Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Métivier

Hypoellipticité d'opérateurs à caractéristiques multiples

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 1, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

HYPOELLIPTICITE D'OPERATEURS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

par G. METIVIER

Exposé n° I

21 Octobre 1980

I. INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail se trouve dans deux articles, l'un de D. S. Tartakoff [12] l'autre de F. Trèves [14], dans lesquels est démontrée, par deux méthodes complètement différentes, l'hypoellipticité analytique d'opérateurs "du type $\square_b$". Plus précisément F. Trèves considère des opérateurs à caractéristiques doubles et à symbole principal réel, alors que D. S. Tartakoff s'intéresse à des polynômes de champs de vecteurs (2n champs de vecteurs dans un espace de dimension 2n+1, pour être précis) ce qui est évidemment un type particulier d'opérateurs, mais ne limitant pas le degré des polynômes, Tartakoff ne limite pas non plus l'ordre des caractéristiques. Tout cela suggérait fortement d'englober ces deux résultats dans un théorème plus général montrant l'hypoellipticité analytique d'une classe raisonnable d'opérateurs à caractéristiques multiples.

D'autre part, un autre point de repère intéressant est constitué par les résultats d'hypoellipticité C^∞ pour les opérateurs à caractéristiques multiples (F. Trèves [13], L. Boutet de Monvel - F. Trèves [5], L. Boutet de Monvel [3] , J. Sjöstrand [11], A. Grigis [6] , L. Hörmander [8] L. Boutet de Monvel - A. Grigis - B. Helffer [4] ...). On peut d'ailleurs considérer que le résultat présenté ici est un analogue analytique du théorème en C^∞ de [4]

II. ENONCE DU RESULTAT

Maintenant pour être plus précis, considérons un opérateur pseudo-différentiel analytique classique, P, d'ordre m, défini sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de symbole

$$p(x,\xi) \sim p_m(x,\xi) + p_{m-1}(x,\xi) + \dots$$

où p_{m-j} est homogène de degré m-j en ξ.

On suppose que l'ensemble caractéristique $\Sigma = p_m^{-1}(0)$ est une sous-variété réelle analytique de $T^*\Omega \setminus 0$ et que p_m s'annule exactement à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ sur Σ ; on suppose également que p_{m-j} s'annule à l'ordre $k - 2j$ sur Σ , pour $j \leqslant k/2$. Autrement dit P est dans l'évident analogue analytique des classes d'opérateurs considérées en [3], [4] , [11].

En outre, reprenant une notation de [4], pour $(x,\xi) \in \Sigma$ on introduit un opérateur differentiel à coefficients polynomiaux sur $\mathbb{R}^n$:

$$(1) \quad \sigma^k_{x,\xi}(P)(y,D_y) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} p_{m-j}(x,\xi)\, y^{\alpha} D_y^{\beta}$$

On supposera que P satisfait à la condition suivante :

(2) pour tout $(x,\xi) \in \Sigma$ l'opérateur $\sigma^k_{x,\xi}(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Suivant [4] , (2) est une condition nécessaire et suffisante de sous-ellipticité avec perte de k/2 dérivées, et est donc une condition suffisante d'hypoellipticité C^∞ . Dans l'analytique on énonce :

<u>Théorème</u> : Soit P un opérateur vérifiant les hypothèses ci-dessus et en particulier la condition (2). Si la variété caractéristique Σ est symplectique alors P est hypoelliptique analytique.

Rappelons que P est dit hypoelliptique analytique si pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ u est nécessairement analytique là où Pu l'est.

Rappelons aussi que Σ est dite symplectique si la restriction à Σ de la 2-forme canonique $\sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$ est non dégénérée.

La condition "Σ symplectique" a été introduite par F. Trèves [14] ; c'est exactement la condition de non dégénérescence de la matrice de Levi utilisée par D. S. Tartakoff [12] et c'est aussi la condition (H) de [10]. En outre cette condition semble avoir un certain caractère de nécessité (voir [9] pour les opérateurs différentiels du second ordre et à partie principale réelle). En tous cas, on sait bien (cf. [2]) que l'on ne peut pas espérer de résultat d'hypoellipticité analytique comme celui du théorème ci-dessus, sans faire d'hypothèse sur Σ (c'est ici que se trouve la différence entre les résultats en C^∞ et en analytique).

Nous démontrons ce théorème en construisant une parametrix à gauche de P, analytique (i.e. qui décroit le front d'onde analytique). En fait le théorème admet une version microlocale évidente et dans la suite nous travaillerons au voisinage d'un point $(x^0, \xi^0) \in \Sigma$. En outre il est agréable pour des raisons techniques de supposer (et, quitte à multiplier P par un facteur elliptique et à prendre des puissances de P, on peut toujours se ramener à ce cas là) que

$$(3) \qquad m = k > \frac{1}{2} \operatorname{codim} \Sigma \; .$$

III. UN MODELE

Tout d'abord, comme le fait F. Trèves [13], on commence par se ramener au cas où P a une forme particulière; pour cela on utilise une transformation canonique (plus correctement un opérateur intégral de Fourier ou une transformation de contact quantifiée) et , éventuellement, une méthode d'addition de variables.

Pour décrire ce cas modèle nous devons d'abord prendre quelques notations : ν est un entier fixé, $\nu < n/2$, et les X_j $(j = 1,\dots,2\nu)$ sont les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ définis par :

$$(4) \qquad \begin{cases} X_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \dfrac{1}{2} x_{j+\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ \\ X_{\nu+j} = \dfrac{\partial}{\partial x_{\nu+j}} + \dfrac{1}{2} x_j \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{cases} \qquad \text{pour } j = 1,\dots,\nu$$

Comme d'habitude si $I = (j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,2\nu\}^k$ est une suite de longueur k notée $|I|$, on pose $X_I = X_{j_1} \dots X_{j_k}$.

Nous travaillerons au voisinage du point $x^o = 0$, $\xi^o = (0,0,\dots,0,1)$; m étant un entier, $m > \nu$, on suppose dorénavant que P est de la forme :

$$(5) \qquad P = \sum_{|I| \leqslant m} c_I(x,D_x) X_I$$

où les $c_I(x,D_x)$ sont des pseudo-différentiels analytiques classiques de degré 0 (dans un voisinage conique de (x^o, ξ^o)). Plus précisément les $c_I(x,D_x)$ sont donnés par leur symbole

$$c_I(x,\xi) \sim \sum_{j \geqslant 0} c_{I,j}(x,\xi)$$

où les $c_{I,j}$ sont analytiques et homogènes de degré $-j$; ils peuvent être étendus holomorphiquement à un même voisinage conique complexe de (x^o,ξ^o) et y vérifient, pour un certain $C > 0$:

$$(6) \qquad |c_{I,j}(x,\xi)| \leqslant \; ^{j+1}\, j!\, |\xi|^{-j}$$

Il faut remarquer que le cas où les coefficients de l'opérateur (5) sont des fonctions $c_I(x)$, est précisément le cas traité par D. S. Tartakoff [11].

IV. PARAMETRIX FORMELLE

Par habitude nous construisons plutôt une paramétrix à droite de P^*, E, de noyau

(7) $$E(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} a(x,y,\xi)d\xi$$

où l'amplitude a est a priori cherchée sous la forme :

(8) $$a(x,y,\xi) = k(z(x,\xi),y,\xi)$$

$z(x,\xi)$ étant l'application d'un voisinage conique de (x^o,ξ^o) dans $\mathbb{R}^{2\nu}$ définie par :

$$\begin{cases} z_j(x,\xi) = (\xi_{j+\nu} + \frac{1}{2} x_j \xi_n)/\sqrt{\xi_n} \\ z_{\nu+j}(x,\xi) = (\xi_j - \frac{1}{2} x_{j+\nu} \xi_n)/\sqrt{\xi_n} \end{cases} \quad \text{pour } j = 1,\dots,\nu$$

Dans (8), k est une fonction de (z,y,ξ), qui sera vue comme un symbole en (y,ξ) à valeurs dans un espace de fonctions de $z \in \mathbb{R}^{2\nu}$, espace à préciser ultérieurement. De manière générale on notera $\widetilde{op}(k)$ l'opérateur (7) associé à l'amplitude (8).

Par ailleurs on peut considérer une fonction $k(z)$, $z \in \mathbb{R}^{2\nu}$, comme le symbole d'un opérateur K sur $\mathbb{R}^{\nu}$, de noyau $K(t,s)$, la correspondance étant donnée par :

(9) $$k(z) = \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{iuz''} K(z' - u/2, z' + u/2)du$$

où l'on a noté $z = (z',z'')$ avec $z' = (z_1,\dots,z_\nu)$ et $z'' = (z_{\nu+1},\dots,z_{2\nu})$.

On notera $\sigma(K)$ le symbole k associé à l'opérateur K par la formule (9).

Nous terminons ces préliminaires en remarquant que pour $j = 1,\dots,2\nu$ on a :

(10) $$X_j \, \widetilde{op}(k) = \widetilde{op}(\xi_n^{1/2} Z_j k)$$

et

(11) $$Z_j \, \sigma(K) = \sigma(T_j K)$$

avec

$$\begin{cases} Z_j = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_j} + iz_{j+\nu} \\ Z_{j+\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_{j+\nu}} + iz_j \end{cases} ; \quad \begin{cases} T_j = \frac{\partial}{\partial t_j} \\ T_{j+\nu} = it_j \end{cases} \qquad \text{pour } j = 1,\dots,\nu \ .$$

En outre

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial z_j}, \ \sigma(K) = \sigma((\mathrm{ad}\ T_j)(K))$$

où $(\mathrm{ad}\ T_j)(K) = [T_j,K] = T_jK - KT_j$

Revenons maintenant à la construction de la paramétrix : on cherche le symbole k sous la forme d'un développement asymptotique, $k \sim \sum_{j\leqslant 0} k_j$, les k_j étant homogènes en ξ de degré $-(m+j)/2$. Ce qu'il nous faut faire c'est décrire l'action de P^* sur $\widetilde{op}(k)$ et on montre d'abord que

$$(13) \qquad c_I^*(x,D_x)\widetilde{op}(k) \sim \widetilde{op}(h)$$

avec

$$(14) \qquad h \sim \sum_{\substack{\ell\geqslant 0 \\ j\geqslant 0}} \mathcal{U}_{I,\ell} \ k_j$$

$\mathcal{U}_{I,\ell}$ étant un opérateur différentiel de la forme

$$\mathcal{U}_{I,\ell}(y,\xi,\partial_\xi,\partial_z) = \sum_{2|\alpha|+|\beta|\leqslant \ell} c_{\ell,\alpha,\beta}(y,\xi)\partial_\xi^\alpha \partial_z^\beta$$

En outre les $c_{\ell,\alpha,\beta}$ sont homogènes de degré $|\alpha|- \ell/2$, sont holomorphes dans un voisinage conique complexe (fixe) de (x^0,ξ^0) et y vérifient des estimations de la forme

$$(15) \qquad |c_{\ell,\alpha,\beta}(y,\xi)| \leqslant C(C\ell)^{\ell/2 - |\alpha| - |\beta|/2} |\xi|^{|\alpha|- \ell/2}$$

Nous retiendrons en particulier que $\mathcal{U}_{I,\ell}$ baisse le degré en ξ de $\ell/2$

Enfin $\mathcal{M}_{I,0}$ est simplement l'opérateur de multiplication par $\overline{c_{I,0}(y,\xi)}$.

Pour que l'on ait $P^*\widetilde{op}(k) \sim Id$ il suffit alors que l'on ait

$$(16) \qquad \sum_{|I|\leq m} \sum_{\ell,j} Z_I^* \xi_n^{|I|/2} \mathcal{M}_{I,\ell}\, k_j \sim 1$$

Posant $\mathcal{P}_\ell = \sum_{q+m-|I|=\ell} Z_I^* \xi_n^{|I|/2} \mathcal{M}_{I,q}$, et regroupant les termes selon leur homogénéité en ξ, (16) s'écrit

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathcal{P}_0 k_0 = 1 \\ \mathcal{P}_0 k_j = -\sum\limits_{=1}^{j} \mathcal{P}_\ell\, k_{j-\ell} \end{cases}$$

Ecrivant $k_j = \sigma(K_j)$ et utilisant (11) et (12) on transforme les équations (17) en

$$(18) \qquad \begin{cases} Q_0 K_0 = Id \\ Q_0 K_j = -\sum\limits_{\ell=1}^{j} Q_\ell (K_{j-\ell}) \end{cases}$$

où

$$(19) \qquad Q_\ell = \sum_{q+m-|I|=\ell} \sum_{2|\alpha|+|\beta|\leq q} T_I^* \xi_n^{I/2} c_{q,\alpha,\beta}(y,\xi)\partial_\xi^\alpha (adT)^\beta$$

On remarquera que si Q_0 est bien un opérateur de multiplication à gauche, par un opérateur qu'on note encore Q_0, par contre Q_ℓ pour $\ell \geq 1$ fait intervenir des commutateurs avec les T_j et comporte donc des multiplications à droite et à gauche.

V. LES EQUATIONS (18)

Avec les équations (18) nous voilà (enfin!) au cœur du problème; on peut d'ailleurs dire que l'étude de ces équations constitue la seule partie vraiment importante de la démonstration du théorème, le reste étant un petit peu de la routine.

La première chose à faire est d'étudier Q_o : il résulte des calculs ci-dessus que Q_o est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^\nu$ de la forme :

$$Q_o = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} a_{\alpha,\beta}(y,\xi)\, t^\alpha D_t^\beta$$

les coefficients $a_{\nu,\beta}$ étant holomorphes en (y,ξ) et homogènes de degré $m/2$ en ξ .

Il résulte de l'hypothèse d'ellipticuté transverse (i.e. ρ_m s'annule <u>exactement</u> à l'ordre m sur Σ) que

$$\forall\ (t,\tau)\ \in\ (\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)\setminus 0 \qquad \sum_{|\alpha|+|\beta| =m} a_{\alpha,\beta}(x^o,\xi^o)\, t^\alpha \tau^\beta \neq 0\ .$$

et, suivant V. V. Grušin [7], $Q_o(x^o,\xi^o)$ est à indice de son domaine naturel

$$\mathcal{H}^m = \{u \in L^2(\mathbb{R}^\nu)/t^\alpha D_t^\beta\, u \in L^2(\mathbb{R}^\nu) \quad \text{pour } |\alpha| + |\beta| \leq m\ \}$$

dans $L^2(\mathbb{R}^\nu)$.

On remarque ensuite que $Q_o^*(x^o,\xi^o)$ n'est rien d'autre qu'une version irréductible (i.e. obtenue par une diminution maximale du nombre des variables) de l'opérateur $\sigma^m_{x^o,\xi^o}(P)$ et de par la condition (2) $Q_o(x^o,\xi^o)$ est surjectif de son domaine sur $L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Ceci reste vrai pour (x,ξ) voisin de (x^o,ξ^o) et on peut donc construire un inverse à droite $K_o(x,\xi)$ de $Q_o(x,\xi)$. Plus précisément on choisit K_o de sorte que :

$$(20) \qquad \begin{cases} Q_o(x,\xi)K_o(x,\xi) = \mathrm{Id} \\ K_o(x,\xi)Q_o(x,\xi) = \mathrm{Id} - \pi_o(x,\xi) \end{cases}$$

où $\pi_o(x,\xi)$ désigne le projecteur orthogonal dans $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ sur Ker $Q_o(x,\xi)$.

En outre $K_o(x,\xi)$ dépend holomorphiquement de (x,ξ) (en tant qu'opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ dans $\mathcal{H}^m$) et est homogène en ξ de degré $-m/2$.

Les autres équations de (18) se résolvent d'elles-mêmes en posant

$$(21) \qquad K_j = -\ K_o \sum_{\ell=1}^{j} Q_\ell(K_{j-\ell})$$

Les K_j sont alors holomorphes en (x,ξ) homogènes de degré $-(m+j)/2$ en ξ .

VI. ESTIMATIONS

La paramétrix étant maintenant construite, au moins à un niveau formel, la question fondamentale est de montrer son analyticité. Bien entendu cela va résulter des estimations, d'ailleurs très fines, que l'on est en mesure de donner sur les noyaux des K_j.

Notant $\| \ \|_o$ la norme d'un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ dans $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, on montre d'abord qu'il existe un voisinage conique complexe de (x^o,ξ^o) et une constante C; tels que pour tout (x,ξ) dans ce voisinage, toute suite I,J et tout multi indice α vérifiant $|I| + |J| \leqslant |\alpha| + m$, on a

$$(22)\qquad \| T_I(\mathrm{ad}\ T)^\alpha(K_o(x,\xi))T_J\|_o \leqslant C^{|\alpha|+1}((|\alpha|+|I|+|J|)!)^{1/2}\ |\xi|^{-m/2}$$

Ces estimations ont été obtenues par F. Trèves [14] dans le cas m = 2 à la suite de calculs explicites qui semblent voués à l'échec lorsque m > 2. Ces estimations ont aussi été partiellement obtenues en [10], où elles ont servi à montrer l'hypoellipticité analytique d'opérateurs invariants sur des groupes nilpotents, cas où la paramétrix devient une solution élémentaire exacte construite à partir du seul premier terme K_o.

Ce qui est fondamental et résulte de (22) (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse simplificatrice $m > \nu$) c'est que $k_o(y,\xi) = \sigma(K_o(y,\xi))$ se prolonge en fonction entière de $z \in \mathbb{C}^\nu$ et vérifie

$$(23)\qquad |k_o(z,y,\xi)| \leqslant C\ e^{C|\mathrm{Im}\ z|^2}\ |\xi|^{-m/2}$$

En effet il apparaît (voir ci-dessous) que (23) est typiquement une estimation qui assure l'analyticité de $\widetilde{op}(k_o)$. Le problème est donc maintenant de propager cette estimation à travers les equations (18) ou (21), tout en montrant aussi l'analyticité en (y,ξ) du symbole (formel) $\sum_{j\geqslant 0} K_j(y,\xi)$. Le

Le lemme suivant est donc l'élément central de la démonstration du théorème :

Lemme : Il existe une chaîne décroissante d'espaces de Banach B_ε $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$ d'opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, telle que :

i) Les opérateurs ad T_j $(j = 1,\dots,2\nu)$ sont d'ordre 1/2 dans la chaine

ii) Tout opérateur K_o vérifiant

$$(24)\qquad \| T_I(\mathrm{ad}\ T)^\alpha(K_o)T_J\|_o \leqslant C^{|\alpha|+1}((|\alpha|+|I|+|J|)!)^{1/2}$$

pour tous les I, J et α tels que $|I| + |J| \leqslant |\alpha| + m$, est dans l'un des B_ε

iii) Si K_o vérifie (24), la multiplication à gauche par $K_o T_I$, pour $|I| \leqslant m$, est bornée dans la chaîne, pour ε assez petit

iv) Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $K \in B_\varepsilon$ $k = \sigma(K)$ se prolonge en fonction entière de $z \in \mathbb{C}^{2\nu}$ et vérifie :

$$|k(z)| \leqslant \|K\|_{B_\varepsilon} \; C_\varepsilon \; e^{C_\varepsilon |\operatorname{Im} z|^2} .$$

En termes peut être plus clairs, i) signifie qu'il existe $M_o > 0$ tel que pour tous $\varepsilon' < \varepsilon$:

$$\|\operatorname{ad} T_j(K)\|_{B_{\varepsilon'}} \leqslant \left(\frac{M_o}{\varepsilon - \varepsilon'}\right)^{1/2} \|K\|_{B_\varepsilon}$$

et iii) signifie que pour K_o vérifiant (24) il existe ε_o et M tels que, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$ on a

$$\|K_o \, T_I K\|_{B_\varepsilon} \leqslant M \|K\|_{B_\varepsilon}$$

Notons $\Gamma_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C}^n \; / \; |\frac{\xi}{|\xi|} - \xi^o| < \varepsilon\}$; on déduit alors facilement du lemme de (22), de la forme (19) des opérateurs Q_ℓ et de (15), qu'il existe ε_o, $c > 0$ et un voisinage complexe ω de x^o, tels que les K_j, déterminés par la formule de récurrence (21), sont holomorphes sur $\omega \times \Gamma_{\varepsilon_o}$, homogènes de degré $-(m+j)/2$ en ξ, à valeurs dans $\bigcup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_o} B_\varepsilon$ et vérifient pour tout $\varepsilon < \varepsilon_o$:

$$\operatorname*{Max}_{(y,\xi) \in \omega \times \Gamma_\varepsilon} |\xi|^{(m+j)/2} \|K_j(y,\xi)\|_{B_\varepsilon} \leqslant C\left(\frac{Cj}{\varepsilon_o - \varepsilon}\right)^{j/2}$$

Fixant alors $\varepsilon = \varepsilon_o/2$ on en déduit que les $k_j = \sigma(K_j)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}^\nu \times \omega \times \Gamma_\varepsilon$ et vérifient, pour une certaine constante C indépendante de j

$$(25) \qquad |k_j(z,y,\xi)| \leqslant C^{j+1} (j!)^{1/2} |\xi|^{-(m+j)/2} e^{C|\operatorname{Im} z|^2}$$

Il faut noter que ces estimations (25) répondent parfaitement à ce que l'on cherchait la dépendance en z est contrôlée par $e^{C|\operatorname{Im} z|^2}$, correspondant à un type d'estimations qui se sont avérées efficaces en [10], et d'autre part le degré des k_j allant de 1/2 en 1/2 la factorielle est bien $(j!)^{1/2}$, ce qui dit bien que le symbole formel $\Sigma\, k_j$ est analytique en (y,ξ).

VII. PSEUDO-DIFFERENTIELS ANALYTIQUES DE TYPE (ρ,∂)

La construction formelle étant achevée il nous faut maintenant passer à une construction plus exacte et cela pose quelques petits problèmes parce que les pseudo-différentiels analytiques avec lesquels nous sommes amenés à travailler ne sont pas tout à fait classiques : en effet il est bien connu dans le cas C^{∞} que la paramétrix est de type (1/2,1/2) et elle n'a aucune chance de perdre ce caractère dans l'analytique.

Nous allons donc proposer ici ce qui pourrait être une définition des opérateurs pseudo différentiels analytiques de type (ρ,δ) et indiquer de façon succinte comment on peut les utiliser pour achever la démonstration du théorème.

L'amplitude $a(x,\theta)$ $(x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,\ \theta \in \mathbb{R}^n)$ sera dite un symbole analytique de degré μ et de type (ρ,δ) $(0 < \rho \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant \delta < 1)$ si a s'étend holomorphiquement à un voisinage complexe $\tilde{\Omega}$ de Ω de sorte que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \tilde{\Omega}$ il existe $C < 0$ pour lequel :

$$(26)\qquad \begin{cases} \forall\ \beta \in \mathbb{N}^n,\ \forall\ x \in \mathcal{K}\ ,\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}^n, & |\theta| \geqslant C\,|\beta| \\ |\partial_\theta^\beta a(x,\theta)| \leqslant C^{|\beta|+1}(1+|\theta|)^{\mu}\left(\frac{|\beta|}{|\theta|}\right)^{\rho|\beta|} e^{C\,|\mathrm{Im}\ x|^{1/\delta}|\theta|} \end{cases}$$

Si $\delta = 0$ on convient bien sûr que $|\mathrm{Im}\ x|^{1/\delta} = 0$.

Dans le cas $(\rho = 1,\ \delta = 0)$ on retrouve la définition de F. Trèves [15] La restriction $|\theta| \geqslant C|\beta|$ est agréable pour des raisons techniques mais non essentielle si on la supprime il faut toutefois remplacer le terme $\left(\frac{|\beta|}{|\theta|}\right)^{\rho\,|\beta|}$ par $\left(\frac{|\beta| + |\beta|^{\rho}|\theta|^{1-\rho}}{|\theta|}\right)^{|\beta|}$ et on obtient alors que $a(x,\theta)$ se prolonge holomorphiquement dans un cône $|\mathrm{Im}\,\theta| < \varepsilon|\mathrm{Re}\,\theta|$ et y vérifie :

$$(27)\qquad |a(x,\theta)| \leqslant C(1+|\theta|)^{\mu}\ \exp\left(C\left\{|\mathrm{Im}\ x|^{1/\delta} + \left|\frac{\mathrm{Im}\,\theta}{\mathrm{Re}\,\theta}\right|^{\frac{1}{1-\rho}}\right\}|\theta|\right)$$

Avec la définition (26) on peut toujours prolonger a dans un cône $|\mathrm{Im}\ \theta| < \varepsilon|\mathrm{Re}\ \theta|$ sur lequel on aura encore (27), a n'étant pas holomorphe en θ mais cependant tel que $\partial_{\bar{\theta}} a$ soit à décroissance exponentielle en θ .

$$|\partial_{\bar{\theta}}\, a(x,\theta)| \leqslant C\ e^{-\varepsilon'|\theta|}$$

Appliquant la formule de Cauchy on voit que

$$(28)\qquad |\partial_x^{\alpha}\,\partial_\theta^{\beta}\,a(x,\theta)| \leqslant C^{|\alpha|+|\beta|+1}(1+|\theta|)^{\mu}\left(\frac{|\beta|}{|\theta|}\right)^{\rho|\beta|}\left(|\alpha| + |\alpha|^{1-\delta}|\theta|^{\delta}\right)^{|\alpha|}$$

(pour x réel) et on voit alors que a est bien un symbole de type (ρ,δ) au sens de Hörmander .

On peut d'ailleurs dire que dans la définition avec les inégalités (26) (ou de manière équivalente (28)), l'idée est de compenser les pertes dans les puissances de $|\theta|$ dues au type (ρ,δ) par de meilleures factorielles.

Par ailleurs, adaptant très légèrement la construction de K. Anderson [1] on montre qu'étant donnés deux cônes $\Gamma_1 \subset\subset \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ et $0 \leqslant \rho < 1$, il existe $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $C > 0$ tels que

$$\begin{cases} g(\xi) = 0 & \text{pour} \quad \xi \notin \Gamma_2 \text{ ou } |\xi| \leqslant 1 \\ g(\xi) = 1 & \text{pour} \quad \xi \in \Gamma_1 \text{ vérifiant } |\xi| \geqslant 2 \\ \forall \alpha, \forall \xi, \quad |\alpha| \leqslant |\xi| & : |\partial^\alpha g(\xi)| \leqslant C^{|\alpha|+1} \left(\frac{|\alpha|}{|\xi|}\right)^{\rho|\alpha|} \end{cases}$$

Par conséquent si le symbole a est défini seulement dans un cône Γ_2 on peut le tronquer par une telle fonction sans le modifier dans $\Gamma_1 \subset\subset \Gamma_2$ (pour $|\theta| \geqslant 2$) et ensuite l'étendre à $\mathbb{R}^n$ pour obtenir encore un symbole de type (ρ,δ) (si $\rho < 1$) .

Considérons maintenant une suite a_j de symboles de degré $\mu - \mu_j$, $\mu_j > 0$ (avec la condition minime que $\sum_j e^{-\kappa\mu_j} < +\infty$ pour au moins un $\kappa > 0$). On dira que Σa_j est un symbole formel (de type (ρ,δ)) si les a_j s'étendent au même voisinage complexe $\tilde{\Omega}$, et si pour tout compact $\mathcal{K} \subset \tilde{\Omega}$ il existe $C > 0$ tel que pour tout j, tout $x \in \mathcal{K}$, tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, avec $C|\beta| \leqslant |\theta|$ on a

$$(29) \quad |\partial_\theta^\beta a_j(x,\theta)| \leqslant C^{|\beta|+1} \left(\frac{C\mu_j}{|\theta|}\right)^{\mu_j} (1 + |\theta|)^\mu \left(\frac{|\beta|}{|\theta|}\right)^{\rho|\beta|} e^{C|\operatorname{Im} x|^{1/\delta}|\theta|}$$

A un tel symbole formel on attache, comme le fait Trèves [15] , un vrai symbole défini modulo un terme à décroissance exponentielle en $|\theta|$.

Maintenant si $a(x,y,\xi)$ est un symbole de type (ρ,δ) l'opérateur A de noyau

$$\int e^{i(x-y).\xi} \, a(x,y,\xi)\,d\xi$$

est bien défini par la théorie C^∞, de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$. Si a est analytique de type (ρ,δ) alors on montre que A décroit aussi le front d'onde analytique.

Revenons maintenant à notre paramétrix : nous posons $a_j(x,y,\xi) = a_j(x,y,\xi) = k_j(z(x,\xi),y,\xi)$ et il est alors clair que (25) signifie que Σa_j est un symbole analytique formel de type (1/2,1/2) au sens de (29), sur un voisinage conique de (x^0,ξ^0). On peut alors définir $a(x,y,\xi) \sim g(\xi) \sum_j a_j(x,y,\xi)$ modulo un un terme à décroissance exponentielle au voisinage de (x^{o},ξ^{o}). Et l'on sait maintenant que l'opérateur (7), E, ainsi que son adjoint E^* décroiss nt le front d'onde analytique.

Il reste encore à montrer que E est effectivement une paramétrix, et plus précisément que P^*E - Id est somme d'un opérateur à noyau analytique et d'un opérateur associé à un symbole à décroissance exponentielle au voisinage de (x^{o},ξ^{o}). Il reste aussi à justifier les calculs formels du § 4, en particulier les formules de composition (13) et (14). Une fois posée la définition (26) cela apparaît comme de la routine.

---

[1] K. G. ANDERSON : Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients; Ark. för Matematik, 8 (1970), p.277-302.

[2] M. S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC : Non analytic hypoellipticity for some degenerate operators; Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972) p.483.

[3] L. BOUTET DE MONVEL : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators; Comm. on Pure and Appl. Math. 27 (1974), p.585-639.

[4] L. BOUTET DE MONVEL, A. GRIGIS, B. HELFFER : Paramétrixes d'opérateurs pseudo différentiels à caractéristiques multiples; S.M.F. Astérisque 34-35 (1976), p.93-121.

[5] L. BOUTET DE MONVEL, F. TREVES : On a class of systems of pseudo differential equations with double characteristics; Comm. on Pure and Appl. Math., 27 (1974), p. 59-89.

[6] A. GRIGIS : Hypoellipticité et paramétrix pour des opérateurs pseudo différentiels à caractéristiques doubles; S. M. F. Astérisque 34-35 (1976), p.183-205.

[7] V. V. GRUŠIN : On a class of hypoelliptic operators; Mat. Sbornik 83 (185) (1970), p.456-473; Math. U.S.S.R. Sb. 12 (1970), p.458-476.

[8] L. HÖRMANDER : A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics; Math. Ann., 217 (1975), p.165-188.

[9] G. METIVIER : Une classe d'opérateurs non hypoellipticques analytiques; Indiana J. of Math. (à paraître).

[10] G. METIVIER : Hypoellipticité analytique sur des groupes nilpotents de rang 2; Duke Math. J., 47 (1980), p.195-221.

[11] J. SJÖSTRAND : Parametrices for pseudo differential operators with multiple characteristics; Arkiv. för Mat. 12 (1974), p. 85-130.

[12] D. S. TARTAKOFF : The local real analyticity of solutions to $\square_b$ and the $\bar{\partial}$-Neumann problem; Acta Math. (à paraître).

[13] F. TREVES : Concatenation of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity; Comm. on Pure and Appl. Math., 26 (1973), p. 201-250.

[14] F. TREVES : Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators; Comm in Partial Diff. Eq. 3 (1978), p. 475-642.

[15] F. TREVES : Pseudo differential operators and Fourier integral operators; (Livre à paraître).

*
* *
*