Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

I. Peral Alonso

Remarques sur le problème de Cauchy pour l'équation des ondes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 7, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

REMARQUES SUR LE PROBLEME DE CAUCHY POUR L'EQUATION DES ONDES

par I. PERAL ALONSO

Exposé No VII

16 Décembre 1981

RESUME

Nous avons fait un exposé sur les estimations dans les espaces L^p pour les solutions de l'équation linéaire des ondes. Nous faisons également quelques observations sur l'équation $\square u = F(u)$.

1 - ESTIMATIONS $L^p - L^q$ POUR L'EQUATION LINEAIRE.

On considère le problème

$$(P) \equiv \begin{cases} \square u = u_{tt} - \Delta u = w \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Soit

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} g(x)\, dx$$

la transformée de Fourier de g.
Par application du principe de Duhamel, la solution de (P) doit vérifier :

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)|\xi|}{|\xi|} \hat{w}(\xi,\tau)\, d\tau \quad .$$

(Ici, la transformée de Fourier est considérée seulement dans les variables d'espace.)
Soit $t > 0$ et soit $\mathbb{T}_t$ l'opérateur linéaire défini par le multiplicateur de Fourier

$$\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$$

c'est-à-dire

$$(\mathbb{T}_t f)^\wedge(\xi) = \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \quad .$$

Pour $q \geq p$, si $\mathbb{T}_t$ est borné de L^p dans L^q, par homogénéité, on a

$$\|\mathbb{T}_t\|_{L^p-L^q} = c\ t^{1+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \quad .$$

Si on suppose $w \in L^p(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, alors pour $t \in [0,T]$, l'inégalité intégrale de Minkowski et l'inégalité de Hölder nous donnent

$$\|u(.,t)\|_q \le c \int_0^t (t-\tau)^{1+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|w(.,\tau)\|_p \, d\tau \le$$

$$\le c\ t^{1+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t \|w(.,\tau)\|_p^p \, d\tau\right)^{1/p} \qquad \text{où } \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1 .$$

Alors

$$\int_0^T \|u(.,\tau)\|_q^q \, d\tau \le c\ T^{q(1+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})+\frac{1}{p'})+1} \|w\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n\times[0,T])}$$

ou bien

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \le c\ T^\rho \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times[0,T])}$$

avec $\rho = 1 + n(\frac{1}{q}-\frac{1}{q}) + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$.

Maintenant, il faut montrer pour quels (p,q) l'opérateur $\mathbb{T}_t$ est borné de L^p dans L^q.

Ceci est donné par Strichartz [4], [5] et J.C. Peral [2]. Le théorème suivant résume [4], [5] et [2] dans le cas de l'équation des ondes.

<u>Théorème A</u> : Soit $\mathcal{T}_n$ le triangle fermé avec sommets,

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}, \frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}\right) \quad \text{et} \quad P_3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right).$$

L'opérateur $\mathbb{T}_t$ est borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in \mathcal{T}_n$.

<u>Quelques idées sur la preuve</u> : Par homogénéité, il suffit d'étudier l'opérateur $\mathbb{T}_1$; le comportement de $\|T_t\|_{L^p-L^q}$ a été considéré avant.

1) $\mathbb{T}_1$ <u>est borné de</u> $L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)$ <u>dans</u> $L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}$, c'est-à-dire le cas du sommet P_1 d'après le résultat de Strichartz [4].

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 \le \mathrm{Re}(\alpha) \le \frac{n+2}{2}$, on considère la famille d'opérateurs S_α définie par

$$\widehat{(S_\alpha f)}(\xi) = |\xi|^{\alpha-\frac{n}{2}} J_{\frac{n-\alpha}{2}}(|\xi|)\ \hat{f}(\xi) \quad ,$$

où $J_{\frac{n}{2}-\alpha}$ est la fonction de Bessel.

La dépendance en α est analytique et on a

$$(*) \qquad \|S_\alpha f\|_2 \le c \exp(c\ \mathrm{Im}(\alpha))\ \|f\|_2$$

car il est connu que le comportement des fonctions de Bessel est le suivant :

$$|t^{-(a+ib)} J_{a+ib}(t)| \le c_a \exp(c|b|)(1+t)^{-a-\frac{1}{2}} \qquad \text{si } t > 0 \quad .$$

Mais, d'autre part, si $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$, $\alpha = ib$, $b \in \mathbb{R}$

$$\widehat{S_{ib}} f(\xi) = c(b)\widehat{(1-|y|^2)_+^{ib}}(\xi)\ \hat{f}(\xi)$$

alors $$\|S_{ib} f\|_\infty \le c \exp(c|b|)\ \|f\|_1 \quad .$$

Dans $\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{n+1}{2}$ on a l'inégalité (*). Alors d'après le théorème d'interpolation de Stein pour les familles analytiques d'opérateurs, on trouve que

$$S_{\frac{n-1}{2}} = \mathbb{T}_1$$

est borné de L^p dans L^q, où p et q correspondent au sommet P_1 de $\mathcal{T}_n$.

2) $\mathbb{T}_1$ <u>est borné dans</u> L^p <u>si et seulement si</u> $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{n-1}$.
Cela donne le résultat sur le segment $\overline{P_2P_3}$ de $\mathcal{T}_n$ (voir [2]).
Le résultat pour $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{n-1}$ peut être obtenu par la même méthode qu'en 1). Mais, ici, on va donner les idées pour obtenir l'intervalle fermé.

La première observation est la suivante :

Lemme : Soit $K(r)$ une distribution à support compact et soit $m(r)=\hat{K}(r)$. Alors :

1) $$\frac{dm}{dr}(r) = \left(\sum_1^n R_i(x_i K)\right)^{\wedge}(r)$$

2) $$\frac{d^2m}{dr^2}(r) = \left(\sum_1^n \sum_1^n R_{ij}(x_i x_j K)\right)^{\wedge}(r) \quad ,$$

où R_i et R_{ij} sont les transformées de Riesz d'ordre 1 et 2 respectivement.

Soit μ_n la mesure sur la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ et

$$m(r) = r^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r) \quad , \quad r > 0 \ .$$

Mais alors, $m(|\xi|) = \hat{\mu}_m(|\xi|)$ et le multiplicateur est borné dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Le lemme implique que $\frac{dm}{dr}$ est un multiplicateur borné sur l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$. Aussi $E_{i\beta}$, défini par

$$\widehat{E_{i\beta} f}(\xi) = |\xi|^{i\beta} \hat{f}(\xi) \quad ,$$

est borné sur $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Alors, quelle que soit la combinaison linéaire de $m(|\xi|)|\xi|^{i\beta}$ et $\frac{dm(|\xi|)}{d|\xi|}|\xi|^{i\beta}$ on aura un multiplicateur borné sur $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Mais on a

$$m(|\xi|) = J_{\frac{n}{2}-1}(|\xi|)|\xi|^{1-\frac{n}{2}} =$$

$$= \alpha \frac{\sin|\xi|}{|\xi|^{n/2-1/2}} + \beta \frac{\cos|\xi|}{|\xi|^{n/2-1/2}} + O(|\xi|^{-\frac{(n+1)}{2}}) \quad ,$$

où α et β sont, 0, 1, -1, selon la dimension.

Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t)=0$ si $|t|<1$ et $\psi(t)\equiv 1$ si $|t|>2$. Il se trouve que

$$\psi(|\xi|)\left(\frac{\sin|\xi|}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+i\beta}} \pm \frac{\cos|\xi|}{|\xi|^{\frac{n+1}{2}+i\beta}}\right)$$

est un multiplicateur sur $H^1(\mathbb{R}^n)$, étant donné que le reste est controlé

par une décroissance du type $O(|\xi|^{-(\frac{n+3}{2})})$.
Par application du théorème d'interpolation complexe de Fefferman-Stein [1], on trouve que le multiplicateur

$$\psi(r)\left(\frac{\sin r}{r} \pm \frac{\cos r}{r^2}\right)$$

est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n-1}$.

Il suffit de chercher, selon la dimension, la bonne combinaison de $m(r)$ et $\frac{dm}{dr}(r)$ pour obtenir le fait que $\psi(r)\,\frac{\cos r}{r^2}$ et $\psi(r)\,\frac{\sin r}{r}$ sont des multiplicateurs dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n-1}$.

Alors T_1 a $\frac{\sin r}{r}$ comme multiplicateur et il est borné dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour finir, il faut dire seulement que tous les autres points de $\mathcal{C}_n$ sont obtenus par interpolation. Les résultats négatifs se trouvent dans les références.

<u>Remarques</u> : 1) On peut montrer de la même façon que $\psi(r)\,\frac{\cos r}{r}$ est un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n-1}$.

2) Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et soit $f \in L^p_1(\mathbb{R}^n)$, où $L^p_1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \exists\, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{\hat{g}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{1/2}} = \hat{f}(\xi)\}$ et $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n-1}$.
Alors la solution du problème

$$\begin{cases} \Box u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

vérifie

$$\|u(\cdot,t)\|_p \leq c(t)\,\{\|f\|_{p,1} + \|g\|_p\} .$$

D'après le théorème A et des calculs du début, on a :

<u>Théorème B</u> : Si $(\frac{1}{p},\frac{1}{q}) \in \mathcal{T}_n$, alors la solution de

$$\begin{cases} \Box u = w \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$$

avec $w \in L^p(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, vérifie

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n \times [0,T])} \leq c\, T^\alpha \, \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times [0,T])}$$

où $\alpha = 1 + n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

<u>Remarques</u> : 1) Pour $(\frac{1}{p},\frac{1}{p}) \in \mathcal{T}_n$, on a $\alpha = 2$. Le théorème B résout partiellement un problème de Littman qui prouve avec un contre-exemple que, dans le cas $p > \frac{2n}{n-3}$ (et les conjugués), il n'y a pas d'estimations (p,p). Pour $n = 1$, 2 et 3, le théorème B résout le problème. Pour $n \geq 4$, il y a encore un rang de p à étudier, c'est-à-dire, pour $\frac{2(n-1)}{n-3} < p < \frac{2n}{n-3}$ et les conjugués l'estimation n'est pas connue.

2) La différence $\frac{1}{q} - \frac{1}{q}$ prend sa valeur minimum au point P_1 ; ici p et q sont conjugués et on a $\alpha = 0$. Alors P_1 est le seul point où l'on peut avoir une estimation globale. Ceci est un résultat de Strichartz [5].

2 - QUELQUES REMARQUES POUR LE PROBLEME DE CAUCHY POUR $\Box u = F(u)$.

Une conséquence des résultats $L^p - L^q$ obtenus dans le § 1 est que, si F est une fonction vérifiant

$$|F(u) - F(v)| \leq K|u - v| \quad ,$$

alors le problème de Cauchy avec données initiales

$$u(x,0) = f(x) \in L^p_1(\mathbb{R}^n) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad , \quad |\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n-1} \quad ,$$

admet une solution unique globale telle que pour tout $T > 0$

$$u \in L^p(\mathbb{R}^n \times [0,T]) \quad .$$

La seule information nouvelle est la régularité des données et de la solution (voir [3]).

Les estimations $L^p - L^q$ ont été utilisées également par Strichartz pour ce type de problème semilinéaire (voir [5]).

Pour le cas classique où $F(u) = |u|^{k-1}u$, les résultats suivants de Segal sont bien connus :

1) si $1 \le k \le 1 + \frac{2}{n-2}$, alors le problème a une seule solution classique globale pour des données, par exemple, dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) Pour tout $k \ge 1$, il y a des solutions faibles, mais l'unicité n'est pas connue si $k \ge 5$ pour $n = 3$ et si $k > 1 + \frac{2}{n-2}$ pour $n \ge 4$.

Le cas pour $k < 5$ si $n = 3$ est classique et dû à Jörgens. Il est aussi de nature fonctionnelle parce qu'il basé sur le fait que la fonction $K(x,t)$ telle que

$$\hat{K}(\xi, t) = \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|^2}$$

appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $3/2 < p < \infty$.

Malheureusement, les nouvelles estimations pour le cas F $F(u) = -|u|^{k-1}u$ permettent seulement d'obtenir des résultats locaux en t, pour tout $k \ge 1$.

Dans la dimension $n = 3$, on peut faire une autre remarque qui reste implicite dans le cadre de la théorie :

la solution fondamentale est la mesure canonique sur le cône. Alors si F est supposée décroissante et telle que $F(s) \ge \lambda$ (ou bien $\lambda \ge F(s)$), le problème

$$(P) = \begin{cases} \Box u = F(u) \\ u(x,0) = f(x) \in L_1^\infty(\mathbb{R}^3) \\ u_t(x,0) = g(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

admet une solution unique globale telle que pour tout $T > 0$

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,T]) .$$

Par exemple, $G_1(u) = -|u|^{k-1} \max(u,0)$ et $G_2(u) = |u|^{k-1} \max(-u,0)$ sont des fonctions de ce type.

Mais le problème de l'unicité pour $F(u) = -|u|^{k-1}u$ reste encore ouvert .....

REFERENCES

[1] C. FEFFERMAN, E.M. STEIN : H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972).

[2] J.C. PERAL : L^p-estimates for the wave equations, J. Funct. Analysis, 36, 1 (1980).

[3] I. PERAL, J.C. PERAL, U. WALIAS : L^p-estimates for the inhomogeneous wave equations, (à paraître).

[4] R.S. STRICHARTZ : Convolutions with kernels having singularities on a sphere, Trans. A.M.S. 148 (1970).

[5] R.S. STRICHARTZ : A priori estimates for the wave equations and some applications, J. Funct. Analysis 5, 2 (1970).
