H. BERESTYCKI

Orbites périodiques de systèmes conservatifs

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 24, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

ORBITES PERIODIQUES DE SYSTEMES CONSERVATIFS

par H. BERESTYCKI

Exposé n° XXIV

20 Avril 1982

Dans cet exposé, nous présentons quelques résultats obtenus en collaboration avec J. M. Lasry (voir [5] et [20]) concernant l'existence et le nombre de solutions périodiques de certains systèmes conservatifs. Une première partie (section 1) est consacrée à une revue sommaire de théorèmes classiques et d'autres, plus récents, sur ce type de questions. Nous esquissons ensuite la démonstration de l'existence de trajectoires périodiques sur une sphère pour un système $\dot{x} = \varphi(x)$, où φ est un champ tangent vérifiant certaines hypothèses. Le résultat indiqué ici est lié à une conjecture de Seifert et constitue une version globale d'un théorème de Moser. La démonstration combine des techniques d'analyse fonctionnelle et des résultats de topologie algébrique. Elle utilise l'invariance sous l'action de S^1 (translations du temps dans un espace de fonctions périodiques) d'un système autonome. Cette méthode permet aussi d'obtenir un théorème abstrait pour des problèmes de valeurs propres complexes non linéaires. Enfin, pour conclure, nous indiquons une version beaucoup plus précise dans le cas des systèmes hamiltoniens. Celle-ci fournit une estimation du nombre de trajectoires périodiques distinctes pour les équations d'Hamilton sur une surface d'énergie donnée sous l'hypothèse que celle-ci est étoilée.

1. INTRODUCTION : REVUE DE QUELQUES RESULTATS SUR LES SOLUTIONS PERIODIQUES DE SYSTEMES CONSERVATIFS.

1.1 Systèmes conservatifs; systèmes hamiltoniens

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = \varphi(x) \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^k$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\varphi \in C(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ est donnée. On s'intéresse ici à l'existence de solutions périodiques de ce système.

Un problème classique est le suivant : étant donnée $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$ vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0)$ inversible, peut-on trouver des solutions périodiques de (1.1) au voisinage de 0 ? (dans une terminologie ancienne, 0 est-il un "centre" ?). Une condition nécessaire pour que ceci puisse se produire est que $\varphi'(0)$ admette une paire de valeurs propres $\pm i\omega$ imaginaires pures ($\omega \in \mathbb{R}_+^*$). Cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$(1.2) \qquad \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}\right\} = \varphi(x_1, x_2)$$

On a dans ce cas $\varphi'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mais les solutions de (1.2) vérifient $r\dot{r} = -r^4$ avec $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ et (1.2) n'admet pas de solutions périodiques autres que $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$.

On est donc conduit à faire des hypothèses supplémentaires. La notion de système conservatif s'est particulièrement imposée du fait qu'elle englobe le cas des systèmes hamiltoniens. On dit que (1.1) est un système conservatif si $\exists\, G \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ tel que

$$(1.3) \qquad \varphi(x).G'(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^k .$$

Dans ce cas, en effet, $G(\mathbf{x}(t))$ est une quantité conservée le long des trajectoires de (1.1). On cherche donc des solutions périodiques sur les surfaces $\{G = \text{constante}\}$.

Lorsque la dimension k est impaire, ce problème est très simple. Considérons en effet l'exemple $G(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ -mais ceci reste évidemment vrai de façon beaucoup plus générale-, la condition (1.3) signifie $\varphi(x).x = 0$. Or l'on sait que tout champ $\varphi(x)$ tangent à la sphère S^{k-1} s'annule en au moins un point si k est impair. Ce point est une solution stationnaire de (1.1). C'est pourquoi on supposera dans toute la suite que la dimension est paire et l'on notera $k = 2N$.

Du point de vue de la mécanique, un cas particulièrement important est celui des équations d'Hamilton :

$$(1.4) \qquad \dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(x,p) \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,p)$$

où $i = 1,\dots,N$; $x = (x_1,\dots,x_N)$, $p = (p_1,\dots,p_N)$, et $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ désigne l'hamiltonien. De façon plus concise (1.4) s'écrit :

$$(1.4) \qquad \dot{z} = \sigma H'(z)$$

avec $z = (x,p)$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I étant la matrice identité dans $\mathbb{R}^N$. C'est naturellement un système conservatif, la quantité conservée étant ici H.

1.2 Un théorème de Moser

La notion de système conservatif est suffisamment riche pour permettre de résoudre le problème du "centre" évoqué ci-dessus. Le premier résultat dans cette direction est le célèbre théorème du centre de Liapunov [1] . Ce théorème, qui faisait intervenir des conditions de simplicité et de "non dégénérescence" sur les valeurs propres de $\varphi'(0)$, a été généralisé (et simplifié) par J. Moser [2] qui a montré :

Théorème 1.2 : Soit φ de classe C^1, G de classe C^2 vérifiant $G(0)$, $G'(0) = 0$, la condition (1.3) et tel que $G''(0)$ soit définie positive. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe au moins une solution périodique de (1.1) sur la surface $\{G = \varepsilon\}$.

En fait, J. Moser obtient également un résultat de multiplicité avec des hypothèses de "non-dégénérescence" et montre que la période des solutions est voisine (pour $\varepsilon \to 0$) de celle des solutions périodiques du système linéarisé $\dot{x} = \varphi'(0)x$.

Dans la section 2, nous énoncerons une version de nature plus globale de ce résultat.

1.3 Un théorème de Weinstein

Pour les sytèmes hamiltoniens, un résultat beaucoup plus précis avait été obtenu par A. Weinstein [3] :

Théorème 1.3 : Soit $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ tel que $H''(0)$ soit définie positive avec $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, la surface $\{H = \varepsilon\}$ contient au moins N orbites périodiques distinctes du système (1.4).

Ce résultat de multiplicité ne peut pas s'étendre à un système conservatif quelconque comme l'a montré J. Moser [2] sur un contre exemple dans $\mathbb{R}^4$. Une démonstration simplifiée et plus générale du théorème 1.3 est donnée dans J. Moser [2] . D'autres démonstrations sont également indiquées dans I. Ekeland [4] et dans notre travail avec J. M. Lasry [5] . Dans la section 5 ci-dessous, nous énoncerons une version globale du résultat précédent.

1.4 Résultats globaux pour les systèmes hamiltoniens

Depuis les résultats que l'on vient de citer de nombreux travaux se sont efforcés d'obtenir des versions globales, c'est-à-dire l'existence de solutions périodiques de (1.4) sur une surface $\{H = C\}$ donnée sans que C soit nécessairement "petit". L'apport de méthodes issues du calcul des variations a été déterminant. Ces travaux font tous intervenir des hypothèses géométriques sur la surface $\{H = C\}$. Citons en particulier le résultat suivant dû à P. H. Rabinowitz [6] :

Théorème 1.4 : Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ et $C > 0$ une constante telle que la surface $\{H = C\}$ soit une variété et soit la frontière d'une ensemble compact étoilé. Alors le système (1.4) possède au moins une solution périodique sur cette surface.

Un théorème un peu moins général avait été obtenu par A. Weinstein [7] à l'aide de méthodes géométriques. La condition d'ensemble étoilé y était remplacée par celle d'ensemble convexe.

La question de savoir si sous les hypothèses du Théorème 1.4, le système hamiltonien (1.4) admet au moins N orbites périodiques distinctes demeure ouverte. Les seuls résultats dans cette direction sont ceux de A. Weinstein (théorème 1.3 ci-dessus qui est "local") et le résultat global suivant dû à I. Ekeland et J. M. Lasry [8] :

Théorème 1.5 : Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ et $C > 0$ une constante telle que $H^{-1}(C)$ soit une variété et soit la frontière de l'ensemble $\{H \leq C\}$ compact et convexe. On suppose qu'il existe r,R tels que $0 < r < R < \sqrt{2}\, r$ et

$$B_r \subset \{H \leq C\} \subset B_R \quad (1) \tag{1.5}$$

Alors $\{H = C\}$ contient au moins N orbites périodiques distinctes de (1.4).

En conclusion de cet exposé (section 5) nous indiquerons l'énoncé d'un résultat que nous avons obtenu en collaboration avec J. M. Lasry [5] et qui généralise les trois théorèmes précédents.

---

(1) B_r désigne la boule de rayon r centrée à l'origine.

1.5 Autres résultats concernant les systèmes hamiltoniens

On trouvera dans l'article de revue de P. H. Rabinowitz [9] une présentation exhaustive des travaux concernant les solutions périodiques de systèmes hamiltoniens. Mentionnons cependant quelques travaux récents (parmi d'autres) :

"Existence de "vibrations libres" du système (1.4) : P. H. Rabinowitz [6], [10], [24] V. Benci et P. H. Rabinowitz [11], F. Clarke et I. Ekeland [12], A. Ambrosetti et G. Mancini [25].

"Existence de "sous-harmoniques" : F. Clarke et I. Ekeland [13], P. H. Rabinowitz [14].

"Systèmes hamiltoniens asymptotiquement quadratiques" : H. Amann et E. Zehnder [15].

"Vibrations forcées de systèmes sur-quadratiques" : A. Bahri et H. Berestycki [16], [17], [18].

Signalons enfin, que l'on trouvera dans l'article de revue de H. Brezis [19] une présentation de développements récents sur les solutions périodiques de l'équation de la corde vibrante non linéaire - qui est une système hamiltonien de "dimension infinie".

A titre d'exemple, indiquons les résultats principaux de [18] et [24]. Le résultat de Rabinowitz concerne les vibrations libres de systèmes hamiltoniens sur-quadratiques.

Théorème 1.6 (P. H. Rabinowitz [24]) : Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$0 < H(z) \leqslant \theta H'(z).z \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{2N}, \ |z| \geqslant R$$

où $R > 0$ est une constante et $0 < \theta < 1/2$. Alors, pour tout $A > 0$, et pour tout $T > 0$, il existe une solution T-périodique non constante z de (1.4) vérifiant $\|z\|_{L^\infty} \geqslant A$.

On trouvera des résultats concernant les vibrations forcées dans A. Bahri et H. Berestycki [16] - [18]. En particulier, dans [18] est démontré le résultat suivant :

Théorème 1.7 : Soit $V \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ vérifiant

$$0 < V(x) \leqslant \theta V'(x).x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2N}, \ |x| \geqslant R$$

où $R > 0$ est une constante, et $0 < \theta < 1/2$. Alors $\forall f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, T-périodique donnée, il existe une infinité de solutions T-périodiques du système

$$\ddot{x} + V'(x) = f(t).$$

2. EXISTENCE DE SOLUTIONS PERIODIQUES POUR DES SYSTEMES CONSERVATIFS

Dans cette section, nous énonçons des résultats concernant le système (1.1) dont la démonstration sera esquissée au paragraphe 3.

Soit S une matrice $2N \times 2N$ antisymétrique dont les valeurs propres sont $\pm iw_1, \ldots, \pm iw_N$ avec $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{2N})$ vérifiant les hypothèses suivantes. On suppose qu'il existe une fonction $G \in C^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ et $R > 0$ tels que

(2.1) $\qquad \Sigma = \{G = R\}$ est une surface étoilée par rapport à O,

(2.2) $\qquad \varphi(x).G'(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \Sigma$

(2.3) $\qquad S\,\varphi(x).G'(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \Sigma$

Nos principaux résultats sont énoncés dans les théorèmes suivants.

<u>Théorème 2.1</u> : Sous les hypothèses précédentes, il existe une constante $\alpha > 0$ (donnée explicitement en fonction de $w_1, \ldots, w_N$) telle que si φ vérifie

(2.4) $\qquad |\varphi(x) - Sx| < \alpha\,|x| \qquad \forall x \in \Sigma$

alors, il existe au moins une orbite périodique du système (1.1) sur Σ .

<u>Théorème 2.2</u> : Sous les mêmes hypothèses, on suppose de plus que $w_\ell / w_k \notin \mathbb{Z}$ pour tous k et ℓ , $k \neq \ell$, appartenant à un sous-ensemble de p indices dans $\{1,2,\ldots,N\}$. Alors il existe $\alpha' > 0$ ($\alpha' \leqslant \alpha$ est déterminé à partir de $w_1, \ldots, w_N$) tel que si φ vérifie

(2.5) $\qquad |\varphi(x) - Sx| < \alpha'|x| \qquad \forall\, x \in \Sigma$

alors (1.1) admet au moins p orbites distinctes sur la surface Σ.

Les constructions de α et α' sont détaillées dans [20] où ces théorèmes sont démontrés. Nous n'expliciterons ces constantes ici que dans un cas particulier. On se place dans le cas où $S = \sigma$, (on a $w_1 = \ldots = w_N = 1$). On suppose que $G(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ et que les hypothèses précédentes sont vérifiées dans $\mathbb{R}^{2N}$:

(2.6) $$\varphi(x).x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2N}$$

(2.7) $$\varphi(x).\sigma x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2N} - \{0\}$$

Dans ce cas la constante α vaut 1/3. Sous la condition

(2.8) $$|\varphi(x) - \sigma x| < 1/3|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2N} ,$$

on a en effet, comme cas particulier du théorème 2.1 :

Théorème 2.3 : Sous les hypothèses (2.6)-(2.8), le système (1.1) admet au moins une trajectoire périodique sur toute sphère $S_R = \{|x| = R\}$, $R > 0$.

Le théorème 2.3 est lié à une conjecture attribuée à Seifert : le résultat reste-t-il vrai sous les seules conditions (2.6) et (2.7) ? Ce problème est ouvert. Notons qu'une réponse positive serait donnée à cette conjecture si l'on pouvait remplacer la constante 1/3 par 1 dans (2.8).

Remarque 2.4 : Les théorèmes 2.1 et 2.2 constituent des versions globales du théorème 1.2. En effet, après un changement de variable, on peut se ramener au cas où $\varphi'(0) = S$, dans le cadre du Thèorème 1.2. Dès lors, les conditions du type (2.4) et (2.5) sont vérifiées sur les surfaces $\{G = \varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$ petit. (Voir [20] pour une discussion détaillée).

Remarque 2.5 : On peut donner certains encadrements des périodes minimales des solutions de (1.1) obtenues dans les théorèmes précédents. D'autre part, les résultats énoncés ici sont liés à la théorie globale de la bifurcations de Hopf, en particulier au résultat de S. N. Chow, J. Mallet-Paret et J. Yorke [21] (Voir [20] pour une discussion plus détaillée. Ce point de vue ne sera pas abordé ici).

3. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION

On se bornera ici à esquisser la démonstration dans le cas particulier du théorème 2.3. On supposera désormais vérifiées les conditions (2.6)-(2.8).

Etape 1 : Détermination de la période

Si x_1 est une solution T-périodique de (1.1), alors $x(t) = x_1(\frac{T}{2\pi} t)$ est une solution 2π-périodique de

(3.1) $$\dot{x} = \lambda\, \varphi(x)$$

Dans (3.1) la période 2π est fixée mais le paramètre λ (assujetti à $\lambda > 0$) est libre : c'est un problème de valeur propre non linéaire. On imposera la condition

(3.2) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt = R^2$$

En effet, si x est 2π-périodique et vérifie (3.1), alors $\dot{x}.x = 0$ d'où $|x(t)| = R \quad \forall t$.

Etape 2 : Problème de valeurs propres complexes non linéaires

On utilisera l'observation suivante : si $x \not\equiv 0$ est une solution 2π -périodique de

(3.3) $$\dot{x} = (\lambda I + \mu\sigma) \quad \varphi(x)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\mu = 0$ et x vérifie (3.1). En effet, en multipliant par x et en intégrant on a

(3.4) $$0 = \mu \int_0^{2\pi} - \varphi(x) .\ \sigma x \ dt$$

d'où $\mu = 0$ par (2.7).

Identifions $\mathbb{R}^{2N}$ avec $\mathbb{C}^N$ par l'isomorphisme :
$(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N) \longleftrightarrow (x_1 + iy_1,\dots,x_N + iy_N)$. La multiplication par σ dans $\mathbb{R}^{2N}$ correspond donc à la multiplication scalaire par i dans $\mathbb{C}^N$. On considérera que $\varphi \in C(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)$ et $x : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^N$. Soit $E = L^2(S^1,\mathbb{C}^N)$, muni du produit scalaire L^2. On s'est ainsi ramené au problème suivant :

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } x \in E \ , \ \zeta \in \mathbb{C} \quad \text{vérifiant } \operatorname{Re}\zeta > 0 \ , \\ \|x\|^2_{L^2} = 2\pi R^2 \quad \text{et} \quad \dot{x} = \zeta\, \varphi(x) \ . \end{cases}$$

On posera dans la suite $\beta^2 = 2\pi R^2$, $\beta > 0$.

Une solution de ce problème conduit bien à une solution périodique de (1.1) à l'aide des étapes 1 et 2. Notons que (3.5) est un problème de valeurs propres complexes non linéaires.

Etape 3 : Réduction à la dimension finie

On désigne par E^m l'espace des séries de Fourier tronquées à l'ordre m :

$$E^m = \{x \in E \ ; \ x = \sum_{-m}^{m} x_j\, e^{ijt} \ , \ x_j \in \mathbb{C}^N\} \ .$$

Soit Q^m le projecteur orthogonal de E sur E^m. La version de (3.5) dans E^m s'écrit :

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } x \in E^m \ , \ \zeta \in \mathbb{C} \ \text{ tels que } \operatorname{Re}\zeta > 0 \ , \\ \|x\|_{L^2} = \beta \\ \dot{x} = \zeta\, Q_m\, [\varphi(x)] \end{cases}$$

Dans les étapes suivantes nous montrerons la

Proposition 3.1 : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in E^m$ et $\zeta \in \mathbb{C}$ solution de (3.6) et vérifiant en outre $|\zeta - 1| \leqslant 1/2$.

Montrons, pour commencer, comment le théorème 2.3 découle de cette proposition. Soient (x_m, ζ_m) les solution de (3.6) données par la proposition 3.1. Grâce à (2.8) on sait que $\varphi(x_m)$ est borné dans L^2, et donc $\|Q_m\,[\varphi(x_m)]\|_{L^2}$ est borné. On déduit alors de (3.6) que $\|\dot{x}_m\|_{L^2}$ est borné et donc que x_m est une suite bornée dans l'espace $H^1(S^1, \mathbb{C}^N)$. En vertu de l'injection compacte $H^1 \hookrightarrow L^\infty$, on peut extraire une sous-suite x_{m_j}, ζ_{m_j} telle que $x_{m_j} \longrightarrow x$ uniformément et $\zeta_{m_j} \longrightarrow \zeta$. Par conséquent, $Q_{m_j}[\varphi(x_{m_j})]$ converge vers $\varphi(x)$ fortement dans L^2. Par passage à la limite dans (3.6) on en déduit que (x,ζ) est une solution de (3.5). (Noter que $|\zeta - 1| \leqslant 1/2$).

Etape 4 : Reformulation en termes d'homotopie S^1-équivariante.
La réduction à la dimension finie et au problème (3.6) est requise ici afin de pouvoir utiliser des outils topologiques. On dispose sur E et E^m de l'action de S^1 induite par les translations en temps. Soit $\tau \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; on note :

$$(T_\tau x)(t) = x(t+\tau).$$

Cette action laisse les espaces E^m invariants. Notons que l'action n'est pas libre et admet E^o comme sous-espace de points fixes. Soit S (ou S_m) la sphère $S = \{x \in E^m \; ; \; \|x\|_{L^2} = \beta\}$. S est invariante par cette action . Une application $\psi : S \to S$ est dite équivariante si $\psi \circ T_\tau = T_\tau \circ \psi \quad \forall \tau$.

Pour démontrer la proposition 3.1, on raisonne par l'absurde et on suppose :

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \dot{x} - \zeta Q_m [\varphi(x)] \neq 0 \\ \forall x \in S, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta - 1| \leq 1/2 \end{cases}$$

Sous cette hypothèse, on peut définir une application $\psi_\zeta \in C(S,S)$ en posant

$$\psi_\zeta(x) = \beta \frac{i\zeta^{-1}\dot{x} - i\varphi_m(x)}{|\zeta^{-1}\dot{x} - \varphi_m(x)|_{L^2}},$$

où $\varphi_m = Q_m \circ \varphi$. Un calcul élémentaire montre que ψ_ζ est équivariante (pour l'action T_τ). On désigne par X l'espace des applications : $S \to S$ continues et équivariantes.

Posons $\gamma_p(\theta) = \psi_{1+pe^{i\theta}}$, $0 \leq p \leq 1/2$. Lorsque p est fixé, γ_p est un lacet dans X, c'est-à-dire un élément du groupe fondamental $\pi_1(X)$ (1).
En faisant varier p, on voit que $\gamma_{1/2}$ et γ_o sont homotopes et donc :

$$(3.8) \qquad \gamma_{1/2} \simeq 0,$$

---

(1) Le point de base dans X est l'application identité.

(puisque γ_o est indépendant de θ).

On construit maintenant une seconde homotopie pour déformer $\gamma_{1/2}$ dans $\pi_1(X)$. Soit $s \in [0,1]$ et on définit :

(3.9) $$\varphi^s(x) = (1-s)\,\varphi(x) + i\,sx$$

(3.10) $$H^s_\zeta(x) = i\,\zeta^{-1}\dot{x} - i\,Q_m\,[\varphi^s(x)].$$

<u>Lemme 3.1</u> : Pour $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta - 1| = 1/2$, $s \in [0,1]$ arbitraires, on a $H^s_\zeta(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$. L'application

$$h^s(\theta) = \beta\, H^s_{1+1/2\,e^{i\theta}} / \| H^s_{1+1/2\,e^{i\theta}} \|$$

est donc définie sur S et $h^s(\theta) \in X$. On a donc $h^1 \simeq 0$ dans $\pi_1(X)$ par (3.8).

<u>Preuve</u> : Montrons que H^s_ζ ne s'annule pas sur S pour $|\zeta - 1| = 1/2$. Notons que par (2.8) et (3.9), on a :

(3.11) $$|\varphi^s(x) - ix| < 1/3\,|x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{C}^N - \{0\}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\exists\, x \in S \cap E^m$ tel que $H^s_\zeta(X) = 0$. On a donc

(3.12) $$\dot{x} = \zeta\, Q_m\,[\varphi^s(x)].$$

En adaptant l'argument de l'étape 2, on montre pour commencer que $\mathrm{Im}(\zeta) = 0$ et donc que $\zeta = 1 \pm 1/2$. De (3.11) et (3.12) on déduit

(3.13) $$\|\dot{x} - \zeta i x\|_{L^2} = |\zeta|\, \|Q_m\,[\varphi^s(x) - ix]\|_{L^2} < \frac{1}{3}\|x\|_{L^2} .$$

En décomposant $x = \sum_{-m}^{m} a_k\, e^{ikt}$, (3.13) s'écrit :

(3.14) $$\sum_{-m}^{m} |k - \zeta|^2 |a_k|^2 < \frac{1}{9}\, |\zeta|^2 \,(\sum_{-m}^{m} |a_k|^2) .$$

Or, comme $\zeta = 1 \pm 1/2$, on a

(3.15) $$|k - \zeta|^2 \geq 1/9\,|\zeta|^2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

ce qui montre que l'inégalité (3.14) est absurde et conclut la preuve du lemme.

Remarque 3.3 : La contradiction de (3.14) par (3.15) est précisément la raison du choix de la constante 1/3 dans (2.8). Ce même type de raison préside à la construction de α et α' dans les théorèmes 2.1 et 2.2.

Etape 5 : Une deuxième réduction

A ce stade de la démonstration, nous avons montré que la contradiction de la proposition 3.1 (à savoir (3.7)) conduit à

$$h^1 \simeq 0 \quad \text{dans } \pi_1(X). \tag{3.16}$$

Notons qu'à une constante de normalisation près, on a

$$h^1(\theta)[x] = x - i\,\zeta^{-1}x = \sum_{-m}^{m} (1-k\zeta^{-1})a_k\, e^{ikt}$$

avec $x = \sum_{-m}^{m} a_h e^{iht}$, $a_k \in \mathbb{C}^N$. Comme $1 - sk\,\zeta^{-1} \neq 0 \quad \forall s \in [0,1], \quad \forall k \neq 1$, $\forall \zeta$, $|\zeta - 1| = 1/2$, il est facile de voir que h^1 est homotope à

$$\hat{\gamma}(\theta)\,[x] = \{e^{i\theta}\, a_1\, e^{it} + \sum_{k\neq 1} a_k\, e^{ikt}\} \tag{3.17}$$

Nous avons donc montré

$$\hat{\gamma} \simeq 0 \quad \text{dans } \pi_1(X) \tag{3.18}$$

En fait, compte tenu du rôle particulier que joue l'espace des points fixes de l'action, E^O, il est nécessaire de préciser quelque peu les déformations que l'on a construites. Il est immédiat de vérifier tout d'abord que toutes les applications considérées ci-dessus appliquent E^O dans lui-même.

On définit les sous-espaces de X suivants

$$\hat{X} = \{h \in X \ , \quad h\,(S \cap E^O) \subset E^O\}$$

$$X_1 = \{h \in \hat{X} \ , \ |h(x) - x| < |x| \quad \forall\, x \in S \cap E^O\}$$

$$Y = \{h \in \hat{X} \ , \ h(x) = x \quad \forall x \in E^O\}$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on peut montrer qu'on a, en réalité, de façon plus précise que (3.18) :

(3.19) $$\hat{\gamma} \simeq 0 \qquad \text{dans } \pi_1(X_1)$$

et il est aisé de montrer que cela implique (comme $\hat{\gamma} \in \pi_1(Y)$) que

(3.20) $$\hat{\gamma} \simeq 0 \qquad \text{dans } \pi_1(Y) .$$

Notons à présent que $\hat{\gamma}(\theta)$ est une application linéaire unitaire. On désigne par Z l'espace des applications unitaires : $E^m \to E^m$ tant la trace sur E^o est l'identité. Le résultat topologique suivant qui est un cas particulier d'un théorème plus général de S. Husseini [22] est fondamental pour conclure la démonstration.

<u>Théorème 3.4</u> : L'homomorphisme $\pi_1(Z) \to \pi_1(Y)$ induit par l'injection naturelle $Z \hookrightarrow Y$ est lui-même injectif.

A l'aide de ce théorème on voit donc que (3.20) implique

(3.21) $$\hat{\gamma} \simeq 0 \qquad \text{dans } \pi_1(Z)$$

<u>Etape 6</u> : <u>Classe d'homotopie de $\hat{\gamma}$ dans $\pi_1(Z)$ et conclusion</u>

On peut à présent conclure la démonstration en montrant que (3.21) est absurde. En effet, (3.21) implique que $\chi(\theta) = \det(\hat{\gamma}(\theta))$ est un lacet trivial dans $\pi_1(S^1)$. Ce qui n'est pas le cas puisque $\chi(\theta) = e^{in\theta}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.3.

4. <u>VALEURS PROPRES COMPLEXES NON LINEAIRES</u>

Dans la démonstration précédente, nous avons résolu un problème de valeurs propres complexes non linéaires, le problème (3.5). Le même type d'arguments permet de montrer quelques résultats généraux d'existence pour ces problèmes. Le cas le plus simple est le suivant :

<u>Théorème 4.1</u> : Soit T une représentation unitaire libre de S^1 dans $\mathbb{C}^N$ et soit $A : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ un opérateur continu vérifiant

$$(4.1) \qquad A \circ T_\tau = T_\tau \circ A \qquad \forall \tau \in S^1 .$$

Alors, pour tout $R > 0$, $\exists x \in S_R = \{x \in \mathbb{C}^N \ |x| = R\}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tels que $Ax = \lambda x$.

<u>Démonstration</u> : On raisonne par l'absurde et on suppose que pour un certain $R > 0$ on a $Ax - \lambda x \neq 0 \quad \forall x \in S_R$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Soit X l'espace des applications : $S_R \to S_R$ continues et équivariantes :

$$X = \{h \in C(S_R,S_R), \ h \circ T_\tau = T_\tau \circ h , \ \forall \tau \in S^1\}.$$

Pour $x \in S_R$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, posons

$$(4.1) \qquad M_\lambda x = R \frac{Ax - \lambda x}{|Ax - \lambda x|} .$$

On a $M_\lambda \in X$. Posons $w_p(\theta) = M_{pe^{i\theta}}$. Il est clair (en faisant $\lambda = 0$) que $w_p \simeq 0$ dans $\pi_1(X)$, pour tout $p \geqslant 0$. Mais par ailleurs, pour $p > 0$ grand on a $|Ax| < p \ |x| \ \forall x \in S_R$, et donc $sAx - \lambda x \neq 0 \quad \forall s \in [0,1]$, $\forall x \in S_R$, $\forall \lambda$, $|\lambda| = p$. On voit donc que $w_p \simeq \hat{w}$ avec $\hat{w}(\theta)x = - e^{i\theta}x$. Or cette application n'est pas homotopiquement nulle dans $\pi_1(U(N) \cap X)$. D'après un théorème de S. Husseini [22] , (il s'agit d'une variante du théorème 3.4 ci-dessus), l'homomorphisme $\pi_1[U(N) \cap X] \to \pi_1(X)$, induit par l'injection naturelle, est lui-même <u>injectif</u>. Ainsi donc, $\hat{w}$ ne saurait être à la fois trivial dans $\pi_1(X)$ et non trivial dans $\pi_1(U(N) \cap X)$.

Ceci achève la démonstration.

<u>Remarque 4.2</u> : Par la même méthode, on démontre dans [20] des théorèmes plus généraux concernant des équations de la forme $g(\lambda,x) = 0$ où $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ et $g(\lambda,.)$ est équivariante. Notons que <u>lorsque N est impair</u>, J. Ize [23] a montré des résultats beaucoup plus généraux que le theorème 4.1. En particulier, le théorème 4.1 reste vrai sans hypothèse d'équivariance sur A.

5. ORBITES PERIODIQUES DE SYSTEMES HAMILTONIENS SUR UNE SURFACE D'ENERGIE

Dans le cas du système hamiltonien (1.4), les théorèmes de la section 2 peuvent être considérablement raffinés. Citons en particulier le résultat suivant (voir H. Berestycki et J. M. Lasry [5]).

Soient $w_1,\ldots w_N > 0$ et $B = \{x = (x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N);$ $\Sigma w_i(x_i^2 + y_i^2) \leqslant 1\}$.

<u>Théorème 5.1</u> : Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ et $C > 0$ tels que la surface $\{H = C\}$ soit une variété et soit étoilée par rapport à 0. Il existe une constante $\alpha > 1$ dépendant (explicitement) de $w_1,\ldots,w_N$ telle que si H vérifie

$$B \subset\subset \{H \leqslant C\} \subset\subset \alpha B$$

et si de plus les hyperplans tangents à la surface $\{H = C\}$ ne rencontrent pas B, alors, le système (1.4) admet au moins N orbites périodiques distinctes sur la surface $\{H = C\}$.

La démonstration de ce résultat repose sur une méthode variationnelle (de type Liusternik-Schnirelman) qui utilise une théorie de l'indice pour des actions de S^1 arbitraires développée par E. Fadell, S. Husseini et P. H. Rabinowitz [26] . Cette démonstration est détaillée dans [5] et permet d'obtenir en particulier les théorèmes 1.3, 1.4 et 1.5 cités dans l'introduction.
Notons que pour l'existence d'<u>une</u> solution au moins, il n'y a pas d'hypothèses supplémentaires au fait que $\{H = C\}$ est une surface étoilée. Dans le cas où $\{H \leqslant C\}$ est un ensemble convexe, l'hypothèse concernant les hyperplans tangents est une conséquence de l'inclusion $B \subset\subset \{H \leqslant C\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Liapunov A. : Problème général de la stabilité du mouvement . Ann. Fac. Sci. Toulouse <u>2</u> (1907), 203-474.

[2] Moser J. : Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein. Comm. Pure Appl. Math. <u>29</u> , (1976), 727-747.

[3] Weinstein A. : Normal modes for non linear Hamiltonian systems. Inv. Math., <u>20</u> (1973), 47-57.

[4] Ekeland I. : A perturbation theory near convex Hamlitonian systems. A paraître.

[5] Berestycki H. and Lasry J. M. : Existence of multiple periodic orbits for Hamiltonian systems on a starshaped energy surface. En préparation.

[6] Rabinowitz P. H. : Periodic solutions of Hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) 157-184.

[7] Weinstein A. : Periodic orbits for convex Hamiltonian systems. Annals Math. 108, (1978), 507-518.

[8] Ekeland I. et Lasry J. M. : On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface. Ann. Math. 112 (1980), 283-319.

[9] Rabinowitz P. H. : Periodic solutions of Hamiltonian systems : A survey. MRC Tech. Summ. Report # 2154 et article à paraître.

[10] Rabinowitz P. H. : A variational method for finding periodic solutions of differential equations. Nonlinear evolution equations (M.G. Crandall editor), Academic Press (1978) pp.222-251.

[11] Benci V. and Rabinowitz P. H. : Critical point theorems for indefinite functionals, Inv. Math. 52, (1979), 336-352.

[12] Clarke F. and Ekeland I. : Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period. Comm. Pure Appl. Math. 33, (1980), 103-116.

[13] Clarke F. and Ekeland I. : Nonlinear oscillations and boundary value problems for Hamiltonian systems.

[14] Rabinowitz P. H. : Subharmonic solutions of Hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math. 33, (1980), 609-633.

[15] Amann H. and Zehnder E. : Non trivial solutions for a class of non resonance problems and applications. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, IV, VII (1980), 593-603.

[16] Bahri A. and Berestycki H. : Existence d'une infinité de solutions périodiques de certains systèmes hamiltoniens en présence d'un terme de contrainte. Note C. R. Acad. Sc. Paris 292, série A (1981), 315-318.

[17] Bahri A. and Berestycki H. : Forced vibrations of superquadratic Hamiltonian systems. Acta Mathematica, à paraître.

[18] Bahri A. and Berestycki H. : Existence of forced oscillations for some nonlinear differential equations . A paraître.

[19] Brezis H. : Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principle. A paraître au Bull. A.M.S. et Proc. Symposium on the mathematical heritage of H. Poincaré.

[20] Berestycki H.and Lasry J. M. : A topological method for the existence of periodic orbits to conservative systems. A paraître. Voir également la Note aux C. R. Acad. Sc. " Orbites périodiques de systèmes conservatifs : résolution de problèmes non-linéaires équivariants sous l'action de S^1". A paraître (1982).

[21] Chow S. N., Mallet-Paret J. and Yorke J. : Global Hopf bifurcation from a multiple eigenvalue. Nonlinear Analysis, T.M.A. 2 (1978), 753-763.

[22] Husseini S. : An equivariant J-homomorphism theorem and applications. A paraître.

[23] Ize J. : Bifurcation theory for Fredholm operators. Memoirs A.M.S., 7, n°174, (1976)

[24] Rabinowitz P. H. : Periodic solutions of large norm of Hamiltonian systems. A paraître.

[25] Ambrosetti A. and Mancini G. : Solutions of minimal period for a class of convex Hamiltonian systems. A paraître.

[26] Fadell E. R., Husseini S. Y. and Rabinowitz P. H. : Borsuk-Ulam theorems for arbitrary S^1 actions and applications. MRC tech. Sum. Rep. # 2301 (1981) et et article à paraître.

****