Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

R. Beals
R. Coifman

Scattering, transformations spectrales et équations d'évolution non linéaire II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 21, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 1 - 1 9 8 2

SCATTERING, TRANSFORMATIONS SPECTRALES ET EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRE II

par R. BEALS et R. COIFMAN

Exposé n° XXI

25 Mai 1982

§ 1. Nous nous proposons de continuer la description commencée à l'exposé 22, 1981, de la méthode de résolution de certaines équations non linéaires [4].

Commençons par une liste d'équations et des problèmes spectraux associés. Nous décrirons ensuite un algorithme général de solution.

La première est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$U_t + U_{xxx} + 6\, UU_x = 0$$

le problème spectral associé est

$$\psi_{xx} + (z + U)\,\psi = 0$$

(l'équation s'obtient en vérifiant la condition de compatibilité avec l'évolution $\psi_t = U_x \psi + (4Z - 2U)\,\psi_x$.)

La seconde traitée par Zakharov-Shabat est l'équation non linéaire de Schrödinger

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2|u|^2 u$$

Le problème spectral associé est matriciel c'est-à-dire :

(1) $$\frac{d\psi}{dx} = (zJ + Q)\psi \qquad \text{ou} \qquad J = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & i\bar{u} \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

$\psi = (\psi_{ij})$ est une matrice non singulière.

Cette équation est un cas particulier d'équations correspondantes aux systèmes matriciels (décrites en [4]). Plus précisément il s'agit d'équations

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_u^K(u)$$

où $\mathcal{L}_u f = \mathcal{J}^{-1}\frac{d}{dx} f + \mathcal{J}^{-1} u_1 f + [u, \int^x [\mathcal{J}^{-1} f, u]_0 \; dy]$ avec $u = (u_{ij})$,

$u_o = \mathrm{diag}\ (u)$, $u_1 = u - u_o$ et $\mathcal{J}^{-1} u = (\frac{u_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j})$. Le problème spectral est le même que ci-dessus avec

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (Q = u), \quad \lambda_1 \neq \lambda_j \ , \quad i \neq j \ .$$

L'équation de Benjamin Ono [2]

$$(3) \qquad U_t + 2UU_x + HU_{xx} = 0 \qquad \text{où} \quad Hf = \mathrm{v.p}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\, dt$$

est la transformée de Hilbert. Le problème spectral correspondant est aussi pseudo-différentiel, c'est-à-dire

$$(4) \qquad i\ \phi_x^{\pm} + z(\phi^+ - \phi^-) = -\ u\ \phi^+ \quad \text{où} \quad f^{\pm} = \frac{1}{2}(f \pm iHf)$$

Cette dernière équation qui apparaît dans l'étude des longues vagues gravitationnelles entre deux liquides (huile et vinaigre par exemple) est la "limite" d'une famille remarquable d'équations [6]

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cosh(\delta D)u \quad \text{ayant un problème spectral}$$

correspondant $Q_\delta(D,Z)\ \psi(x,z) = u(x)\ \psi(x,z)$

où nous adoptons la notation pseudo-différentielle

$$Q_\delta(D,z)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ Q_\delta(\xi,z)\hat{f}(\xi)d\xi$$

$$(6) \qquad \text{avec} \quad Q_\delta(\xi,z) = \xi - z \coth 2\delta Z + Z(\mathrm{csch}\ 2\delta\ Z)e^{-2\delta\xi}$$

Avant de décrire l'algorithme permettant la solution de ces équations mentionnons que cette méthode a été développée en [4] [5] pour traiter le cas matriciel (2) (ou J n'est pas antihermitienne) et que récemment Ablowitz et Fokas [3] ont réussi à résoudre (3) suivant cet algorithme (et aussi pas une autre méthode de linéarisation directe).

Le schéma général de résolution des équations citées, consiste premièrement à leur associer un problème spectral "correct". Deuxièmement la construction d'un système "complet" de fonctions propres $\psi(x,z)$ bornées en x et définissant une distribution tempérée en Z. Troisièmement, comme la dépendance de l'équation est holomorphe en Z, on trouve formellement que $\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}$ est encore une solution (distribution) de l'équation et doit donc s'exprimer comme combinaison linéaire des $\psi(x,\eta)$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial\psi(x,\zeta)}{\partial\bar{z}} = \int_\Sigma K(x,\zeta,\eta)\ \psi(x,\eta)\,d\eta = K(\psi)$$

où k est un certain noyau que l'on appelle la "transformée spectrale" de u. C'est un fait remarquable que lorsque u évolue selon une des équations non linéaires, citées, k évolue linéairement. (On trouve généralement $K(t,x,\xi,\eta) = e^{it\omega(x,\eta,\xi)}\ k(z,\xi,\eta)$). Quatrièmement il s'agit de reconstruire U (ou ψ) à partir de K, c'est-à-dire de résoudre l'équation

$$\psi(x,\zeta) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{K(\psi)}{\eta-\zeta}\,d\eta = 1 + C\ (\psi)$$

[cette dernière équation n'est rien d'autre que le fait que $\frac{1}{2\pi iZ}$ est une solution fondamentale pour $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$, la constante 1 vient d'une normalisation des fonctions ψ .] Formellement la solution est donnée par une série de Neumann

$$\psi = (I - C)^{-1}\,1 \tag{7}$$

qui converge si l'opérateur C a une norme inférieure à 1 (Autrement le problème est assez délicat).

Ainsi l'équation différentielle est résolue (du moins pour des conditions initiales suffisamment petites) en suivant le schéma :

$$u(x,0) \longrightarrow \psi(x,z,0) \longrightarrow k(x,\xi,\eta,0) \longrightarrow K(x,\xi,\eta,t)$$

$$\longrightarrow \psi(x,z,t) \longrightarrow u(x,t).$$

(Le passage de ψ à u peut se faire de plusieurs manières en particulier on peut substituer ψ dans le problème spectral).

Remarquons que si l'on pose le problème général de caractériser les problèmes spectraux scalaires de type

$$Q(D,Z)\ \psi(x,Z) = u(x)\psi(x,Z)$$

pour lesquels les fonctions propres ψ peuvent s'exprimer par une série de Neumann (7). (Ici l'opérateur C agit sur la variable spectrale) nous sommes conduits a une équation fonctionnelle pour Q

$$[Q(\xi + \zeta + z,z) - Q(\xi,\zeta)]\ p(z,\zeta) = \pi(\xi,\zeta)$$

qui donne (modulo des solutions triviales) $Q(\xi,z) = \xi^2 - z^2$, et une famille $Q_\delta(\xi,z)$ dépendant d'un paramètre qui est donné en (6) et ce sont les seules solutions de l'équation qui dépendent analytiquement de ξ ,z . (Ce résultat a été obtenu en collaboration avec B. Dahlberg).

§ 2. Nous décrivons deux cas de manière plus détaillée.
L'exemple le plus simple correspond au problème spectral matriciel, voir [4] [5].

(*) $$\frac{d}{dx}\mathcal{M} + z[J,\mathcal{M}] = u\,\mathcal{M}$$

ou $u = (u_{ij})$ est une matrice de potentiels avec $u_{ii} \equiv 0$ $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$. (La liaison entre $\mathcal{M}$ et ψ de (1) est donnée par $\mathcal{M} = \psi\, e^{-xzJ}$).

On démontre qu'il existe un ensemble ouvert dense dans L'($\mathbb{R}$) tel que si u appartient à cet ensemble alors il existe une solution unique (matrice fondamentale) $\mathcal{M}(x,z)$ de (*) qui est méromorphe en z pour $z \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, pour tout x, et qui vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathcal{M}(x,Z) = I = \lim\limits_{|z|\to\infty} \mathcal{M}(x,z)$.

En outre les pôles de $\mathcal{M}$ sont simples et ces différentes colonnes ont des pôles distincts. La fonction $\mathcal{M}$ a une extension continue a la fermeture de $\mathbb{C}\setminus\Sigma$:

Ici $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}\quad \mathrm{Re}(\lambda_i - \lambda_j)z = 0$ pour un couple i,j $\}$

voir [4] .

Comme l'indique ce résultat $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}$ est une somme d'un nombre fini de mesures de Dirac (localisés aux pôles) et d'un certain nombre de fonctions supportées en Σ correspondant aux sauts de $\mathcal{M}$. C'est cette information qui nous fournit la transformée spectrale de u. Plus précisément si Σ_ν est un rayon de $\Sigma = \cup_\nu \Sigma_\nu$ et Ω_ν est la région entre $\Sigma_{\nu-1}$ et Σ_ν. On écrit

$$\mathcal{M}^-(x,\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \Omega_\nu}} \mathcal{M}(x,Z) \qquad \xi \in \Sigma_\nu$$

et

$$\mathcal{M}^+(x,\zeta) = \lim_{\substack{Z \to \zeta \\ Z \in \Omega_{\nu+1}}} \mathcal{M}(X,Z)$$

On vérifie que :

$$\mathcal{M}^+(\chi,\zeta) = \mathcal{M}^-(\chi,\zeta)\; e^{X\zeta J} V_\nu(\xi) e^{-x\zeta J} \;, \qquad \xi \in \Sigma_\nu$$

et

$$\operatorname{Res} \mathcal{M}(x,Z_j) = \lim_{z \to z_j} \mathcal{M}(X,Z) e^{xZ_jJ}\, v(Z_j) e^{-xZ_jJ} .$$

Pour certaines matrices $V_\nu(\xi)$ $V(Z_j)$ qui sont uniquement déterminées, et qui en plus déterminent le potentiel u de manière unique.

Ici lorsque u évolue selon (2) nous obtenons que

$$V_v(\xi,t) = e^{t\xi^kJ}\, V_\nu(\xi) e^{-t\xi^KJ}$$

et

$$V(Z_j,t) = e^{tZ_j^KJ}\, V(z_j) e^{-tZ_j^K J}$$

(les pôles Z_j sont stables).

La construction de u a partir de la donnée de v peut se faire à partir de (7) lorsque la "transformée spectrale" v est proche de I.

En réalité la situation est équivalente à résoudre un problème de type Riemann-Hilbert assez délicat et exige l'utilisation de certaines contraintes de nature algébrique vérifiée par la transformée spectrale, voir [5].

Notons enfin que l'on peut (comme pour la transformation de Fourier) convertir une information sur la décroissance de u en régularité de v, de la régularité de u en décroissance de v - I, et réciproquement, voir [5] .

Nous allons esquisser maintenant des résultats d'Ablowitz et Fokas concernant l'équation de Benjamin-Ono , (3).

Le problème spectral associé est pseudodifférentiel :

$$P^+ \frac{1}{i}\frac{d}{dx}\psi - z P^+\psi = U P^+\psi$$

ou $P^+f = \int_0^\infty e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$ qui se convertit en

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\psi^+ - z(\psi^+ - 1) = P^+(u\psi^+) \quad , \qquad \psi^+ = P^+\psi \, .$$

ou encore

$$\psi^+ = 1 + G^+(u\,\psi^+)$$

avec

$$G_z^+(f)(x) = \int_0^\infty \hat{f}(t)\,\frac{e^{ixt}}{t-z}\,dt \qquad\qquad z \notin \mathbb{R}_+ \, .$$

Un calcul simple montre que :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\psi^+ = \alpha(t)e^{ixt} + G_-^+\left(u\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\psi^+\right) \qquad t > 0$$

ou $\alpha(t) = \int e^{-iyt}\,\psi_+^+(y,t)u(y)dy \, , \quad t > 0 \, .$

(ici $G_-^+ = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \; G^+_{\varepsilon > 0\, , t-i\varepsilon}$) c'est à dire $\frac{\partial}{\partial z}\psi^+ = \alpha(t)\;\phi(x,t)$ où ϕ est la fonction propre vérifiant :

$$\phi = e^{ixt} + G_-^+(u\,\phi)$$

Si on écrit $\varphi = e^{-ixt}\phi$ on trouve

$$\varphi = 1 + \int G_-^+ \; (x-y, t-io) e^{-it(x-y)} u\,\varphi(y,t)\,dy \;.$$

$$= 1 + A(\varphi)$$

ou

$$\varphi = (I - A)^{-1} 1$$

ainsi

$$\frac{d}{d\tau}\;\varphi(x,\tau) = -(I - A)^{-1}\left[\frac{d}{d\tau}, A\right]\varphi$$

et un calcul simple montre que

$$\left[\frac{d}{d\tau}, A\right]\varphi = \frac{e^{-ix\tau}}{\tau - io} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+iy\tau}\,\varphi(y,\tau)\,u(y)\,dy = \beta(\tau)\,e^{-ix\tau}$$

d'autre part on vérifie immédiatement que :

$$(I - A)^{-1} e^{-ix\tau} = \psi^+(x, \tau - io)\,e^{-ix\tau}$$

En combinant ces calculs on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\;\psi^+ = e^{\,ix\tau}\,\alpha(\tau) \int^{\tau} \beta(\tau')\,e^{-ix\tau'}\,\psi^+(x, \tau' - io)\,d\tau'$$

$$\overset{\mathrm{def}}{=} K(\psi^+)$$

nous avons donc à résoudre :

$$\psi^+ = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} \frac{K(\psi^+)(x,\tau)}{\tau - z}\,d\tau \;, \quad z \in \mathbb{R}^+ - io \;.$$

Ici la transformée spectrale est donnée par les fonctions α, β qui elles, évoluent linéairement en t, voir [2].

Nous terminons en mentionnant que Ablowitz et Fokas ont réussi à traiter l'équation de Kadomtsev et Petviashvili en suivant le même schéma.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur : The inverse scattering transform - Fourier analysis for non linear problems. Studies Appl. Math. 53 (1974) 249-315.

[2] M. Ablowitz, A. S. Fokas and R. L. Anderson : The direct linearizing tranform and the Benjamin-Ono equation. To appear Phys. Rev. Lett.

[3] M. Ablowitz, A. S. Fokas : On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev-Petviashvili equation". To appear.

[4] R. Beals, R. Coifman : Scattering, transformations spectrales et équations d'évolution non linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-81, exp. 22, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[5] R. Beals, R. Coifman : Scattering and inverse scattering for first order systems. To appear.

[6] Y. Kodama, J. Satsuma, M. Ablowitz : Nonlinear intermediate long wave equation : analysis and method of solution, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 687-690.

***