differential geometry, Prentice Hall, , (1964).

[14] C. TAUBES, Self-dual Yang-Mills connections on non self-dual 4-manifolds, à paraître au J. of Differential Geometry.

[15] C. TAUBES, The existence of a non-minimal solution to the SU_2 - Yang-Mills-Higgs equation on $\mathbb{R}^3$, Parts I-II, Comm. Math. Phys. 86 (1982), 299-320.

[16] C. TAUBES, Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, Preprint, Harvard University.

[17] K.K. UHLENBECK, Connections with L^p-bounds on curvature, Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31-42.

[18] K.K. UHLENBECK, Removable singularities in Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys. 83 (1982), 11-29.