Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

F. Treves

Sur la résolubilité locale et l'intégrabilité locale de systèmes de champs vectoriels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 21, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 0 - 1 9 8 1

SUR LA RESOLUBILITE LOCALE ET L'INTEGRABILITE LOCALE DE SYSTEMES DE CHAMPS VECTORIELS

par F. TREVES

Exposé n° XXI

28 avril 1981

Soit d'abord L un champ vectoriel à coefficients complexes de classe C^∞, ne s'annulant en aucun point, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{m+1}$. Dire que L est <u>localement résoluble</u> dans Ω c'est dire qu'un point arbitraire ω_o de Ω a un voisinage ouvert U_o tel que, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(U_o)$ il existe $u \in \mathcal{D}'(U_o)$ vérifiant

$$(1) \qquad Lu = f$$

dans U_o. On sait que cette propriété est équivalente à la condition (P) (voir [3], [4] ; on peut d'ailleurs trouver la solution u de (1) dans $C^\infty(U_o)$ si U_o est convenablement choisi).

Nous dirons ici que L est <u>localement intégrable</u> dans Ω si, quel que soit ω_o, on peut choisir U_o tel qu'il existe m fonctions C^∞, $Z^1,\dots,Z^m$, dans U_o, vérifiant

$$(2) \qquad LZ^j = 0, \ j = 1,\dots,m \ ;$$

(3) $dZ^1,\dots,dZ^m$ <u>linéairement indépendantes en tout point</u> (nous abrégerons ceci en "$Z^1,\dots,Z^m$ indépendantes").

Lorsque les coefficients de L sont analytiques l'intégrabilité locale de L est automatique : on étend ces coefficients à un voisinage complexe $\tilde{\mathcal{O}}$, de manière holomorphe, et on effectue un changement de variable holomorphe qui transforme L en $\frac{\partial}{\partial z^{m+1}}$: il suffit alors de prendre $Z^j = z^j \Big|_{\mathbb{R}^{m+1} \cap \tilde{\mathcal{O}}}$, $j=1,\dots,m$. Il est démontré dans [8] (ch.I, th. 3.2) que si L (à coefficients C^∞) est localement résoluble L est aussi localement intégrable. La réciproque n'est pas vraie (exemple : l'opérateur de Mizohata $\frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x}$, qui admet "l'intégrale première" $Z = x + it^2$) . Et il existe des champs vectoriels non localement intégrables, comme il a été montré par Nirenberg dans [5], [6] (voir aussi [7]), en s'inspirant d'un travail de Grushin [2].

Les résultats présentés ici sont une généralisation de ceux de Grushin et de Nirenberg à certains systèmes de champs vectoriels. En un premier temps on étudie des champs à coefficients analytiques, dans $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$,

(4) $$L_j = \frac{\partial}{\partial t^j} + \lambda_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x}, \; j = 1,\dots,m.$$

On suppose qu'ils vérifient la condition de Frobénius (les commutateurs $[L_j, L_k]$ sont des combinaisons linéaires des L_j eux-mêmes) qui ici, à cause de la forme spéciale des (4), se lit

(5) $$[L_j,\, L_k] = 0, \; j,k = 1,\dots,m.$$

Le même raisonnement que dans le cas d'un seul champ s'applique : on passe au domaine complexe et on "rectifie". Le système (4) est localement intégrable ; il existe donc une fonction (analytique réelle) $Z = Z(t,x)$ (en général à valeurs complexes) telle que

(6) $$L_j\, Z = 0, \; j = 1,\dots,m \; ;$$

(7) $$Z \Big|_{t=o} = x,$$

où $t = (t^1,\dots,t^m)$; on suppose que les coordonnées t^j, x s'annulent toutes en ω_o .

La première question qui se pose est alors de savoir si le système (4) est localement résoluble, dans le sens suivant :

Définition 1. - On dira que le système (4), $L = (L_1,\dots,L_m)$, est localement résoluble en $\omega_o \in \Omega$ si tout voisinage ouvert U de ω_o dans Ω en contient un autre, V, tel que

(8) Pour toute fonction $f = (f_1,\dots,f_m)$ C^∞ dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}^m$, satisfaisant les conditions de compatibilité

(9) $$L_j\, f_k = L_k\, f_j, \; j,k = 1,\dots,m,$$

il existe $u \in \mathcal{D}'(V)$ vérifiant

(10) $$L_j\, u = f_j,\ j = 1,\ldots,m,$$

dans V.

A noter que (9) est une conséquence immédiate de (5) et de (10), et donc doit être vérifiée.

Dans cette question de résolubilité locale le premier problème est celui de généraliser la condition (P) qui en détermine la réponse lorsque m = 1. Pour cela on reformule (P) dans ce dernier cas, en utilisant la fonction Z de (6)-(7) (ceci est toujours possible dans le cas analytique ; lorsque les coefficients sont C^∞ il faut remplacer (7) par la condition $dZ \neq 0$, c'est-à-dire, à cause de la forme spéciale (4) :

$$Z_x \neq 0).$$

Appelons fibres de Z dans un sous-ouvert Ω' de Ω les pré-images de points sous l'application $Z\ : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors (P) est équivalente à la validité, pour tout $\omega_0 \in \Omega$, de la propriété suivante :

(11) le point ω_0 a une base de voisinages U_ν dans Ω ($\nu=1,2,\ldots$) tels que les fibres de Z dans chaque U_ν soient connexes.

Le lecteur remarquera que (11) garde un sens même lorsque $m > 1$, puisque cet énoncé ne fait intervenir que la fonction Z. D'ailleurs, dans le cas de $m \geq 1$ arbitraire, on peut reformuler (11) d'une manière proche de l'énoncé traditionnel de la propriété (P) :

On commence par supposer que Z a la forme (17)-(18) (voir plus loin). On démontre alors l'équivalence de (11) avec la propriété suivante :

(11') Tout voisinage ouvert U de ω_0 dans Ω en contient un autre, V, tel que n'importe quelle paire de points (t_0, x_0), (t_*, x_*) de V, telle que $x_0 = x_*$, a la propriété suivante :

Il existe une courbe continue, analytique par morceaux, γ, joignant (t_0, x_0) à (t_*, x_*) et le long de laquelle Φ est monotone et $x = x_0$

Maintenant, de (6) on déduit que

$$\lambda_j = -\sqrt{-1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial t^j} \Big/ (1 + i\,\Phi_x) ,$$

d'où, si $b_j = \operatorname{Im}\lambda_j$,

$$d_t\,\Phi = -\,|Z_x|^2 \sum_{j=1}^{m} b_j\, dt^j .$$

Ainsi donc il revient au même de dire que Φ est monotone le long de la courbe γ ou bien que la 1-forme $\sum_{j=1}^{m} b_j\, dt^j$ (qui, comme on le voit, admet un facteur intégrant) ne change pas de signe le long de γ.

Quoiqu'il en soit, ainsi généralisée elle nous permet d'énoncer les deux théorèmes démontrés dans le travail résumé ici :

Théorème I. - Supposons que le système $L = (L_1,\dots,L_m)$, (4), ne satisfasse pas la condition (11).

Alors il existe deux fonctions C^∞, f, g, dans un voisinage ouvert $V_o \subset \Omega$ de ω_o, s'annulant à l'ordre infini en ω_o, et jouissant des propriétés suivantes :

(12) les fonctions $f_j = \lambda_j\, f (j=1,\dots,m)$ vérifient les conditions de compatibilité (9) dans V_o ;

(13) les champs vectoriels dans V_o,

$$L_j^{\#} = L_j - \lambda_j\, g \cdot \frac{\partial}{\partial x} , \quad j = 1,\dots,m,$$

commutent deux à deux.

De plus, quel que soit le voisinage ouvert $V \subset V_o$ de ω_o,

(14) il n'y a aucune distribution u dans V qui satisfasse (10) ;

(15) si $h \in C^1(V)$ est une solution de

(16) $$L_j^{\#}\, h = 0, \quad j = 1,\dots,m,$$

alors $dh(\omega_o) = 0$.

Théorème II. - Supposons que la condition (11) soit vérifiée en tout point ω_o de Ω. Alors le système (4) est localement résoluble en tout point de Ω. Plus précisément, tout voisinage ouvert U de ω_o dans Ω en contient un autre, V, tel qu'étant donnée une fonction C^∞ arbitraire, $f = (f_1,\dots,f_m) \ : \ U \longrightarrow \mathbb{C}^m$, vérifiant (9), il existe $u \in C^\infty(V)$ vérifiant (10) dans V.

Corollaire. - Pour que le système L, (4), soit localement résoluble en tout point de Ω il faut et il suffit que la condition (11) soit satisfaite en tout point de Ω.

Les démonstrations de ces résultats utilisent systématiquement les propriétés des systèmes (4) établies dans [1], dont nous rappelons l'essentiel :

Soit donc $\omega_o \in \Omega$ arbitraire. D'après (7) Re Z a une différentielle non nulle sur $t = 0$; on peut donc prendre Re Z comme coordonnée, et écrire

(17) $$Z(t,x) = x + \sqrt{-1}\ \Phi\ (t,x),$$

où

(18) $$\Phi \text{ est réelle, } \Phi\big|_{t=0} = 0.$$

Nous admettrons que tout ceci vaut dans l'ouvert $U_o \ni \omega_o$.

Les coordonnées t^j, x dans U_o, qui s'annulent en ω_o, étant désormais choisies, nous appelons $\mathcal{B}$ une boule ouverte centrée à l'origine dans l'espace des t, $\mathbb{R}^m$, et J un intervalle borné ouvert sur l'axe des x, tels que la fermeture $\overline{\mathcal{B}} \times \overline{J}$ soit contenue dans U_o.

Théorème 0.1. - Soit h une fonction C^k dans U_o vérifiant

(19) $$L_j h = 0, \ j = 1,\dots,m.$$

Alors h est limite C^k, sur $\overline{\mathcal{B}} \times \overline{J}$, d'une suite de polynômes, à coefficients complexes, par rapport à Z(t,x) (voir(17)).

Introduisons l'opérateur différentiel

(20) $$L_o = Z_x^{-1}(t,x)\ \frac{\partial}{\partial x}.$$

Puisque $L_o\ Z = 1$, et que $L_o\ t^j = 0$, $j = 1,\dots,m$, alors que $L_j\ t^k = \delta_j^k$ (Kronecker), $j,k=1,\dots,m$, et, bien entendu, $L_j\ Z = 0$, et puisque dZ, dt^1, ..., dt^m engendrent l'espace cotangent complexe en tout point de U_o, on voit aussitôt que

(21) $$[L_j, L_k] = 0,\ j = 0,\dots,m, k = 1,\dots,m.$$

Théorème 0.2.- Soit h _une distribution dans_ U_o _qui vérifie_ (19).

Il existe $q \in \mathbb{Z}_+$ _et une fonction continue_ h_1 _dans un voisinage ouvert_ $U_1 \subset U_o$ _de_ $\overline{\mathcal{B}} \times \overline{J}$ _telle que, dans_ U_1,

(22) $$h = L_o^q\ h_1\ ,$$

(23) $$L_j\ h_1 = 0,\ j = 1,\dots,m.$$

En particulier, les théorèmes 0.1 et 0.2 ont la conséquence suivante : Disons que le système (4) est _analytique hypo-elliptique au point_ ω_o si tout voisinage ouvert $U \subset \Omega$ de ω_o en contient un autre V, tel que toute distribution solution de (19) dans U soit une fonction analytique dans V (il revient au même de faire dépendre V de la solution, par un argument de Baire).

Théoreme 0.3. - Pour que le système (4) _soit analytique hypo-elliptique en_ ω_o _il faut et il suffit que l'image de tout voisinage_ $U \subset U_o$ _de_ ω_o _par l'application_ $Z\ :\ (t,x) \longrightarrow Z(t,x)$, _soit un voisinage de_ $Z(\omega_o)$.

En fait cette propriété ne dépend pas du choix de Z pourvu que $dZ(\omega_o) \neq 0$. Bien entendu, le théorème 0.3 donne une condition nécessaire et suffisante d'hypo-ellipticité analytique _dans_ Ω, c'est-à-dire en tout point de Ω (à savoir que les diverses "intégrales premières" Z locales soient ouvertes). Un cas où la condition du théorème 0.3 s'applique est évidemment le cas _elliptique_, ce qui est équivalent, dans le système de coordonnées t^j, x, dans U_o, à dire que

(24) $$\mathrm{Im}(d_t Z) \neq 0,$$

ou, encore, que l'application $(t,x) \longrightarrow Z(t,x)$ a rang _deux_.

Les démonstrations des théorèmes I et II se font par construction : on construit les fonctions f et g du théorème I, on construit la solution $u \in C^\infty(V)$ de (10) dans le théorème II.

Cette dernière construction se fait en deux étapes : on construit d'abord une solution $v \in L^1(V)$ de (10) en étudiant la limite, pour $\varepsilon \longrightarrow +0$, d'intégrales

$$I^{\varepsilon\pm}(t,x) = \frac{1}{2\pi} \iiint e^{i\xi[Z(t,x)-Z(s,y)]-\varepsilon\xi^2} g(y) \quad \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{m} f_j(s,y)ds^j \right) Z_y(s,y)\, dy\, d\xi ,$$

où l'intégration par rapport à y s'effectue sur $\mathbb{R}^1$ ($g \in C_c^\infty(J)$ égale à un dans un voisinage de zéro), celle par rapport à ξ sur l'une des demi-droites $\xi > 0$ ou $\xi < 0$ selon les cas, ce qui explique les signes $\pm$ dans $I^{\varepsilon\pm}$, et celle par rapport à s sur le segment de droite qui joint t à un point $t_o \in \overline{\mathcal{B}}$ où la fonction $\Phi = \operatorname{Im} Z$ vérifie

$$(25) \qquad \xi\, \Phi(t_o,x) \leq \xi\, \Phi(t,x),\ \forall\, t \in \mathcal{B}.$$

Bien entendu t_o dépend de x (et l'on se réserve le droit de contracter la boule $\mathcal{B}$ autour de l'origine). On démontre, au moyen d'une déformation de la courbe d'intégration en s, que sous l'hypothèse (11), dans un sous-voisinage convenable de ω_o, $\mathcal{B}' \times J' \subset\subset \mathcal{B}\times J$, $I^{\varepsilon\pm}(t,x)$ converge uniformément vers une fonction $I^{\pm}(t,x)$, et que de plus, $L_j(I^{\varepsilon+} + I^{\varepsilon-})$ converge, dans L^1, vers $f_j + \lambda_j Q$, où Q est constante sur les fibres de Z dans un sous-voisinage convenable de l'origine dans $\mathcal{B}' \times J'$. L'intégration de

$$(26) \qquad L_j w = \lambda_j Q,\ j = 1,\dots,m,$$

est alors facile. (L'argument précédent schématise beaucoup celui effectivement employé, qui est assez technique.) Dans la deuxième étape on déduit, de l'existence d'une solution L^1, celle d'une solution C^∞ en appliquant la première partie, non pas aux équations (19), mais plutôt aux équations

$$(27) \qquad L_j V_N = L_o^N f_j,\ j = 1,\dots,m,$$

où $N \in \mathbb{Z}_+$ est arbitrairement grand. On applique ensuite l'opérateur $L = (L_1,\dots,L_m)$ à la fonction $L_o^{-N} v_N$, où

$$(L_o^{-1}v)\ (t,x) = \int_{-\infty}^{x} Z_y(t,y)\ v(t,y)\ dy.$$

Ça ne donne évidemment pas tout-à-fait $f=(f_1,\dots,f_m)$, mais on peut "corriger". Puisque la solution ainsi trouvée est de classe C^{N-1}, mais ceci dans un ouvert indépendant de N, le procédé de Mittag-Leffler (appliquable grâce au théorème d'approximation 0.1) donne aussitôt une solution C^∞.

Terminons par une esquisse de la démonstration du th. I. On fait donc l'hypothèse qu'il existe une suite de valeurs $Z_\nu \in \mathbb{C}$, convergeant vers zéro et un voisinage ouvert $U \subset U_o$ de l'origine tels que tout voisinage $V \subset U$ intersecte, pour un certain ν, deux composantes connexes distinctes, S_ν^o et S_ν^1, de la fibre

$$U(Z_\nu) = \{(t,x) \in U\ ;\ Z(t,x) = Z_\nu\}.$$

(On prendra $U \subset\subset U_o$.) Il est facile de voir qu'on peut alors choisir les Z_ν de sorte qu'elles ne soient pas des valeurs critiques de Z dans un certain voisinage $U_1 \subset U_o$ de $\overline{U}$, c'est-à-dire que le rang de Z en tout point de $U(Z_\nu)$ soit égal à deux. Ceci est alors évidemment vrai de tous les Z dans un disque ouvert centré en Z_ν (et contenu dans $Z(U)$!). On choisira un disque ouvert D_ν centré en Z_ν dont la fermeture $\overline{D}_\nu$ soit contenue dans un autre disque ouvert formé de seules valeurs non critiques de Z. On choisit les D_ν de manière à ce que les projections des $\overline{D}_\nu$ sur l'axe réel soient disjointes.

On se réserve le droit de contracter chaque D_ν autour de Z_ν autant qu'on en a besoin. Si le rayon de D_ν est assez petit, $Z^{-1}(D_\nu) \cap U_1$ ne sera pas connexe ; cet ensemble contient alors deux composantes connexes, $\mathcal{C}_\nu^o$ et $\mathcal{C}_\nu^1$, telles que $S_\nu^j \subset \mathcal{C}_\nu^j$ (j=0,1) et $\mathcal{C}_\nu^o \cap \mathcal{C}_\nu^1 = \emptyset$. On se donne alors, pour chaque ν, une fonction $\tilde{f}_\nu \in C_c^\infty(D_\nu)$, $\tilde{f}_\nu \geq 0$ partout, $\tilde{f}_\nu(Z_\nu) > 0$, telle que $\sum_\nu \tilde{f}_\nu$ converge dans $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. On prend alors

$$(28)\qquad \begin{cases} f_\nu = \tilde{f}_\nu \circ Z \text{ dans } \mathcal{C}^o_\nu\,, \\ \\ f_\nu = 0 \text{ partout ailleurs.} \end{cases}$$

On vérifie (ou bien on s'arrange pour) que $\sum\limits_\nu f_\nu$ converge dans $C^\infty(U_1)$; cette somme sera la fonction f du th. I. Cette construction est évidemment inspirée de celle de [5].

On notera que

$$L_j\, f_\nu = \left(\frac{\partial \tilde{f}_\nu}{\partial \overline{Z}} \circ Z\right) L_j\, \overline{Z}, \text{ dans } \mathcal{C}^o_\nu \;(L_j f_\nu = 0 \text{ ailleurs}),$$

mais $L_j\, \overline{Z} = L_j(Z + \overline{Z}) = 2L_j x = 2\lambda_j$. De ceci il suit immédiatement que $f_j = \lambda_j f (j=1,\dots,m)$ satisfont (9) (de(5) il suit que $L_j\, \lambda_k = L_k \lambda_j$).

On va supposer qu'il existe $u \in \mathcal{D}'(V)$ qui vérifie (10) et en déduire une contradiction. On choisit l'entier ν suffisamment grand de manière à ce que de bonnes portions des voisinages tubulaires $\mathcal{C}^j_\nu$ de S^j_ν se trouvent à l'intérieur de $V(j = 0,1)$. Par exemple on aura besoin qu'il existe un point $P^j_\nu \in V \cap S^j_\nu (j=0,1)$ et un disque (à 2 dimensions !) centré en P^j_ν qui soit appliqué difféomorphiquement par Z sur un disque ouvert $D'_\nu \supset \overline{D}_\nu$, au voisinage de la fermeture duquel Z ait rang égal à deux.

Bien entendu $L_j\, u = 0 \;(j = 1,\dots,m)$ dans

$$V \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \overset{-1}{Z}\, (D_\nu).$$

En supposant que les projections sur l'axe réel des disques D'_ν soient disjointes et en utilisant les théorèmes 0.1 et 0.2 on voit que : i) u est une fonction analytique dans la pré-image $\overset{-1}{Z}(D'_\nu \setminus D_\nu)$; ii) u est constante sur les fibres de Z dans cette pré-image (cette dernière propriété est celle qui est essentielle pour la démonstration, et il faut utiliser pleinement le th. 0.1). A noter que puisque le système L est elliptique dans $\overset{-1}{Z}(D'_\nu)$ u est une fonction C^∞ dans cet ouvert. Mais du fait que $f_\nu = 0$ dans $\mathcal{C}^1_\nu$ on en déduit que u est analytique dans $\mathcal{C}^1_\nu$, et on montre qu'elle est constante sur les fibres de Z dans $\mathcal{C}^1_\nu$, donc définit une fonction $\tilde{u}_\nu$ dans D'_ν telle que $u = \tilde{u}_\nu \circ Z$ dans $\mathcal{C}^1_\nu$. Puisque

$$0 = L_j u = \left(\frac{\partial \tilde{u}_\nu}{\partial \overline{Z}} \circ Z\right) L_j \overline{Z}, \text{ et que } \sum_{j=1}^{m} |L_j \overline{Z}| \neq 0$$

dans D'_ν (ceci est équivalent au fait que Z a rang deux), on en déduit que $\tilde{u}_\nu$ est holomorphe dans D'_ν. Mais d'après ce qu'on a dit auparavant, $\tilde{u}_\nu \circ Z$ est égale à u dans $\overline{Z}^{1}(D'_\nu \setminus D_\nu)$. Mais dans $\overline{Z}^{1}(D'_\nu \setminus D_\nu)$,

$$L_j u = \lambda_j \tilde{f} \circ Z.$$

On peut résoudre $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \overline{Z}} = \tilde{f}$ dans $\mathbb{R}^2$. Si $h = (\tilde{u}_\nu - \tilde{v}) \circ Z$ un calcul immédiate montre que $L_j h = 0$, $j = 1,\ldots,m$ dans $\overset{-1}{Z}(D'_\nu)$; h définit une fonction holomorphe $\tilde{h}$ dans D'_ν telle que $h = \tilde{h} \circ Z$. Ceci prouve que $\tilde{v} = \tilde{u}_\nu - \tilde{h}$ s'étend holomorphiquement de $D'_\nu \setminus D_\nu$ à D'_ν entier, donc que

$$0 = \int_{\partial D'_\nu} \tilde{v}\, dZ = \int_{D_\nu}\!\!\int \tilde{f}_\nu \, d\overline{Z} \wedge dZ,$$

ce qui est absurde, puisque $\tilde{f}_\nu \geq 0$, $\tilde{f}_\nu(Z_\nu) > 0$.

Quant à la fonction g du th. I on la choisit de la facon suivante :

(29) $$g = f \,/\, (1 + f \log Z_x) \;,$$

où f est la fonction ainsi notée ci-dessus. Si alors les $L_j^{\#}$ sont définis comme en (13), il est facile de vérifier qu'ils commutent deux-à-deux. On suppose alors qu'il existe $h \in C^1(V)$ telle que

(30) $$L_j h = \lambda_j g \frac{\partial h}{\partial x}\;, \; j = 1,\ldots,m,$$

et on montre que l'on doit avoir $h_x(0,0) = 0$, ce qui entraîne $dh(0,0)=0$. Le raisonnement est le même que celui où $g \frac{\partial h}{\partial x}$ est remplacé par f ci-dessus. En effet on démontre que, dans $\overset{-1}{Z}(D'_\nu)$, $g \frac{\partial h}{\partial x} = \tilde{q} \circ Z$, où $\tilde{q} \in C_c^\infty(D_\nu)$. Et qu'on doit avoir $\int_{D_\nu}\!\!\int \tilde{q}\, d\overline{Z} \wedge dZ = 0$, ce qui est impossible pour les grandes valeurs de ν si $\tilde{q}(0) \neq 0$.

Bibliographie :

[1] Baouendi, M.S. and Treves, F. - A local constancy principle for the solutions of certain overdetermined systems of first - order linear PDE, Advances in Math., vol. in honor of L. Schwartz, Academic Press New York (1981).

[2] Grushin, V.V. - A certain example of a differential equation without solutions, Mat Zametki 10 (1971), 125-128 (Engl. Transl. in Math. Notes 10 (1971), 499-501).

[3] Hörmander, L. - Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo.) differential operators of principal type, Ann. Math. 108 (1978), 569-609.

[4] Hörmander, L. - Pseudodifferential operators of principal type, Singularities in Boundary Value Problems, NATO Advanced Study Institute Series (1981), 69-96

[5] Nirenberg,L.- Lectures on linear partial differential equations, Reg. Conf. series in Math., N°17, Amer. Math. Soc. 1973.

[6] Nirenberg, L.- On a question of Hans Lewy, Uspehi (English translation), (1973), 251-262.

[7] Trèves, F.- Remarks about certain first-order linear PDE in two variables, Comm. PDE, 5 (4) (1980), 381-425.

[8] Trèves, F. - Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields, Publication du Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique (1981), Palaiseau, France.

*
* *