J. Nourrigat

Hypoellipticité maximale pour le système de Cauchy-Riemann induit

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 10, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

HYPOELLIPTICITE MAXIMALE POUR LE SYSTEME DE CAUCHY-RIEMANN INDUIT

par J. NOURRIGAT

Exposé n° X

19 Janvier 1982

1. INTRODUCTION

Cet exposé résume une série d'articles à paraître, pour la plupart en collaboration avec B. Helffer, et consacrés (entre autres) au problème suivant : étant donné un système $(L_1 \ldots L_p)$ de champs de vecteurs complexes, C^∞, dans un ouvert Ω de R^d, à quelle condition a-t-on l'implication suivante, pour tout s réel et pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$:

$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ \\ L_j u \in H^s_{loc}(\omega) \quad (j = 1,\ldots,p) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{Re}\, L_j)u \in H^s_{loc}(\omega) \\ \\ (\mathrm{Im}\, L_j)u \in H^s_{loc}(\omega) \quad (j = 1,\ldots,p). \end{array}\right.$$

On supposera que les 2p champs de vecteurs réels $X_j = \mathrm{Re}\, L_j$ et $Y_j = \mathrm{Im}\, L_j$ $(j = 1,\ldots,p)$ vérifient la condition de Hörmander $(C.H.)_r$ (où $r \geqslant 2$), c'est-à-dire que le système des commutateurs itérés, de longueur $\leqslant r$, des champs X_j et Y_j, est un système elliptique. Etant donné un point x_o de Ω, on dira alors que le système (L_j) est hypoelliptique maximal en x_o, s'il existe un voisinage V de x_o dans lequel l'implication (1) est vérifiée. Cette terminologie est justifiée car, d'après un résultat de Rothschild-Stein [9], la propriété (1) et $(C.H.)_r$ entraînent bien l'hypoellipticité du système (L_j) avec perte de $1 - \frac{1}{r}$ dérivées.

Le problème de caractériser l'hypoellipticité maximale est déjà résolu si par p = 1 (par Egorov [3]) ou r = 2 (exposé à Saint-Jean-de-Monts, 1980, utilisant les techniques de Hörmander [6]). Ces résultats sont encore valables dans le cas pseudo-différentiel. Dans ces deux cas, l'hypoellipticuté maximale équivaut à l'hypoellipticité avec perte de $1 - \frac{1}{r}$ dérivées. On sait que cette équivalence est fausse en général (cf. exposé de H. M. Maire, Saint-Jean-de-Monts, 1980).

Dans cet exposé, nous allons énoncer :

1. Une condition nécessaire (Théorème 5), valable dans le cas général, et formulée, selon les idées de V. V. Grushin [5] et C. Rockland, d'une manière qui met en évidence le lien qui existe entre ce problème et la théorie des représentations de groupes de Lie nilpotents (lien mis aussi en lumière, dans des cas particuliers, par Rothschild-Stein [9] et Rothschild [8]). L'analogue du théorème 5 est encore valable si l'on remplace le système (L_j) par des opérateurs s'exprimant de manière polynomiale par rapport aux champs X_j et Y_j (comme le $\square_b$). Par contre, nous ignorons si la réciproque du théorème 5 est vraie en général (elle l'est dans certains cas particuliers énumérés au § 4), et si le théorème 5 s'étend au cas pseudo-

différentiel (en dehors des cas $r = 2$ et $p = 1$ mentionnés ci-dessus).

2. Une formulation plus explicite de la condition précédente dans le cas particulier où le système (L_j) est le système de Cauchy-Riemann induit $\bar{\partial}_b$ sur une hypersurface de C^{p+1}. Dans ce cas, la condition est nécessaire et suffisante. Si $r = 2$, la condition, bien connue dans ce cas, est que la matrice de Lévi ait au moins une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative.

Au § 2, on détaille le cas du $\bar{\partial}_b$ sur une hypersurface tubulaire de C^{p+1}. La formulation explicite de la condition, dans ce cas, est le fruit de dissussions avec H. M. Maire. Le cas du $\bar{\partial}_b$ en général est traité au § 3, et la condition nécessaire générale est énoncée au § 4.

Remarquons que le système (L_j) est hypoelliptique maximal en x_o si, et seulement si, il existe un voisinage V de x_o et une constante $C > 0$ tels que

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{p} \|X_j u\|^2 + \|Y_j u\|^2 \leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{p} \|L_j u\|^2 + \|u\|^2\Big) \quad \forall\, u \in C_o^\infty(V)$$

(normes dans $L^2(\Omega)$).

2. CAS DU $\bar{\partial}_b$ SUR UNE HYPERSURFACE TUBULAIRE DE C^{p+1}

Si M est une hypersurface tubulaire de C^{p+1}, on peut supposer qu'elle est définie localement par une équation de la forme suivante :

$$(3) \qquad M = \{z \in C^{p+1},\ x_{p+1} = f(x_1,\dots,x_p)\}$$

où f est une fonction C^∞ dans un ouvert de R^p, à valeurs réelles. On peut idendifier M à un ouvert Ω de $R^p_x \times R^p_y \times R_t$, grâce au paramétrage

$$(4) \qquad (x,y,t) \to z(x,y,t) = (x_1 + iy_1,\dots,x_p + iy_p,\ f(x) + it)$$

Le système de Cauchy-Riemann induit $\bar{\partial}_b$ s'écrit, dans ce système de coordonnées : $\bar{\partial}_b = (L_1,\dots,L_p)$ avec $L_j = X_j + iY_j$ et

$$(5) \qquad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad\qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}$$

Ces champs vérifient la condition $(C\text{-}H)_r$ en un point $z_o = z(x_o,y_o,t_o)$ (selon la terminologie classique, on dit que z_o est un point de type r) si, et seulement si, il existe un voisinage V de x_o et une constante $C > 0$ tels que

(6) $$\sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant r} |f^{(\alpha)}(x)| \geqslant C \qquad \forall\, x \in V$$

Autrement dit, pour tout z assez voisin de z_o, l'ordre de contact de M avec son plan tangent en z est $\leqslant r$. La condition que nous allons énoncer porte sur la position relative de M et ce plan tangent .

S'il existe $x_1 \in V$ tel que la fonction

(7) $$\mathbb{R}^p \ni h \rightarrow \Phi(x_1,h) = f(x_1 + h) - f(x_1) - f'(x_1).h$$

admette un minimum local à l'origine, alors le système $\bar{\partial}_b$ n'est hypoelliptique dans aucun voisinage de $z(x_1,y_o,t_o)$. Il suffit de considérer la fonction suivante (définie dans un voisinage de (x_1,y_o,t_o))

(8) $$u(x,y,t) = [f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x-x_1) + i(t - f'(x_1).y)]^{1/2}$$

qui vérifie $L_j u = 0$, mais n'est pas C^∞ . Comme la fonction $h \rightarrow \Phi(x,h)$ ne doit pas avoir non plus de maximum local, on doit avoir , si x est assez voisin de x_o et $d > 0$ assez petit :

(9) $$\sup_{|h| \leqslant d} \varepsilon\Phi(x,h) > 0 \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Si f est analytique, M. S. Baouendi et F. Trèves ont démontré un résultat de régularité analytique sous la seule condition (9). Pour l'hypoellipticité maximale, il nous faut renforcer cette condition (9), ce qui nous conduit à l'énoncé du

Théorème 1 : Si $z_o = z(x_o,y_o,t_o)$ est un point de type r de la variété M définie par (3), il y a équivalence entre :

i) Le système $\bar{\partial}_b$ est hypoelliptique maximal en z_o .

ii) Il existe un voisinage V de x_o et deux constantes $C_o > 0$ et $d_o > 0$ tels que l'inégalité suivante

(10) $$\sup_{|h| \leqslant d} \varepsilon\, \Phi(x,h) \geqslant C_o \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant r} |f^{(\alpha)}(x)|\, d^{|\alpha|}$$

soit vérifiée pour $\varepsilon = \pm 1$, pour tout $x \in V$, et pour tout $d \in \,]0,d_o]$.

Nous allons détailler la preuve de l'implication i) ⇒ ii), pour montrer comment s'introduit un ensemble d'opérateurs à coefficients polynomiaux qui sera généralisé au § 4.

On raisonne par l'absurde, en supposant que i) est vérifiée, et que ii) ne l'est pas. Puisque ii) n'est pas vérifiée, il existe des suites (x_n) dans R^p, (ε_n) et (d_n) dans R^+ telles qu'on ait (en prenant par exemple $\varepsilon = +1$ dans ii) :

$$(11) \qquad x_n \to x_o, \quad d_n \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

$$(12) \qquad \sup_{|h| \leq d_n} \Phi(x_n, h) \leq \varepsilon_n \sum_{2 \leq |\alpha| \leq r} |f^{(\alpha)}(x_n)| d_n^{|\alpha|}$$

Si l'on pose $\rho_n = [\sum_{2 \leq |\alpha| \leq r} |f^{(\alpha)}(x_n)| d_n^{|\alpha|}]^{-1}$, les suites $\rho_n d_n^{|\alpha|} f^{(\alpha)}(x_n)$ $(2 \leq |\alpha| \leq r)$ sont bornées. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer qu'elles admettent des limites ℓ_α $(2 \leq |\alpha| \leq r)$. Posons :

$$(13) \qquad P(x) = \sum_{2 \leq |\alpha| \leq r} \ell_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

Le polynôme P est non nul et on voit facilement, d'après (12) et (6), qu'il admet un maximum local à l'origine. Considérons les p champs de vecteurs $\tilde{L}_j = \tilde{X}_j + i\tilde{Y}_j$ définis par

$$(14) \qquad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad\qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}$$

On montre que si i) est vérifiée, (donc l'inégalité (2) aussi), on a, pour tout $\psi \in C_o^\infty(R^{2p+1})$, l'inégalité suivante (avec la même constante $C > 0$ que dans (2)) :

$$(15) \qquad \sum_{j=1}^{p} \|\tilde{X}_j\psi\|^2 + \|\tilde{Y}_j\psi\|^2 \leq C \sum_{j=1}^{p} \|\tilde{L}_j\psi\|^2$$

Pour le vérifier, il suffit d'appliquer l'inégalité (2) à la suite de fonctions :

$$(16) \qquad u_n(x,y,t) = \psi\left(\frac{x - x_n}{d_n}, \frac{y - y_o}{d_n}, \rho_n[(t - t_o) - \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_n)(y_j - y_{j_o})]\right)$$

et de faire tendre n vers l'infini. Comme les champs $\tilde{X}_j$ et $\tilde{Y}_j$ vérifient la condition de Hörmander, l'inégalité (15) entraîne l'hypoellipticité du système $(\tilde{L}_j)$.

Comme on l'a vu, c'est en contradiction avec le fait que le polynôme P admet un maximum local à l'origine. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est donc démontrée.

C'est ce même schéma de démonstration, avec une définition beaucoup plus compliquée de la suite de fonctions u_n, qui servira à démontrer le théorème 5. Pour introduire plus facilement l'énoncé de ce théorème, considérons l'ensemble des polynômes P construits par le procédé ci-dessus. On peut le définir ainsi :

Définition 2 : Pour tout $z_o = z(x_o, y_o, t_o) \in M$, désignons par L_{x_o} l'ensemble des polynômes P, à coefficients réels, à p indéterminées, de degré $\leqslant r$, tels qu'il existe des suites (x_n) dans R^p, (ρ_n) dans R et (d_n) dans R^+, telles que :

(17)
$$x_n \to x_o \ , \quad |\rho_n| \to +\infty, \quad d_n \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

(18)
$$\begin{cases} \partial_x^\alpha P(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n d_n^{|\alpha|} f^{(\alpha)}(x_n) & \text{si} \quad 2 \leqslant |\alpha| \leqslant r \\ \\ \partial_x^\alpha P(0) = 0 & \text{si} \quad |\alpha| \leqslant 1. \end{cases}$$

Résumons brièvement la preuve de l'implication ii) $\Rightarrow$ i). On voit facilement que la condition ii) équivaut à dire qu'aucun polynôme $P \in L_{x_o}$, non nul, n'admet de maximum local à l'origine. Pour tous $P \in L_{x_o}$ et $\eta \in R^p$, on définit des opérateurs différentiels dans R^p, en posant :

(19)
$$\pi_{(\eta,P)}(X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad\qquad \pi_{(\eta,P)}(Y_j) = i\left(\eta_j + \frac{\partial P}{\partial x_j}\right)$$

et, bien sûr, $\pi_{(\eta,P)}(L_j) = \pi_{(\eta,P)}(X_j) + i\, \pi_{(\eta,P)}(Y_j)$. On vérifie facilement que la condition ii) est équivalente à la condition d'injectivité iii) suivante :

iii) Pour tout $(\eta,P) \in R^p \times L_{x_o}$ tel que $(\eta,P) \neq (0,0)$ le système d'équations $\pi_{(\eta,P)}(L_j)\ \psi = 0$ n'admet aucune solution $\psi \in C^\infty(R^p)$, non nulle, dont le module admette un maximum atteint en un point.

C'est une condition analogue qui sera énoncée dans le cas général au § 4. La démonstration de l'implication iii) $\Rightarrow$ i) se fait en 2 étapes. On commence par démontrer que, si iii) est vérifiée, il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tout $(\eta,P) \in R^p \times L_{x_o}$, et pour tout $\psi \in C_o^\infty(R^p)$, on ait :

(20)
$$\sum_{j=1}^{p} \|\pi_{(\eta,P)}(X_j)\psi\|^2 + \|\pi_{(\eta,P)}(Y_j)\psi\|^2 \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{p} \|\pi_{(\eta,P)}(L_j)\psi\|^2$$

Cette première étape ne fait qu'exprimer un résultat abstrait sur les représentations unitaires irréductibles de certains groupes de Lie nilpotents (cf. exposé de B. Helffer à Saint Cast, 1979). Enfin, un argument de perturbation d'inégalités inspiré de Egorov [3] permet de montrer que l'inégalité (20) implique bien (2). L'un des éléments de la preuve est la minoration du membre de gauche de (20) par la norme de ψ dans un espace L^2 avec poids (résultat de N. Moukadem, thèse de 3ème cycle, 1981).

3. CAS DU $\bar{\partial}_b$ SUR UNE HYPERSURFACE QUELCONQUE

La condition explicite que nous allons énoncer, étant équivalente à l'hypoellipticité maximale du $\bar{\partial}_b$, est donc invariante par difféomorphisme. Cependant, nous n'avons pas pu en trouver d'interprétation géométrique. Il est probable qu'elle porte sur la position relative de l'hypersurface M et des sous-variétés complexes de codimension 1 dans C^{p+1} qui sont tangentes à M, de même que la condition de Hörmander exprime l'ordre de contact maximum de M avec ces sous-variétés.

On peut suppose que M est définie localement par

$$(21) \qquad M = \{z \in C^{p+1}, \quad x_{p+1} = f(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_p, y_{p+1})\}$$

où f est une fonction C^∞ dans un ouvert Ω de R^{2p+1}. On identifie M à cet ouvert Ω , en paramétrant M par

$$(22) \qquad R^p \times R^p \times R \ni (x,y,t) \to z(x,y,t) = (x_1 + iy_1, \dots, x_p + iy_p, f(x,y,t) + it).$$

On choisit une base $L_1, \dots, L_p$ de champs de vecteurs antiholomorphes sur M, qui s'expriment, dans ce système de coordonnées par $L_j = X_j + iY_j$, avec

$$(23) \qquad X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \beta_j(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t} \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \alpha_j(x,y,t)\frac{\partial}{\partial t}$$

où les coefficients α_j et β_j sont detérminés par les équations

$$(24) \qquad L_j(f(x,y,t) + it) = 0 \qquad j = 1, \dots, p$$

Pour tout $\zeta = \xi + i\eta \in C^p$, on désigne par $A(\zeta)$ le champ de vecteurs suivant :

(25) $$A(\zeta) = \sum_{j=1}^{p} \xi_j X_j + \eta_j Y_j$$

Soit $z_o \in M$. Il existe un voisinage V de z_o, et $k > 0$ tel que, si $\zeta \in C^p$ vérifie $|\zeta| < k$, le flot du champ de vecteurs $A(\zeta)$ définisse une application C^∞, notée $z \to \exp A(\zeta).z$ de V dans M.

Pour tout $z \in M$, on désignera par $n(z)$ un vecteur unitaire de la normale en z à M, dépendant régulièrement de z. Enfin, on désignera par P l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, à p indéterminées $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, de degré $\leqslant r$. Pour tous $z \in V$, $\zeta \in C^p$ (avec $|\zeta| < k$), et $g \in P$, on posera

(26) $$\Phi_g(z,\zeta) = n(z).(\exp A(\zeta).z - z) + \mathrm{Re}(g(\zeta) - g(0)).$$

<u>Théorème 3</u> : Soit z_o un point de type r dans M. Le système $\bar{\partial}_b = (L_1 \ldots L_p)$ est hypoelliptique maximal en z_o si et seulement si, il existe un voisinage V de z_o, et deux constantes $C_o > 0$ et $d_o > 0$ tels que l'inégalité suivante :

(27) $$\sup_{|\zeta| < d} \varepsilon \Phi_g(z,\zeta) \geqslant C_o \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant r} |\partial_\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \Phi_g(z,0)| d^{|\alpha|+|\beta|}$$

soit vérifiée pour $\varepsilon = \pm 1$, et pour tous $z \in V$, $g \in P$, et $d \in]0,d_o]$.

4. <u>CAS GENERAL</u> : <u>CONDITION NECESSAIRE</u>

Nous adoptons le point de vue de Grushin [5] et de nombreux travaux ultérieurs (Bolley-Camus-Helffer [1] , Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [2]), en introduisant une famille d'opérateurs définis globalement sur R^k (où k sera un entier variable compris entre 1 et d), à coefficients polynomiaux, dont l'injectivité dans $\mathcal{S}(R^k)$ sera entraînée par l'inégalité (2).

C. Rockland a remarqué que, dans les cas étudiés par Grushin, les opérateurs à coefficients polynomiaux introduits par cet auteur peuvent s'interpréter à l'aide de la théorie des représentations de groupes de Lie nilpotents. Dans le cas général, on va définir l'algèbre de Lie et l'ensemble de représentations qui vont intervenir.

1. L'algèbre de Lie : Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie nilpotente libre, à 2p générateurs notés $\tilde{X}_j$ et $\tilde{Y}_j$ $(j = 1,\dots,p)$, de rang de nilpotence r. Soit $\mathfrak{g}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les crochets itérés de longueur k des éléments $\tilde{X}_j$ et $\tilde{Y}_j$. Comme dans Rothschild-Stein [9] , on considère l'unique application linéaire λ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie engendrée par les champs X_j et Y_j, qui vérifie :

$$\lambda(\tilde{X}_j) = X_j \qquad \lambda(\tilde{Y}_j) = Y_j \tag{28}$$

$$\lambda([X,Y]) = [\lambda(X), \lambda(Y)] \qquad \text{si } X \in \mathfrak{g}_p \text{ , } Y \in \mathfrak{g}_q, \quad p+q \leqslant r \text{ .} \tag{29}$$

2. <u>L'ensemble de représentations</u>. La théorie de Kirillov [7] associe à chaque forme linéaire $\ell \in \mathfrak{g}^*$ une représentation unitaire irréductible π_ℓ du groupe exp $\mathfrak{g}$ (dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$), réalisée dans $L^2(R^{k(\ell)})$, où $k(\ell)$ est la moitié du rang de la forme bilinéaire suivante sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$

$$X,Y \to \ell([X,Y]) . \tag{30}$$

En désignant aussi par π_ℓ la représentation correspondante de $\mathfrak{g}$, les $\pi_\ell(\tilde{X}_j)$ et $\pi_\ell(\tilde{Y}_j)$ sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 dans $R^{k(\ell)}$, à coefficients polynomiaux, que l'on peut calculer explicitement. On obtient ainsi toutes les représentations unitaires irréductibles du groupe exp $\mathfrak{g}$.

Pour définir les représentations qui interviennent dans l'hypoellipticité maximale, il suffit donc de définir l'ensemble des fromes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ qui leur correspondent. C'est l'objet de la

<u>Définition 4</u> : Pour tout $x_o \in \Omega$, désignons par Γ_{x_o} l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathfrak{g}^*$ telles qu'il existe une suite (x_n,ξ_n) dans $\Omega \times R^d \setminus \{0\}$ et une suite (t_n) de réels > 0 telles que, quand $n \to +\infty$

$$x_n \to x_o \qquad |\xi_n| \to \infty \qquad t_n \to 0 \tag{31}$$

et, pour tout $X \in \mathfrak{g}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$

$$\ell(X) = \lim_{n\to\infty} i^{-1} t_n^j \, \lambda(X)(x_n,\xi_n)$$

On a désigné par $\lambda(X)(x,\xi)$ le symbole de l'opérateur différentiel $\lambda(X)$.

Théorème 5 : Avec les notations de l'introduction, si le système (L_j) est hypoelliptique maximal en un point x_o de Ω , alors, pour tout $\ell \in \Gamma_{x_o} \setminus \{o\}$.
Le système $\pi_\ell(\tilde{L}_j) = \pi_\ell(\tilde{X}_j) + i\pi_\ell(\tilde{Y}_j)$ (j = 1,...,p) est injectif dans $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$:

(32) $$\psi \in \mathcal{S}(R^{k(\ell)}), \quad \pi_\ell(\tilde{L}_j)\psi = 0 \quad (j = 1,\dots,p) \Rightarrow \psi = 0$$

Le résultat analogue pour les opérateurs s'exprimant de manière polynomiale par rapport à des champs de vecteurs permet de retrouver les conditions nécessaires d'hypoellipticité maximale de Grushin [5] et Bolley-Camus-Helffer [1] (en particulier les "conditions d'ellipticité générale" introduites par ces auteurs).

On remarque que l'énoncé du théorème 5 a un sens si on remplace les champs X_j et Y_j par des opérateurs pseudo-différentiels. Notre méthode de démonstration ne nous permet pas actuellement cette généralisation. Pourtant, cette extension est vraie si r = 2 (d'après les techniques de [6]), et il semble que, si p = 1, cette condition d'injectivité coïncide bien avec la condition explicite de Egorov, valable dans le cas pseudodifférentiel.

Sous certaines hypothèses de rang constant, L. P. Rotschild [8] a démontré un résultat d'hypoellipticité maximale sous une condition qui est équivalente, dans ce cas, à celle du théorème 5.

---

[1] Bolley-Camus-Helffer : Remarques sur l'hypoellipticité. C. R. Acad. Sc. t.283 (1976) p.979-982.

[2] Boutet de Monvel - Grigis - Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 34-35 (1976).

[3] Egorov : Subelliptic operators. Russian Math. Survey 30 (2) (1975) p.59-118 et 30 (3) (1975) p.55-105.

[4] Folland-Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex. Ann. of Math. Studies n° 75, Princeton, 1972.

[5] Grushin : On a class of hypoelliptic operators. Math. Sbornik. 83 (125) (1970) p. 456-473.

[6] Hormander : Pseudodifferential operators and non elliptic boundary value problems. Ann. of Math. 83 (1966) p.129-269.

[7] Kirillov : Unitary representations of nilpotent Lie groups. Russian Math. Survey 17 (1962) p. 53-104.

[8] Rothschild : A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. Comm. in P. D. E. 4 (6) (1979) p. 546-699.

[9] Rothschild-Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. 137 (1976) p. 247-320.

****