

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. ALINHAC

N. LERNER

## **Unicité forte à partir d'une variété de dimension quelconque pour des inégalités différentielles elliptiques**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1979-1980), exp. n° 20,  
p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1979-1980\\_\\_\\_A21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980___A21_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

UNICITE FORTE A PARTIR D'UNE VARIETE DE DIMENSION

QUELCONQUE POUR DES INEGALITES

DIFFERENTIELLES ELLIPTIQUES

par

S. ALINHAC

et

N. LERNER



INTRODUCTION

Dans ce travail, nous présentons tout d'abord un théorème d'unicité pour des solutions d'équations aux dérivées partielles à coefficients  $C^\infty$  (ou d'inégalités différentielles), solutions astreintes à s'annuler à l'ordre infini sur une sous-variété  $V$  de dimension quelconque. Ce théorème étend les résultats obtenus par Alinhac et Baouendi [2] dans le cas où  $V$  est un point, et ses hypothèses relient la partie imaginaire de l'opérateur  $P$  considéré à la géométrie de  $V$  ; la démonstration de ces résultats d'unicité consiste essentiellement à établir des inégalités du type Carleman.

C'est, avec le travail de Baouendi et Zachmanoglou [5] dans le cas analytique, le seul résultat, à la connaissance des auteurs, entre la forte unicité d'un point et l'unicité de Cauchy (cf. Caldéron [6]).

Nous montrons également par la construction de contre-exemples, à rapprocher des travaux de Plis<sup>V</sup> et Hörmander (cf. Hörmander [8]), que les hypothèses "P elliptique" et "P réel sur le fibré conormal de  $V$ " (qui est nécessaire d'après Alinhac [1]) ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution.

Le premier paragraphe est consacré à l'exposé des résultats, le second à la preuve des inégalités de Carleman et le troisième à la construction de contre-exemples. On pourra lire des démonstrations plus détaillées dans un article à paraître.

§ 1 : LES RESULTATS PRINCIPAUX

Soit dans  $\mathbb{R}_x^n$ , au voisinage de l'origine, une sous-variété  $V$  de classe  $C^\infty$  ( $0 \in V$ ), de dimension  $k$ . Notons  $d(x)$  la distance de  $x$  à  $V$ , définie pour  $x$  voisin de  $0$ .

Nous dirons qu'un opérateur  $K(x, D_x)$ , du second ordre, à coefficients  $C^\infty$  réels, est tangent à  $V$  s'il s'écrit

$$K(x, D_x) = \sum_{i,j} K_{ij}(x) Z_i Z_j \quad ,$$

aux termes d'ordre inférieur ou égal à 1 près, les  $Z_i$  étant des champs réels  $C^\infty$  tangents à  $V$ .

Théorème 1 : Soit  $P(x, D_x)$  un opérateur différentiel du second ordre à coefficients (complexes) de classe  $C^\infty$  défini dans un voisinage de l'origine.

Nous supposons que

(i)  $\operatorname{Re} P$  est elliptique.

(ii)  $\operatorname{Im} P$  est tangente à  $V$ .

Si  $u$  de classe  $C^\infty$  est plate sur  $V$  et telle qu'il existe  $C(u) \geq 0$  et un voisinage de l'origine dans lequel on ait

$$|Pu(x)| \leq \frac{C(u)}{|\log d(x)|} \left\{ \frac{|\nabla u|(x)}{d(x)} + \frac{|u|(x)}{(d(x))^2} \right\},$$

alors  $u \equiv 0$  dans un voisinage de l'origine.

Rappelons qu'on dit que  $P$  a la propriété de forte unicité à partir d'une sous-variété  $V$  si la seule solution  $u$ , de classe  $C^\infty$ , plate sur  $V$  de  $Pu = 0$  est triviale.

Un résultat classique d'Aronszajn et Cordes [3], [7] est qu'un opérateur  $P$  du second ordre, elliptique à coefficients réels, possède cette propriété pour  $V = \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le corollaire 2 de Alinhac et Baouendi [2] étend ce résultat au cas où  $P(0, D_x)$  seulement est à coefficients réels; le théorème 1 en constitue une généralisation et l'hypothèse (ii) est suggérée par la condition nécessaire établie par Alinhac [1].

On peut considérer le théorème 1 comme un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy caractéristique relatif à un opérateur de la forme

$L(t, r, \theta, r D_t, r D_r, D_\theta)$  et à la surface initiale  $\{r=0\}$  : il suffit pour cela

d'introduire des coordonnées cylindriques  $(t, r, \theta)$  ( $r=0$  définissant  $V$ ,

$\theta \in S^{n-k-1}$  et  $t$  étant des coordonnées locales sur  $V$ ), et de prendre  $L = r^2 P$ .

L'étude d'un tel problème de Cauchy sur un modèle fournit le théorème 2.

Remarquons également que, compte tenu du résultat classique de Caldéron [6] sur l'unicité de Cauchy, le cadre de la codimension 2 fournit les "premiers" contre-exemples pour des opérateurs à caractéristiques simples (cf. Alinhac [1]).

Théorème 2 : Soit l'opérateur  $L = (r \partial_r)^2 + \partial_\theta + \lambda r^2 \partial_t^2 + i r \lambda_3 \partial_t \partial_\theta$  ,

$\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$  ,  $\lambda_3$  réel,  $k=1$  ,  $\theta \in S^1$ .

(1) Il existe  $m(\lambda_2, \lambda_3) \geq 0$  , fonction homogène de degré 1 de  $\lambda_2$  et  $\lambda_3^2$  ,

( $m=0 \Leftrightarrow \lambda_2 \lambda_3 = 0$ ) , telle que, pour  $\lambda_1 < m(\lambda_2, \lambda_3)$  , il existe une fonction  $u(t, r, \theta)$  , de classe  $C^\infty$  , plate sur  $\{r=0\}$  , et une fonction continue  $a$  satisfaisant

$$\text{Pour tout } N, \quad |a(t, r, \theta)| \leq \frac{C_N}{|\log r|^N} , \quad Lu + au = 0 .$$

(2) Il existe  $m'(\lambda_2, \lambda_3) \geq 0$  , fonction homogène de degré 1 de  $\lambda_2$  et  $\lambda_3^2$  ,

( $m'=0 \Leftrightarrow \lambda_2 \lambda_3 = 0$ ) , telle que pour  $m'(\lambda_2, \lambda_3) < \lambda_1$  , si  $u \in C^\infty$  , plate sur  $\{r=0\}$  , satisfait l'inégalité

$$|Lu(t, r, \theta)| \leq \frac{C(u)}{|\log r|} \{ |ru_r| + |\partial_\theta u| + |ru_t| + |u| \} ,$$

alors  $u \equiv 0$  pour  $r$  assez petit.

On peut remarquer que l'opérateur

$$P = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \lambda_1 \partial_t^2 + i \lambda_2 \partial_t^2 , \quad \lambda_1 < 0 , \lambda_2 \neq 0 ,$$

bien qu'elliptique et réel sur le fibré conormal de  $V$  (mais  $\text{Re } P$  non elliptique) n'a pas la propriété d'unicité demandée.

De plus, pour l'opérateur

$$L = r^2 \Delta_{x,y} + \lambda_1 r^2 \partial_t^2 + i \lambda_2 r^2 \partial_t^2 + i \lambda_3 r \partial_t \partial_\theta , \quad \lambda_2 \lambda_3 \neq 0 ,$$

il existe  $\lambda_1 > 0$  (assez petit) pour lequel cette propriété est également violée.

## § 2 INDICATIONS SUR LA PREUVE DES INEGALITES DE CARLEMAN

Afin de démontrer simultanément le théorème 1 et le théorème 2 (2) on prouve une inégalité du type Carleman pour un opérateur où les variables  $(t, r, \theta)$  ( $t \in \mathbb{R}^k$  ,  $r > 0$  ,  $\theta \in S^{\ell-1}$ ) de la forme

$$(3.1) \quad L = (r \partial_r)^2 + (\ell-1)(r \partial_r) - \Delta_\theta + Q(t, r D_t) + r S ,$$

où  $\Delta_\theta$  est le laplacien positif sur  $S^{\ell-1}$ , dont la racine positive sera notée  $\Lambda$ ;  $Q$  est un opérateur différentiel homogène d'ordre 2 et  $S$  un opérateur différentiel d'ordre 2 en  $r D_t, r D_r, D_\theta$ . En outre la partie réelle du symbole principal de  $Q$  vérifie  $-q_1(t, \tau) > C|\tau|^2$ .

On effectue un changement de variables singulier (dit "éclatement") en posant (cf. [2]).

$$r = (1 - |t|^2)R, \quad t = T.$$

On a 
$$r \partial_r = R \partial_R, \quad r \partial_{t_j} = R(1 - |T|^2) \partial_{T_j} + 2R^2 T_j \partial_R$$

ce dernier champ étant noté  $Y_j$ . Du fait que dans  $Y_j$  le second terme est de la forme  $2RT_j(R \partial_R)$ , on obtient, en conservant les mêmes lettres, que  $L$  s'écrit

$$L = r^2 \partial_r^2 + (\ell-1)r \partial_r - \Delta_\theta + Q(t, r(1 - |t|^2)D_t) + r \tilde{S},$$

où  $\tilde{S}$  est un opérateur du second ordre en  $(1 - |t|^2)r D_t, r D_r, D_\theta$ .

On obtient après éclatement une fonction  $u$  de classe  $C^\infty$  plate sur  $r=0$  et  $|t|=1$  que l'on peut prolonger par 0 sur  $|t| \geq 1$  et satisfaisant une inégalité différentielle analogue,  $r|\partial_t u|$  étant remplacé par  $r(1 - |t|^2)|\partial_t u|$ .

On pose, avec  $\gamma$  grand paramètre,

$$u = e^{\gamma\psi} v, \quad \text{où } \psi = \log r + M \log(\log r^{-1}), \quad 0 < r \leq R < 1,$$

$M$  constante  $> 0$ . On pose également  $\mu = r\psi' = 1 + \frac{M}{\log r}$  ( $\mu$  est proche de 1).

Soit  $L_\gamma = e^{-\gamma\psi} L e^{\gamma\psi}$ ; on a

$$\begin{aligned} L_\gamma &= r^2 \partial_r^2 + (2\gamma\mu + \ell-1)r \partial_r + (\gamma\mu)^2 - \Delta_\theta + r^2 (1 - |t|^2)^2 Q(t, D_t) \\ &\quad + \gamma r \mu' + (\ell-2)\gamma\mu \\ &\quad + r \tilde{S}(t, r, \theta, r(1 - |t|^2)D_t, r D_r - i\gamma\mu, D_\theta), \end{aligned}$$

les cinq premiers termes constituant la "partie principale".

On pose  $L_\gamma = J + K$  avec

$$J = r^2 \partial_r^2 + \alpha r \partial_r + (\gamma\mu)^2 - \Delta_\theta + r^2 (1-|t|^2)^2 Q_1(t, D_t) \\ + \gamma r \mu' + (\ell-2)\gamma\mu + r S_{1,\gamma} ,$$

$$K = (2\gamma\mu + \ell-1-\alpha)r \partial_r + i r^2 (1-|t|^2)^2 Q_2(t, D_t) \\ + r S_{2,\gamma} .$$

En notant  $(v, w)$  le produit scalaire  $\int_D v \bar{w} dr dt d\theta$  ,

$D = (0, R) \times \mathbb{R}_t^k \times S_\theta^{\ell-1}$  , et  $\| \cdot \|$  la norme  $L^2$  correspondante

on obtient (pour  $0 < \varepsilon < 2$ )

$$\| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} L_\gamma v \|^2 = \| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} J v \|^2 \\ + \| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} K v \|^2 + 2 \operatorname{Re} (r^{-1} \mu^{-1-\varepsilon} J v, K v) .$$

Du premier et du troisième terme du membre de droite, il vient, après un long calcul, pour  $\varepsilon_1 > 0$  arbitraire,  $\gamma > \gamma_0(\varepsilon_1)$  et  $R \leq R_0(\varepsilon_1), s > 0$  , l'inégalité fondamentale.

$$(1 + \varepsilon_1) \| r^{-\frac{1}{2}} \mu^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} L_\gamma v \|^2 \geq \\ \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{3}{2}} (1-|t|^2) \nabla_t v_r \|^2 \frac{\nu}{\eta} + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{1}{2}} (1-|t|^2) \nabla_t \Lambda v \|^2 \frac{\nu}{\eta} \\ + \frac{1}{\gamma} \sum_j \| r^{\frac{3}{2}} (1-|t|^2)^2 \nabla_t \partial_{t_j} v \|^2 \frac{C\nu}{\eta} \\ + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{s}{2} + \frac{3}{2}} \partial_r^2 v \|^2 \frac{(1-\nu)}{2} + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{s}{2} - \frac{1}{2}} \Delta_\theta v \|^2 \frac{(1-\nu)}{2} + \frac{1}{\gamma} \| r^{\frac{s}{2} + \frac{1}{2}} \Lambda v_r \|^2 (1-\nu) \\ + \gamma \| r^{\frac{1}{2}} (1-|t|^2) \nabla_t v \|^2 (4C - \frac{\nu}{\eta}) + \gamma \| r^{\frac{1}{2}} \partial_r v \|^2 4(\alpha-1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma \left\| r^{-\frac{1}{2}} |\log r|^{-1} \Delta v \right\|^2 \frac{\varepsilon M}{2} \\
& + \gamma^3 \left\| r^{-\frac{1}{2}} |\log r|^{-1} v \right\|^2 (2-\varepsilon)M \\
& + (\alpha-3) 2 \operatorname{Re} (\partial_r v, r^2 \mu^{-1-\varepsilon} (1-|t|^2)^2 Q_2 v) .
\end{aligned}$$

On peut alors prouver le théorème 1 : il suffit, par un changement de variables, de mettre l'opérateur P sous la forme (3.1) et de choisir  $\alpha = 3$  .

Pour le théorème 2 (2) il faut examiner les modifications introduites par le terme supplémentaire  $i \lambda_3 r \partial_r \partial_\theta$  ; on obtient une inégalité analogue dont le dernier terme est remplacé par

$$2 \operatorname{Re} (\partial_r v, (\alpha-3) \lambda_2 r^2 \mu^{-1-\varepsilon} i (1-t^2)^2 \partial_t^2 v) + 2 \operatorname{Re} (\partial_r v, (\alpha-2) \lambda_3 i r \mu^{-1-\varepsilon} (1-t^2) \partial_{t\theta}^2 v) .$$

Si  $\lambda_1$  est assez grand  $> 0$  on peut trouver une valeur de  $2 < \alpha < 3$  pour laquelle on obtient une inégalité utilisable.

### § 3 INDICATIONS SUR LA PREUVE DU THEOREME 2 (1)

$$\text{Soit } L = (r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 + (\lambda_1 + i \lambda_2) r^2 \partial_t^2 + i \lambda_3 r \partial_t \partial_\theta .$$

On utilise la méthode de l'optique géométrique :

$$\text{si } v(r, \theta, t) = e^{-\nu} \left(\frac{r}{m}\right)^\gamma e^{i \ell \theta + i \tau t} e^{\gamma \varphi(s)} \psi_\gamma(s) ,$$

avec  $\nu, m, \gamma, \tau, \delta$  des paramètres réels  $> 0$ ,  $s = \log \frac{r}{\delta}$  et  $\gamma$  un grand paramètre,  $\tau \delta = \alpha \gamma$ ,  $\ell$  entier  $\ell = C \gamma$ ,  $\alpha \neq 0$  et  $C > 0$  .

On obtient l'équation de phase suivante ( $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$ )

$$\varphi'^2 + 2\varphi' + A = \alpha^2 \lambda (e^{2s} - 1) + i \lambda_3 \alpha C (e^s - 1)$$

avec  $A = 1 - C^2 - \alpha^2 \lambda - i \lambda_3 \alpha C$  .

Les équations de transport viennent de la résolution approchée de l'équation différentielle suivante :

$$\gamma \varphi'' \psi_\gamma + 2 \gamma \psi'_\gamma (\varphi' + 1) + \varphi''_\gamma = 0$$

$$\psi_\gamma \sim \sum_{j \geq 0} a_j \gamma^{-j} .$$

On peut résoudre successivement dans un voisinage fixe de 0 les équations de transport portant sur les  $a_j$  (car  $\varphi'(0) + 1 \neq 0$ ).

On choisit  $\psi_\gamma(0) = 1$ . On peut dégager des conditions suffisantes sur  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  afin que

$$\operatorname{Re} (\varphi'(0) + 1) > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \varphi''(0) < 0 .$$

On considère alors, pour  $b_k = e^{-\mu k}$ ,  $k$  entier, la fonction  $u_k$  "centrée" en  $b_k$  donnée par :

$$u_k = e^{-v_k} \left( \frac{r}{m_k} \right)^{\gamma_k} e^{ik\theta + i\tau_k t} \gamma_k^{\varphi(s_k)} \tilde{\psi}_k(s_k) ,$$

$$\text{où } s_k = \log \frac{r}{b_k} , \quad \tilde{\psi}_k = \psi_{\gamma_k} (1 + f_k) ,$$

$f_k$  étant une fonction de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide en  $k$  que l'on déterminera. On prend

$\gamma_k = \frac{k}{C}$ ,  $\tau_k b_k = \alpha \gamma_k$  où  $\alpha$  et  $C$  sont des constantes strictement positives indépendantes de  $k$ .

On montre que, pour  $k$  assez grand et  $r \in [b_{k+1}, b_k]$ , on a

$$\frac{d}{dr} \log \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| \geq \frac{C_0 k}{r} .$$

On détermine  $v_{k+1} - v_k$  par la relation  $\log \left| \frac{u_k}{u_{k+1}} \right| (m_k) = 0$

et on obtient  $v_k \sim C_1 k^2$ .

En posant  $u = \sum_{k \geq k_0} \chi_k u_k$ , avec  $\chi_k = \chi\left(\frac{1}{\mu} \log \frac{r}{b_k}\right)$ ,  $\chi$  étant une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $] -1, +1[$  telle que, si  $m_k = e^{-\beta \mu} b_k$ ,  $0 < \beta < 1$ , et  $0 < \beta < \beta' < 1$ , avec  $\frac{1}{2} < \beta'$ ,  $\chi$  vaille identiquement 1 sur  $[-\beta', \beta']$ .

On obtient que, sur  $[b_{k+1}, b_k]$ ,  $u = \chi_k u_k + \chi_{k+1} u_{k+1}$ . On pose alors  $a = \frac{Lu}{u}$  et on obtient facilement que, près de  $b_k$ ,  $|a| \leq C_N |\log r|^{-N}$ . Dans la zone "centrale" (près de  $m_k$ ), en posant  $R_k = \frac{Lu_k}{u_k}$ , il vient

$$a = \frac{R_k u_k + R_{k+1} u_{k+1}}{u_k + u_{k+1}} .$$

On utilise la fonction  $f_k$  pour "ajuster"  $R_k$  (ce qui est possible grâce au résultat de Whitney [9]) de telle sorte que  $R_k$  possède un zéro d'ordre infini en  $r = m_k$  et  $r = m_{k-1}$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Alinhac  
Non unicité pour des opérateurs à caractéristiques complexes simples, à paraître Annales de l'ENS.
- [2] S. Alinhac, M.S. Baouendi  
Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities, Amer. J.Math. 102, 1, (1980), 179-217.
- [3] N. Aronszajn  
A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. Pures Appl. (9) 36 (1957), 235-249.
- [4] M.S. Baouendi, F. Trèves, E.C. Zachmanoglou  
Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients, à paraître.
- [5] M.S. Baouendi, E.C. Zachmanoglou  
Unique continuation of solutions of partial differential equations and inequalities from manifolds of any dimension, Duke Math. Journal 45 (1978), 1-13.
- [6] A.P. Calderon  
Existence and uniqueness theorem for systems of partial differential equations, Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math. (Un. of Maryland 1961), Gordon and Breach, New York, (1962) 147-195.
- [7] H. Cordes  
Über die Besotimmtheit der Lösungen elliptischer differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II a (1956), 230-258.
- [8] L. Hörmander  
Non-uniqueness for the Cauchy problem. Colloque International, Université de Nice (1974). Lecture Notes in Mathematics, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations Springer-Verlag 459.
- [9] Whitney  
Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. of the Amer. Math. Society, (36) (1934), 63-89.

\*  
\*   \*  
\*