P. Bérard

Inégalités isopérimétriques et applications. Domaines nodaux des fonctions propres

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

INEGALITES ISOPERIMETRIQUES ET APPLICATIONS
DOMAINES NODAUX DES FONCTIONS PROPRES

par P. BÉRARD

Exposé n° XI

19 Janvier 1982

Le but de cet exposé est de décrire, en le replaçant dans son cadre, un théorème concernant le comportement asymptotique du nombre de domaines nodaux des fonctions propres. Nous énonçons, et nous esquissons la preuve de ce théorème dans la deuxième partie du texte. Cette preuve repose sur une inégalité isopérimétrique "asymptotique". Nous avons obtenu ces deux résultats dans un travail fait en collaboration avec D. Meyer.

La première et la troisième partie du texte décrivent le contexte dans lequel se situe le théorème.

I Quelques résultats classiques.

II Une inégalité isopérimétrique et généralisation d'un théorème de Pleijel.

III Compléments.

I. QUELQUES RESULTATS CLASSIQUES

1. Soit (M,g) une variété riemannienne. Etant donnée une fonction u de $C^{\infty}(M)$, on appelle <u>ensemble nodal</u> de u l'ensemble $u^{-1}(0)$. Les <u>domaines nodaux</u> de u sont les composantes connexes de $M\setminus u^{-1}(0)$.

On se propose de décrire certaines propriétés des solutions d'équations elliptiques (linéaires, d'ordre 2) au moyen de la géométrie de l'ensemble de zéros (ensemble nodal) et de la nature des points critiques (en particulier ceux qui sont sur l'ensemble nodal).

La théorie de Sturm -Liouville fournit, en dimension 1, une telle description. La situation change radicalement quand $\dim M \geqslant 2$ (<u>ce que nous supposerons ici</u>) : voir les exemples d'ensembles nodaux d'harmoniques sphériques de S^2 donnés dans [AT].

2. Nous supposerons désormais que u est une solution de l'équation $(\Delta + h)u = 0$ (où $h \in C^{\infty}(M)$), Δ étant le laplacien de la variété riemannienne (M,g). Soit x_o un zéro de u. On sait ([AR]) que u ne peut pas s'annuler à l'ordre infini en x_o, sans être identiquement nulle. Choisissons des coordonnées normales $(x_1,\dots,x_n)$, $n = \dim M$, centrées en x_o. On a alors

$$u(x_1,\dots,x_n) = p_N(x_1,\dots,x_n) + O(|x|^{N+1}) \tag{3}$$

où p_N est un polynôme homogène de degré N ($N \in \mathbb{N}^{\cdot}$) . De plus (choix de coordonnées <u>normales</u> et [BS])

(4) $$\Delta^{\mathbb{R}^n} p_N = 0$$

Ce qui précède est suffisant pour décrire l'ensemble nodal de u, au moins en dimension 2 (on parle alors de lignes nodales).

5. Proposition ([AT], [CG]) : Sous les conditions du n°2 et avec dim M =2, on a

(i) les points critiques sur les lignes nodales sont isolés;

(ii) quand les lignes nodales se rencontrent elles forment un système équiangulaire;

(iii) si de plus M est compacte, sans bord, l'ensemble nodal de u est formé d'une réunion finie de cercles C^2 immergés.

Esquissons la preuve de cette proposition. De (4) et de l'hypothèse dim M = 2, on déduit que

$$u(x_1,x_2) = \Re e(z^N) + O(|x|^{N+1})$$

où $z = x_1 + ix_2$.

Remarquons que l'on a alors

(6) $$|\mathrm{grad}\, p_N(x)| = 2N|x|^{N-1} .$$

Il résulte de (6) que les points critiques de u sont isolés sur l'ensemble nodal. En fait on peut appliquer un lemme dû à Kuo et généralisé par Cheng ([CG] Lemma 2.4) pour conclure : il existe un C^1-difféomorphisme local F, F(O) = O, tel que $u = p_N \circ F$. Ceci donne une image exacte des singularités de l'ensemble nodal et permet de terminer la preuve. ■

Voir des exemples de lignes nodales dans [C-H] p. 259.

7. Remarque : La condition (6) est purement locale. Elle n'est pas vérifiée en général en dimension supérieure ou égale à 3 (notre attention a été attirée sur ce point par Y. Colin de Verdière, voir [B-M] Appendice E). De ce fait, le théorème 2.2 de [CG] p. 46 n'est pas complètement démontré. Nous l'énonçons comme

8. CONJECTURE : Dans les conditions du n°2 ci-dessus, l'ensemble nodal de u est une variété C^∞ de dimension (n-1) sauf sur un ensemble de codimension au moins 2 .

9. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par (M,g), soit une variété riemannienne C^∞ compacte sans bord, soit un domaine borné, à bord lisse ∂M, d'une variété riemannienne complète sans bord. Nous écrirons

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots \nearrow + \infty$$

le spectre du laplacien Δ de M (avec condition de Dirichlet si $\partial M \neq \emptyset$) : c'est une suite de valeurs propres de multiplicités finies (et écrites avec multiplicités). Nous désignerons par $\{u_i\}$ une base de fonctions propres réelles normalisées.

Etant donnée une fonction u, nous désignerons par $\nu(u)$ le nombre de domaines nodaux de u. Le théorème suivant est classique (voir [C-H] § VI.6 avec l'hypothèse que les domaines nodaux sont C^1 par morceaux, ou [B-M], Appendice D).

10. Théorème (de Courant) : Soit u une fonction propre associée à la $n^{\text{ième}}$ valeur propre λ_n . Alors $\nu(u) \leqslant n$.

II. UNE INEGALITE ISOPERIMETRIQUE ET GENERALISATION D'UN THEOREME DE PLEIJEL

Contrairement à ce qui se passe en dimension 1, l'égalité n'est pas toujours réalisée dans le théorème de Courant : voir [C-H] p. 259. Le théorème suivant dit que l'égalité n'a lieu, dans le théorème de Courant, que pour un nombre fini de valeurs de n. Ce théorème a été démontré par Pleijel ([PL]) pour les domaines de $\mathbb{R}^2$ (avec condition de Dirichlet) et par Peetre ([PE]) pour certains domaines de surfaces riemanniennes. La généralisation énoncée ci-après a été obtenue dans un travail fait en collaboration avec Daniel Meyer (voir [B-M] ou [MR]).

1. Théorème : Soit (M,g) comme au n°I.9, avec n = dim M. Il existe une constante $\gamma(n) < 1$, qui ne dépend que de n, telle que

$$\limsup_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqslant \gamma(n)$$

où $\nu(k)$ est la plus grande valeur possible de $\nu(u)$ quand u décrit l'espace propre associé à λ_k (d'après I.10, on a $\nu(k) \leqslant k$ a priori).

2. Remarques

a) Au moins en dimension 2, la constante $\gamma(2)$ ci-dessus n'est pas trop mauvaise. On a en effet $\gamma(2) = 4/j_o^2$, où j_o est le premier zéro positif de la fonction de Bessel J_o, soit $\gamma(2) = 0{,}691\ldots$ En considérant le cas des fonctions propres de la forme $\sin \pi nx \sin \pi ny$ pour le problème de Dirichlet dans un carré de côté 1, on a (dans ce cas particulier*) $\limsup_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} \geqslant \frac{2}{\pi} = 0{,}636\ldots$ soit $\gamma(2)$ à 10% près (cf. [PL]);

b) Toujours en dimension 2, on peut se demander s'il est possible de trouver une borne inférieure universelle pour $\liminf \{\frac{\nu(u)}{k}$, u $k^{\text{ième}}$ fonction propre, $k \in \mathbb{N}\}$ ou pour $\liminf_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k}$.

La réponse est non. Dans l'espace propre associé à la valeur propre $\pi^2(4n^2+1)$ du carré de côté 1, on peut trouver une fonction propre n'ayant que <u>deux</u> domaines nodaux (voir [C-H] p.396). On peut énoncer une propriété analogue pour les harmoniques sphériques de la sphère S^2 (voir [LY]). Par ailleurs, en remarquant que les valeurs propres du rectangle de côtés 1 et a, $a^2 \notin \mathbb{Q}$, sont simples, on peut montrer facilement que $\liminf_{k\,\infty} \frac{\nu(k)}{k} = 0$, dans ce cas au moins;

c) Si les généralisations du théorème de Courant au cas d'autres conditions au bord (comme celle de Neumann) sont connues (voir [C-H] p.393), il n'en est pas de même du théorème ci-dessus.

La preuve du theorème 1 repose essentiellement sur une inégalité isopérimétrique que nous énonçons sous la forme du

3. Théorème ([B-M] ou [MR]). Soit (M,g) une variété riemannienne lisse, compacte, de dimension n, sans bord. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $A = A(M,g,\varepsilon)$ tel que pour tout domaine V, à bord lisse ∂V de M, de volume inférieur ou égal à A on ait

$$\frac{\mathrm{Vol}(\partial V)}{\mathrm{Vol}(V)^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant (1-\varepsilon)\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial B^n)}{\widetilde{\mathrm{Vol}}(B^n)^{\frac{n-1}{n}}}$$

où Vol (resp. $\widetilde{\mathrm{Vol}}$) désigne le volume riemannien (resp. euclidien) dans M (resp. $\mathbb{R}^n$) en dimension n ou (n-1) et où B^n est une boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$ (la formule ci-dessus est homogène).

---

* mais la constante z/π n'est pas universelle .

Nous donnerons une esquisse de la preuve de ce théorème à la fin de ce paragraphe.

Preuve du Théorème 1 : Il n'est pas difficile d'établir le lemme (cf. [B-M] Appendice D).

4. Lemme : Soit u une fonction propre associée à λ_k et soit D un domaine nodal de u. Alors

$$\lambda_1(D) = \lambda_k$$

où $\lambda_1(D)$ désigne la première valeur propre du problème de Dirichlet généralisé dans D (qui est a priori irrégulier).

Le lemme suivant, qui est une version asymptotique de l'inégalité de Faber-Krahn, se démontre par symétrisation à partir du Théorème 3.

5. Lemme : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre $A = A(M,g,\varepsilon)$ tel que si le volume du domaine D de M est inférieur ou égal à A, alors

$$\lambda_1(D) \geqslant (1-\varepsilon)^2\, \alpha(n)\, \mathrm{Vol}(D)^{-2/n}$$

où $\alpha(n)$ est la première valeur propre du problème de Dirichlet dans une boule euclidienne de volume 1.

Choisissons $\varepsilon > 0$ et A comme dans le lemme 5. Soit u une fonction propre associée à λ_k et ayant $\nu(k)$ domaines nodaux. Il y a au plus ℓ = partie entière de Vol(M)/A domaines nodaux de u de volume supérieur à A. Soient D_i, $1 \leqslant i \leqslant \mu(k)$ les domaines nodaux de u de volume inférieur ou égal à A. On a donc $\mu(k) \leqslant \nu(k) \leqslant \mu(k) + \ell$. Des lemmes 4 et 5, on déduit, pour $1 \leqslant i \leqslant \mu(k)$, que l'on a

$$\lambda_k = \lambda_1(D_i) \geqslant (1-\varepsilon)^2\, \alpha(n) \mathrm{Vol}(D_i)^{-2/n}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\nu(k)}{k} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(M)\lambda_k^{n/2}}{k}\,(1-\varepsilon)^{-n}\,\alpha(n)^{-n/2} + \frac{\ell}{k}\,.$$

Si l'on fait tendre k vers l'infini et si l'on applique la formule asymptotique de Weyl pour les valeurs propres, on trouve $\limsup_{k \to \infty} \frac{\nu(k)}{k} \leqslant (1-\varepsilon)^{-n}\gamma(n)$.

Comme le membre de gauche ne dépend pas de ε on a fini (pour le calcul de $\gamma(n)$ voir [B-M]) . ■

Esquisse de la preuve du Théorème 3 (voir [B-M] Appendice C ou [MR]). La métrique riemannienne de M étant asymptotiquement euclidienne dans de petites boules, on a :

Lemme : Il existe un nombre $\rho = \rho(M,g,\varepsilon)$ tel que l'inégalité du Théorème 3 soit vraie si V est contenu dans une boule $B(x,2\rho)$.

On recouvre alors M par ℓ boules $B(x_i,\rho)$ telles que les $B(x_i, \rho/2)$ soient deux à deux disjointes (ceci pour contrôler ℓ) avec ρ comme dans le lemme ci-dessus. De l'inégalité

$$\mathrm{Vol}(B(x_i,2\rho) \cap V) \geqslant \int_\rho^{2\rho} \mathrm{Vol}(\partial B(x_i,t) \cap V)\,dt$$

on déduit l'existence de ℓ boules B_i de rayon t_i, $\rho \leqslant t_i \leqslant 2\rho$ telles que

$$\mathrm{Vol}(\partial B_i \cap V) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(V)}{\rho} \, . \tag{6}$$

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des composantes connexes de $M \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \partial B_i$. On désigne par V' la réunion disjointe des $V \cap b = V_b$, $b \in \mathcal{B}$.

On a par construction

$$\mathrm{Vol}(\partial V') \leqslant \mathrm{Vol}(\partial V) + \frac{2\ell\,\mathrm{Vol}(V)}{\rho} \, . \tag{7}$$

On applique alors le lemme ci-dessus à chaque V_b (car chaque V_b est dans une boule de rayon inférieur à 2ρ) et l'on trouve

$$\mathrm{Vol}(\partial V) + \frac{2\ell\,\mathrm{Vol}(V)}{\rho} \geqslant (1-\varepsilon)\frac{\widetilde{\mathrm{Vol}}(\partial B^n)}{\widetilde{\mathrm{Vol}}(B^n)^{\frac{n-1}{n}}}\mathrm{Vol}(V)^{\frac{n-1}{n}}$$

et l'on conclut en prenant Vol(V) assez petit. ■

8. <u>Remarque</u> : L'exemple de la sphère usuelle dans $\mathbb{R}^{n+1}$ montre que l'on ne peut pas se passer du ε dans le théorème 3.

III. COMPLEMENTS

Le théorème de Courant (Théorème I.10) et le théorème II.1 se complètent : le premier donne des informations sur les premières fonctions propres, le second donne une information asymptotique. Compte tenu des remarques II.2 et du dessin page 396 de [C-H], il est intéressant de mentionner les résultats 1 et 2 ci-après. La proposition 1 fait partie du folklore (cf.[C-H] § VI.6); le théorème 2 est dû à Brüning et Gromes (cf. [BG] et [B-G]).

1. <u>Proposition</u> : Soit (M,g) comme au n° I.9. Il existe une constante $C = C(M,g)$ telle que toute boule $B(x,r)$ de rayon r supérieur ou égal à $C/\sqrt{\lambda_k}$ rencontre l'ensemble nodal d'une fonction propre associée à λ_k.

Esquissons la preuve : soit $B(x,r)$ une boule qui ne rencontre pas l'ensemble nodal. Alors $B(x,r) \subset D$ l'un des domaines nodaux. Il en résulte que $\lambda_1(B(x,r)) \geqslant \lambda_1(D) = \lambda_k$ (Lemme II.4 et monotonicité des valeurs propres du problème de Dirichlet). Si r est assez petit, il est facile de voir (la métrique riemannienne est asymptotiquement euclidienne dans de petites boules) que $\lambda_1(B(x,r)) \leqslant \frac{G(M,g)}{r^2}$ d'où le résultat. ■

2. <u>Théorème</u> : Soit (M,g) comme au n° I.7 avec $\dim M = 2$. Il existe une constante $C = C(M,g)$, telle que si u_k est une $k^{\text{ième}}$ fonction propre alors

$$L(u_k^{-1}(0)) \geqslant C\sqrt{\lambda_k} .$$

Ici $L(u_k^{-1}(0))$ désigne la longueur de l'ensemble nodal de u_k, ce qui a un sens à cause de la partie (iii) de la proposition I.5.

3. <u>Remarques</u> : Application des résultats. Il convient de citer l'application suivante des résultats du § I.

<u>Théorème</u> ([CG] et [BN]) : Soit (M,g) une <u>surface</u> riemannienne compacte et soit $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \nearrow +\infty$ le spectre du Laplacien. Soit $m_k(g)$ la multiplicité de la $k^{\text{ième}}$ valeur propre $\lambda_k(g)$. Alors

1) Si M est une surface de Riemann de genre p,

$$m_k(g) \leqslant 4p + 2k + 1 \ ;$$

2) Si M est non orientable et si $p = 1 - \chi(M)$,

$$m_k(g) \leqslant 4k + 4p + 3$$

3) Si $M = S^2$, $m_1(g) \leqslant 3$; si $M = \mathbb{R}P^2$, $m_1(g) \leqslant 5$ et si $M = T^2$, $m_1(g) \leqslant 6$ et ces bornes sont atteintes pour plusieurs métriques non isométriques.

Indiquons les pas de la preuve :

1) minoration du nombre de composantes connexes du complémentaire dans M d'une famille de cercles immergés se coupant en un nombre fini de points (en fonction du genre et du nombre de cercles) ;

2) majoration de l'ordre d'annulation d'une $i^{\text{ème}}$ fonction propre en utilisant 1) et la Proposition I.5 ;

3) minoration de l'ordre maximal d'annulation d'une $i^{\text{ème}}$ fonction propre au moyen de la multiplicité de λ_i ;

4) utilisation du théorème de Courant.

Indiquons enfin une propriété et une conjecture : soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

<u>Propriété</u> : Une fonction propre ψ associée à la 2ème valeur propre μ_2 du problème de <u>Neumann</u> dans D ne peut avoir de ligne nodale fermée. (On raisonne par l'absurde et on arrive à une contradiction avec le fait, [BE] p.121, que $\mu_2 < \lambda_1$ = première valeur propre du problème de Dirichlet dans D).

<u>Conjecture</u> (démontrée par Payne, si D est convexe avec un axe de symétrie). Soit φ une deuxième fonction propre pour le problème de Dirichlet dans D. Alors la ligne nodale $\varphi^{-1}(0)$ n'est pas fermée.

REFERENCES

[AR] ARONSAJN, N. : A unique continuation theorem for solutions of elliptic P.D.E. or inequalities of 2^{nd} order, J. Math. Pures Appl. 36 (1957), 235-249.

[AT] ALBERT, J. H. : Nodal and critical sets for eigenfunctions of elliptic operators, in Proc. Symp. Pure Math. Vol. 28, p.71-78, A. M. S. 1973.

[BE] BANDLE, C. : Isoperimetric inequalities and applications, Pitman 1980.

[BG] BRÜNING, J. : Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace Beltrami Operators, Math. Z. 158 (1978), 15-21.

[B-G] BRÜNING, J. & GROMES, D. : Über die Länge der Knotenlinien schwingender Membranen, Math. Z. 124 (1972), 79-82.

[B-M] BERARD, P. & MEYER, D. : Inégalités isopérimétriques et applications, preprint.

[BN] BESSON, G. : Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 109-128.

[BS] BERS, L. : Local behaviour of solutions of general linear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 473-496.

[CG] CHENG, S. Y. : Eigenfunctions and nodal sets, Comment. Math. Helvetici 51 (1976), 43-55.

[C-H] COURANT, R. & HILBERT, D. : Methoden der Mathematischen Physik, I, Dritte Auflage, Springer 1968.

[LY] LEWY, H. : On the minimum number of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere, Comm. Partial Diff. Eq. 2 (1977), 1233-1244.

[MR] MEYER, D. : An asymptotic isoperimetric inequality and it's application to a Pleijel type theorem for compact Riemannian manifolds, in Actes Séminaire Franco-Japonais, Kyoto, Oct. 81, à paraître.

[PE] PEETRE, J. : A generalization of Courant's nodal domain theorem, Math. Scand. 5, (1957), 15-20.

[PL] PLEIJEL, Å. : Remarks on Courant's nodal line theorem, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), 543-550.

*
* *
*