J. Sjöstrand

Réflexion et diffraction des singularités analytiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

REFLEXION ET DIFFRACTION DES SINGULARITES ANALYTIQUES

par J. SJÖSTRAND

Exposé n° IX

16 Décembre 1980

0. INTRODUCTION.

On résume ici quelques résultats obtenus dans [4], [8], [11], [15]. Pour un résumé légèrement plus complet, voir [11]. On s'intéresse principalement à l'équation des ondes, mais le résultat de base pour cette équation ne dépend que de l'hyperbolicité du problème et dans la section 2, on donne un résultat général dans ce sens.

1. $WF_a(u)$, $WF_{ba}(u)$.

Pour $a > 0$, soit $M = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |x'| < a, \; 0 \leq x^n < a\} = M' \times [0,a[$. Ici on écrit $x = (x', x^n)$ et on considère M comme une variété à bord $\partial M = M \cap \{x^n = 0\}$. Sur M on considère un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques

$$P = D^m_{x^n} + A_1(x, D_{x'})D^{m-1}_{x^n} + \ldots + A_m(x, D_{x'}) \quad ,$$

où l'opérateur A_j est d'ordre j, scalaire ou éventuellement une matrice $k_o \times k_o$. On dénote par $\mathcal{D}'(M)$ l'espace des distributions sur $\mathring{M}$ qui sont prolongeables à $M' \times]-a,a[$, et par $\mathcal{A}(M)$ les fonctions analytiques jusqu'au bord sur M. De même $\mathcal{A}(\partial M)$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur ∂M. Si $u \in \mathcal{D}'(M)$, $Pu \in C^\infty(M) \supset \mathcal{A}(M)$ il est bien connu que $u \in C^\infty([0,a[\; ; \mathcal{D}'(M'))$ et on peut alors définir $tr(u) = (u(x',0), \ldots, D^{m-1}_{x^n} u(x',0)) \in \mathcal{D}'(\partial M')^{mk_o}$. Guidé par le travail de Schapira [10] on fait alors la définition suivante :

<u>Définition 1</u> : Si $u \in \mathcal{D}'(M)$, $Pu \in \mathcal{A}(M)$, on pose

$$WF_{ba}(u) = WF_a(u_{|\mathring{M}}) \cup WF_a(tr(u)) \subset (\det p)^{-1}(0)_{|\mathring{M}} \cup T^*\partial M \setminus 0 \quad .$$

Ici WF_a désigne le spectre singulier (ou front d'onde) analytique pour des distributions sur des variétés sans bord. Sur $(\det p)^{-1}(0)_{|\mathring{M}} \cup T^*\partial M \setminus 0$ on a une topologie naturelle et d'après Schapira [10] (voir aussi [12], [15] pour des démonstrations alternatives) on a le

<u>Théorème 2</u> : $WF_{ba}(u)$ est fermé.

Il y a aussi une notion plus raffinée ([10], [15]) qui permet de distinguer entre différentes racines complexes de $\det p(x',0,\xi',\xi^n)=0$ quand $(X',\xi')\in T^*\partial M\backslash 0$. C'est un ensemble conique fermé (invariant par changements de coordonnées préservant le bord)

$$WF_a(u)\subset\{(x',0,\xi',\xi^n)\ ;\ (x',\xi')\in T^*\partial M\backslash 0\ ,\ \xi^n\in\mathbb{C}\ ,\ \det p(x',0,\xi)=0\}$$
$$\cup\,(\det p)^{-1}(0)|_{\mathring{M}}\ .$$

$WF_a(u)$ se projette naturellement sur $WF_{ba}(u)$.

2. <u>PROBLEMES AUX LIMITES MICROHYPERBOLIQUES</u> ([15]).

Soit P, M comme ci-dessus et

$$B=\begin{pmatrix}B_1(x',D_x)\\ \vdots\\ B_{m_+}(x',D_x)\end{pmatrix}$$

une matrice $m_+\times k_o$ d'opérateurs différentiels. Si b_j est le symbole principal de B_j on pose

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_{m_1}\end{pmatrix}$$

Soit également γ_o l'opérateur $u\mapsto u|_{x^n=0}$.

Rappelons que le problème (P,B) (ou bien (p,b)) est elliptique au point $(x_o',\xi_o')\in T^*\partial M\backslash 0$, si

(1) $$\det p(x',0,\xi_o',\xi^n)\neq 0\quad ,\quad \forall\ \xi^n\in\mathbb{R}$$

et

(2) $$\gamma_o\, b(x_o',0,\xi_o',D_{x^n})\ :\ (\operatorname{Ker} p(x_o',0,\xi_o',D_{x^n}))\cap\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^{k_o}\longrightarrow\mathbb{C}^{m_+}$$

est bijectif.

On définit alors les problèmes microhyperboliques en utilisant une version microlocale de la condition de Lopatinski faible. Soit $\nu = (\nu_{x'}, \nu_\xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$.

<u>Définition 3</u> : Le problème (P,B) est microhyperbolique en $(x'_o, 0, \xi'_o)$ dans la direction ν, s'il existe un voisinage $V_o \subset T^*\partial M\backslash 0$ de (x'_o, ξ'_o) et des nombres $\varepsilon_o > 0$, $b_o > 0$ tels que pour $(x', \xi') \in V_o$, $-b_o < x^n < b_o$, $0 < t \leq \varepsilon_o$, $\xi^n \in \mathbb{R}$: on ait

(3) $$\det p((x,\xi) + it\nu) \neq 0 \quad ,$$

(4) Le problème

$$(p(x' + it\nu_{x'}, 0, \xi' + it\nu_{\xi'}, it\nu_{\xi^n} + D_{x^n}) \quad ,$$

$$b(x' + it\nu_{x'}, \xi' + it\nu_{\xi'}, it\nu_{\xi^n} + D_{x^n}))$$

est elliptique.

On peut alors généraliser, au cas de problèmes aux limites, un résultat de Kawai-Kashiwara [5].

<u>Théorème 4</u> : Soit $\Psi(x,\xi')$ une fonction réelle, analytique, définie dans un voisinage V de $(x'_o, 0, \xi'_o)$ telle que $\Psi(x'_o, 0, \xi'_o) = 0$ et telle que (P,B) soit microhyperbolique en $(x'_o, 0, \xi'_o)$ dans la direction $-H_\Psi = (-\frac{\partial \Psi}{\partial \xi'}, \frac{\partial \Psi}{\partial x})$. Alors si $u \in \mathcal{D}'(M)$, $Pu \in \mathcal{A}(M)$, $\nu_o Bu \in \mathcal{A}(\partial M)$, $WF_{ba}(u) \cap \{\Psi > 0\} = \emptyset$, on a $(x'_o, 0, \xi'_o) \notin WF_{ba}(u)$.

L'idée de la démonstration est de conjuguer le problème avec un opérateur intégrale de Fourier tangentiel de la forme

$$Q = \int e^{\mu\lambda\tilde{\Psi}(\alpha, x^n)} \pi_{\alpha,\lambda} \, d\alpha$$

où $\mu > 0$ est une petite constante fixée (qui dépend de u), $\lambda \to +\infty$ est un grand paramètre (comme d'habitude dans un formalisme asymptoqie à la Maslov), $\pi_{\alpha,\lambda}$ désigne une résolution de l'identité, $\alpha = (\alpha_{x'}, \alpha_{\xi'})$ et $\tilde{\Psi}(\alpha, x^n)$ est la fonction Ψ convenablement "convexifiée". Ainsi par conjugaison avec Q on trouve un problème elliptique.

Le théorème 4 s'applique à la diffraction pour l'équation des ondes mais ne permet pas de récupérer les résultats de Schapira [10] sur la réflexion tranversale. Il y a cependant une version plus raffinée ([15]) du Théorème 4 en termes de $WF_a(u)$ qui permet aussi de traiter la réflexion transversale ainsi que des problèmes de diffraction pour des problèmes d'ordre > 2. Pour des résultats analogues pour les singularités C^∞, voir la série d'articles d'Ivřii dans le Journal Mathématique de Sibérie dont le premier est [3].

3. L'EQUATION DES ONDES.

Soit $X \in \mathbb{R}^{n-1}_x$ à frontière analytique (au sens des variétés à bord). On s'intéresse au problème

(5) $$\square u \in \mathcal{a}(\mathbb{R}_t \times X)\ ,\ u_{|\mathbb{R}_t \times \partial X} \in \mathcal{a}(\mathbb{R}_t \times \partial X)$$

où $\square = \frac{\partial^2}{\partial_t^2} - \Delta_x$. Tous nos résultats ci-dessous sont également valables pour le problème de Neumann.

Localement par changement de variables on se ramène à

(6) $$Pu \in \mathcal{a}(M)\ ,\ u_{|\partial M} \in \mathcal{a}(\partial M)$$

avec M comme ci-dessus et $P = D^2_{x_n} + R(x, D_{x'})$ où R est de type principal réel. Notant $r(x,\xi')$ le symbole principal on fait la décomposition habituelle

$$T^*\partial M \backslash 0 = \mathcal{H} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{G}$$

où $\mathcal{H}: r_o < 0$, $\mathcal{E}: r_o > 0$, $\mathcal{G}: r_o = 0$, $r_o(\alpha', \xi') = r(\alpha', 0, \xi')$. D'après Schapira [10] on sait alors que $WF_{ba}(u) \subset \Sigma_b \underset{def.}{=} \mathcal{H} \cup \mathcal{G} \cup (p^{-1}(0)|_{\mathring{M}})$.

<u>Définition 5</u> [12] : Un rayon analytique est une courbe <u>continue</u> $\gamma : I \to \Sigma_b$ (où $I \in \mathbb{R}$ est un intervalle) telle que pour tout $t_o \in I$:

1°/ Si $\gamma(t_o) \in p^{-1}(0)|_{\mathring{M}}$, alors γ est dérivable en t_o et $\dot{\gamma}(t_o) = H_p(\gamma(t))$.

2°/ Si $\gamma(t_o) \in \mathcal{H}$, alors $\gamma(t) \in p^{-1}(0)|_{\mathring{M}}$ pour $|t - t_o| > 0$ assez petit.

3°/ Si $\gamma(t_o) \in \mathcal{G}$ et si on écrit $\gamma(t) = (x(t), \xi(t))$, alors $(x'(t), \xi'(t))$

est dérivable en t_o avec la dérivée $= H_{r_o}$.

On rappelle que si $\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}$ est la région diffractive, définie par $\frac{\partial r}{\partial x^n} < 0$ alors on a la définition analogue de rayon C^∞ ([6]) en remplaçant $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ dans $2^o/$.

Le résultat principal qui se déduit du Théorème 4 et les résultats de Schapira sur la réflexion transversale, par un travail purement géométrique est :

<u>Théorème 6</u> ([12]) : Si U est une solution de (6) alors $WF_{ba}(u)$ est une réunion de rayons analytiques maximaux.

Dans la région diffractive, on a des résultats complémentaires. Soit $\rho_o \in \mathcal{G}_+$ et pour $\delta_o > 0$ assez petit considérons l'unique rayon C^∞ : $\gamma :]-\delta_o, \delta_o[\to p^{-1}(0)|_{\mathring{M}} \cup \{\rho_o\}$ et l'unique bicaractéristiqu de r_o : $\alpha :]-\delta_o, \delta_o[\to \mathcal{G}_+$ avec $\alpha(0) = \gamma(0) = \rho_o$. ($\alpha$ est aussi un rayon analytique).

Soient (1) $= \alpha([-\delta_o, 0[)$, (3) $= \alpha(]0, \delta_o])$

(2) $= \gamma([-\delta_o, 0[)$, (4) $= \gamma(]0, \delta_o])$

et soit u une solution de (6). Le Théorème 6 entraîne que

(7) $$((1) \cup (2)) \cap WF_{ba}(u) = \emptyset \Longrightarrow \rho_o \notin WF_{ba}(u) \quad .$$

Dans [13] nous avons montré :

(8) $$((2) \cup (4)) \cap WF_{ba}(u) = \emptyset \Longrightarrow \rho_o \notin WF_{ba}(u) \quad .$$

Indépendamment K. Kataoka [4] obtenait un résultat plus fort, à savoir que (8) est valable même si l'on supprime la condition de Dirichlet :

<u>Théorème 7</u> (Kataoka [4]) : (8) est valable pour toute solution de $Pu \in \mathcal{Q}(M)$.

Dans [11] nous avons obtenu une démonstration alternative du résultat de Kataoka et en même temps un résultat qui montre que l'on peut avoir "non-diffraction" de singularités analytiques :

<u>Théorème 8</u> : Il existe une solution locale U de (6) définie dans un voisinage de la projection de ρ_o telle que $WF_{ba}(u)$ soit le cône engendré par (2) $\cup \{\rho_o\} \cup$ 4 .

Dans [14] nous avons également obtenu le

<u>Théorème 9</u> : Si u est une solution de (6), alors $((2) \cup (3)) \cap WF_{ba}(u) = \emptyset \Rightarrow \rho_o \notin WF_{ba}(u)$.

On regarde finalement le problème mixte

$$(9) \qquad \begin{cases} \Box u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_t \times X \\ u|_{\mathbb{R}_t \times \partial X} = 0 & \\ u(0,x) = 0 \;, & \partial_t u(0,x) = \delta(x - x_o) \end{cases} \quad ,$$

où $x_o \in \mathring{X}$, $X = \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega$, Ω <u>convexe</u> (ou bien le problème correspondant avec la condition de Dirichlet remplacée par la condition de Neumann). Alors on a

<u>Théorème 10</u> (Rauch-Sjöstrand [8]) : Si $n-1 = 2$, alors $WF_{ba}(u)$ est la réunion de tous les rayons analytiques qui passent au-dessus de $(0,x_o)$.

Ce résultat était démontré à l'aide du Théorème 6, un argument géométrique de Rauch [7] et Friedlander-Melrose [1] et une version microlocale du théorème de Holmgren dûe à Sato-Kawai-Kashiwara [9] (et également dans une forme légèrement plus faible à Hörmander [2]).

Utilisant aussi (8) et le Théorème 9 on peut démontrer

<u>Théorème 11</u> [14] : Pour $n \geq 1$, si Ω est strictement convexe, alors on a la même conclusion que dans le Théorème 10.

L'hypothèse de stricte convexité peut être affaiblie, il suffit de supposer que Ω soit convexe et que les rayons qui passent au-dessus de $(0,x_o)$ et qui évitent $\mathcal{G}\backslash\mathcal{G}_+$ soient denses dans l'ensemble des rayons qui passent au-dessus de $(0,\alpha_o)$.

***

BIBLIOGRAPHIE

[1] Friedland-Melrose, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 81 (1977), 97-120.

[2] Hörmander, C.P.A.M. 24 (1971), 671-704.

[3] Ivriĭ, Sibirskii Mat. Jour. 20, 4 (1979), 741-751.

[4] Kataoka,"Microlocal theory of boundary value problems II",à paraître.

[5] Kawai-Kashiwara, Journal Math. Sco. Japan 27 (1975), 359-404.

[6] Melrose-Sjöstrand, Séminaire Goualouic-Schwartz 1977-78, No XV.

[7] Rauch, Bull. Soc. R. Sci. Liège 46, 5-8 (1977), 156-161.

[8] Rauch-Sjöstrand, Indiana Univ. Journal of Math., à paraître.

[9] Sato-Kawai-Kashiwara, Springer L.N. Math. 287.

[10] Schapira, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 12 Suppl. (1977), 441-453.

[11] Sjöstrand, p. 235-269 dans "Singularities in boundary value problems", Reidel Publ. Co. (1981).

[12] Sjöstrand, Comm. P.D.E. 5, 1 (1980), 41-94.

[13] Sjöstrand, Comm. P.D.E. 5, 2 (1980), 187-207.

[14] Sjöstrand, Comm. P.D.E., à paraître.

[15] Sjöstrand, Math. Ann. 254 (1980), 211-256.