Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi
G. Métivier

Vecteurs analytiques d'opérateurs hypoelliptiques et de type principal

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 12, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

VECTEURS ANALYTIQUES D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES ET DE TYPE PRINCIPAL

par M. S. BAOUENDI et G. METIVIER

Exposé n° XII

15 Janvier 1980

I. INTRODUCTION

Cet exposé est essentiellement consacré au résultat suivant, obtenu en collaboration avec M. S. Baouendi :

Théorème 1 : Soit $P(x.D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre $m \geqslant 1$ à coefficients analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^\nu$. On suppose que P est de type principal et hypoelliptique. Alors tout vecteur analytique de P est une fonction analytique dans Ω.

Cette propriété des opérateurs hypoelliptiques de type principal (à coefficients analytiques) semble être passée inaperçue jusqu'à maintenant, et ces opérateurs ont donc la "propriété des itérés" (dans les classes analytiques) bien connue pour les opérateurs elliptiques (Kotaké-Narasimhan [4]). Pour ce qui concerne les résultats dans les classes Gevrey, voir le théorème 3 ci-dessous et son commentaire.

Rappelons que P est dit de type principal si son symbole principal $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ vérifie :

$$\forall (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^\nu \setminus 0) \ : \ |p_m(x,\xi)| + \sum_{j=1}^{\nu} \left|\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right| \neq 0$$

Si P est de type principal et à coefficients analytiques, F. Trèves [6] a montré que P est hypoelliptique si et seulement si il est hypoelliptique analytique et a donné d'autres conditions nécessaires et suffisantes qu'on rappellera ci-dessous.

D'autre part si P est un opérateur d'ordre m on appelle vecteur analytique de P (ou plus généralement vecteur Gevrey d'ordre $s \geqslant 1$ de P) une distribution u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P^n u$ soit localement de carré intégrable et telle que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une constante C pour laquelle :

$$(1) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \|P^n u\|_{L^2(K)} \leqslant (n!)^{ms} C^{n+1}$$

(Le cas analytique correspond au cas s = 1).

Enfin rappelons qu'une fonction Gevrey d'ordre s (analytique si s = 1) est une fonction C^∞ telle que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe C pour laquelle :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N} \qquad \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqslant (|\alpha|!)^s\, C^{|\alpha|+1}$$

Le théorème 1 se déduit d'une inégalité intéressante par elle-même et que nous allons maintenant décrire.

On considère donc un opérateur P à coefficients analytiques et un point $(x_o, \xi_o) \in \Omega \times (\mathbb{R}^\nu \setminus 0)$ caractéristique pour P. $(p_m(x_o, \xi_o) = 0)$. On suppose que P est de type principal en (x_o, ξ_o) c'est à dire que $d_\xi\, p_m(x_o, \xi_o) \neq 0$ et on suppose que la condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité de [6] est satisfaite au voisinage de (x_o, ξ_o) :

(2) Il existe un voisinage conique $\omega_o \times \Gamma_o$ de (x_o, ξ_o) et un entier k tels que pour tous $(x,\xi,z) \in \omega_o \times \Gamma_o \times \mathbb{C}$ vérifiant :

$$p_m(x,\xi) = 0, \qquad d_\xi \mathrm{Re}(z\, p_m)(x,\xi) \neq 0$$

la fonction $\mathrm{Im}(z\, p_m)$ restreinte à la bande bicaractéristique de $\mathrm{Re}\,(z\, p_m)$ issue de (x,ξ) a un zéro d'ordre pair et inférieur ou égal à 2k, en ce point.

Nous avons alors :

<u>Théorème 2</u> : <u>Sous les hypothèses précédentes il existe des voisinages</u> $\omega' \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$ <u>de</u> x_o, <u>un voisinage conique</u> $\Gamma \subset \Gamma_o$ <u>de</u> ξ_o <u>et une constante</u> C <u>tels que</u> :

<u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>il existe</u> $\chi_n \in C_o^\infty(\omega)$

<u>valant</u> 1 <u>sur</u> ω' <u>et à valeurs dans</u> $[0,1]$ <u>telle que pour tout</u> $u \in L^2(\omega)$ <u>vérifiant</u> $P^n u \in L^2(\omega)$ <u>on a</u> :

$$|\xi|^{n(m-\delta)}\, |\hat{\chi}_n u(\xi)| \leqslant \frac{C^{n+1}}{(n!)^\delta} \{\|P^n u\|_{L^2(\omega)} + (n!)^m \|u\|_{L^2(\omega)}\} \tag{3}$$

<u>pour tout</u> $\xi \in \Gamma$, <u>et où l'on a noté</u> $\delta = \frac{2k}{2k+1}$, k <u>étant l'entier de la condition</u> (2).

Maintenant si u est un vecteur analytique de P on tire de la définition (1) et de l'inégalité (3) :

$$|\xi|^{n(m-\delta)}\, |\widehat{\chi_n u}(\xi)| \leqslant (n!)^{m-\delta}\, C'^{\,n+1}$$

(pour une certaine constante C'), et on en déduit immédiatement que (x_o, ξ_o) n'est pas dans le front d'onde analytique de u (noté $WF_A(u)$; cf. L. Hörmander [3] pour une définition)

Le théorème 1 en résulte puisque l'on sait d'après P. Bolley, J. Camus, C. Mattera [2] que le $WF_A(u)$ d'un vecteur analytique de P est nécessairement inclus dans l'ensemble caractéristique de P. On obtient une autre démonstration de ce dernier résultat à partir de l'inégalité :

Théorème 3 : Soit P un opérateur elliptique en (x_o,ξ_o). Alors il existe des voisinages $\omega' \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$ de x_o, un voisinage conique I de ξ_o et une constante C tels que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\chi_n \in C_o^\infty(\omega)$, valant 1 sur ω' et à valeurs dans $[0,1]$ telle que pour tout $u \in L^2(\omega)$ vérifiant $P^n u \in L^2(\omega)$ on a :

$$(4) \qquad |\xi|^{nm} |\widehat{\chi_n u}(\xi)| \leqslant C^{n+1} \{\|P^n u\|_{L^2(\omega)} + (n!)^m \|u\|_{L^2(\omega)}\}$$

La comparaison des inégalités (3) et (4) est très intéressante et montre comment, dans le cas de type principal hypoelliptique, la perte de dérivabilité due à la sous-ellipticité (perte-$n\delta$ dans l'exposant de $|\xi|$ au membre de gauche), est compensée par le gain de $(n!)^{-\delta}$ dans le membre de droite.

Remarquons enfin que (3) est strictement plus mauvais que (4), puisque pour $|\xi| \leqslant n$ (3) est triviale à cause du facteur $(n!)^{m-\delta} \|u\|_{L^2(\omega)}$, et que pour $|\xi| \geqslant n$

$$|\xi|^{n(m-\delta)} \leqslant \frac{|\xi|^{nm}}{(n!)^\delta}$$

L'inégalité (3) permet aussi bien d'étudier les vecteurs Gevrey et on a :

Théorème 4 : Soit P de type principal et hypoelliptique. Alors tout vecteur Gevrey d'ordre s de P est une fonction Gevrey d'ordre $s' = \dfrac{sm-\delta}{m-\delta}$.

Ici $\delta = \dfrac{2k}{2k+1}$, k étant le maximum des entiers k de la condition (2) pour tous les (x_o, ξ_o) caractéristiques.

Pour $s = 1$ on retrouve bien $s' = 1$, mais pour $s > 1$, s' est $> s$ ce qui est conforme à ce qu'on savait déjà, puisque d'après [5] les seuls opérateurs dont tous les vecteurs Gevrey d'ordre $s > 1$ sont des fonctions Gevrey du même ordre s sont les opérateurs elliptiques. En outre une adaptation de la démonstration de [5] montre que pour les opérateurs

(5) $$\partial_t + i\, t^{2k}\, \partial_y$$

l'exposant $s' = \frac{s - \delta}{1 - \delta}$ est optimal.

Le théorème 1 éclaire aussi un autre résultat de [5] où il est montré qu'un opérateur autoadjoint dont tous les vecteurs analytiques sont des fonctions analytiques, est nécessairement elliptique. L'importance de l'hypothèse d'autoadjonction est maintenant parfaitement claire.

Dans la suite de cet exposé on donne le schéma de la démonstration du théorème 2 mais les démonstrations, souvent très techniques, des lemmes sont omises. Par contre on se réferera souvent à l'exemple (5) pour éclairer les énoncés.

II. PARAMETRIX FORMELLE

La démonstration du théorème 2 repose sur la construction d'une paramétrix à gauche de P^n qu'on obtient par récurrence sur n à partir de la paramétrix de P construite par F. Trèves [6].

Fixons d'abord quelques notations : on peut faire un changement de coordonnées de sorte que l'on puisse écrire $x = (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\nu-1}$, $x_o = 0$, $\xi_o = (0, \eta_o)$, $p_m(x_o,\xi_o) = 0$ et

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(x_o,\xi_o) \neq 0.$$

Dans un voisinage conique de (x_o,ξ_o) p_m s'écrit alors :

$$p_m(x,\xi) = q(x,\xi)(\tau - \lambda(x,\eta))$$

où q est elliptique de degré (m-1) et λ est homogène en η de degré 1.

On considère alors la fonction "phase" $\varphi(t,s,y,\eta)$ solution du problème de Cauchy-Kowalewska :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda(t,s,y,\eta - dy\,\varphi \\ \varphi|_{t=s} = 0 \end{cases}$$

φ est définie et analytique pour t et s dans un intervalle $]-T,T[$, y dans un voisinage de 0 et η dans un voisinage conique de η_o. En outre φ est homogène de degré 1 en η et F. Trèves ([6] p.559) a montré que, quitte à changer t en -t, on a :

Lemme 5 : Dans un voisinage conique de $(0,0,0,\eta_o)$ la fonction φ vérifie :

(6) $$\operatorname{Im} \varphi(t,s,y,\eta) \geqslant C\,|\eta|\,(t-s)^{2k+1} \quad \text{pour } t > s.$$

L'entier k est celui de la condition (2) et on ne fera intervenir l'hypothèse d'hypoellipticité que par l'intermédiaire de ce lemme et de l'inégalité (6).

Exemple : Pour l'opérateur (5) $P = \frac{\partial}{\partial t} + it^{2k}\frac{\partial}{\partial y}$ on a :

$$\varphi(t,s,\eta) = \frac{i}{2k+1}\,(t^{2k+1} - s^{2k+1})\eta$$

On cherche maintenant une paramétrix K_n de P^n à partir de la formule

(7) $$\hat{K}_n u(\xi) = \int e^{-iy\eta}\left\{\int_{-T}^{t} e^{i\varphi(t,s,y,\eta)-is\tau} k_n(t,s,y,\tau,\eta)\,ds\right\} u(t,y)\,dt\,dy$$

$\hat{K}_n u$ étant la transformée de Fourier de $K_n u$.

Dans (7) la fonction k_n est cherchée comme un symbole analytique (au sens de F. Trèves [7]), et on peut aussi bien écrire K_n comme l'opérateur pseudo différentiel

(8) $$K_n u(x') = (2\pi)^{-\nu}\int e^{i(x'-x).\xi}\, a_n(x,\xi)\,u(x)\,dx\,d\xi$$

où l'amplitude a_n est donnée par :

(9) $$a_n(x,\xi) = \int_{-T}^{t} e^{i\varphi(t,s,y,\eta)+i(t-s)\tau}\, k_n(t,s,y,\tau,\eta)\,ds$$

Regardons d'abord l'action de ${}^tP$ sur une quantité du type $e^{-ix.\xi}a_n(x,\xi)$:

(10) $$\begin{aligned} &{}^tP(x,D_x)\left\{e^{-iy\eta}\int_{-T}^{t} e^{i\varphi - is\tau} k\,ds\right\} = \\ &\qquad e^{-iy\eta}\int_{-T}^{t} e^{i\varphi - is\tau}\,\tilde{P}k\,ds + e^{-iy\eta - it\tau}\,(\tilde{\tilde{P}}k)\Big|_{t=s} \end{aligned}$$

où $\widetilde{P}$ et $\widetilde{\widetilde{P}}$ sont de la forme :

$$\begin{cases} \widetilde{P} = \sum_{\ell=0}^{m} \widetilde{P}_\ell(t,s,y,\eta,D_t,D_y) \\ \widetilde{\widetilde{P}} = \sum_{\ell=0}^{m-1} \widetilde{\widetilde{P}}_\ell(t,s,y,\tau,\eta,D_t,D_s,D_y) \ . \end{cases}$$

$\widetilde{P}_\ell$ [resp $\widetilde{\widetilde{P}}_\ell$] étant un opérateur différentiel d'ordre $m-\ell$ [resp $m-\ell-1$] à coefficients analytiques et homogènes en $\xi=(\tau,\eta)$ de degré ℓ.

En outre on a (cf [6]).

<u>Lemme 6</u> : <u>Avec les notations ci-dessus $\widetilde{P}_m = 0$, $\widetilde{P}_{m-1}$ qui est un opérateur d'ordre 1, est non caractéristique en D_t, et $\widetilde{\widetilde{P}}_{m-1}$ (qui est une fonction) est elliptique.</u>

La première assertion résulte de ce que $\widetilde{P}_m(x,\xi) = p_m(x,-d_t\varphi\ ,\eta - d_t\varphi)$ et du choix de φ.

Les deux autres assertions résultent de l'hypothèse que P est de type principal en (x_o,ξ_o) .

On cherche la paramétrix K_n avec un symbole

$$k_n \sim \sum_{j\geqslant o} k_{n,j}$$

où $k_{n,j}$ est homogène de degré $-n(m-1)-j$ et on obtient k_n par récurrence sur n en résolvant :

$$(11) \qquad \begin{cases} \widetilde{P}\, k_1 \sim 0 \\ (\widetilde{\widetilde{P}}\, k_1)\big|_{s=t} \sim 1 \end{cases}$$

puis pour $n \geqslant 2$:

$$(11') \qquad \begin{cases} \widetilde{P}\, k_n \sim k_{n-1} \\ (\widetilde{\widetilde{P}}\, k_n)\big|_{t=s} \sim 0 \end{cases}$$

Identifiant les parties homogènes de même degré, (11) et (11') se réécrivent en

$$(12) \qquad \begin{aligned} \widetilde{P}_{m-1}\, k_{n,j} &= k_{n-1,j} - \sum_{\ell=2}^{m} \widetilde{P}_{m-\ell}\, k_{n,j-\ell+1} \\ (\widetilde{\widetilde{P}}_{m-1}\, k_{n,j})\big|_{t=s} &= b_{n-1,j} - \Big(\sum_{\ell=2}^{m} \widetilde{\widetilde{P}}_{m-\ell}\, k_{n,j-\ell+1}\Big)\Big|_{t=s} \end{aligned}$$

en convenant que $k_{o,j} = 0$ pour tout j et que $b_{n-1,j} = 0$ sauf pour $n = 1$, $j = 0$ ou $b_{o,o} = 1$.

Avec le lemme 6, le système (12) est un système non caractéristique en D_t et se résoud par le théorème de Cauchy-Kowalewska. Avec un peu plus de soins on obtient :

<u>Lemme 7</u> : <u>Le système</u> (12) <u>admet une solution unique, les</u> $k_{n,j}$ <u>étant holomorphes en</u> (t,s,y,ξ) <u>dans un voisinage conique complexe de</u> $(0,0,0,\xi_o)$ <u>et en outre vérifient une estimation du type</u> :

$$|k_{n,j}| \leqslant C_1^{n+j+1} \frac{j!}{n!} |t-s|^{(n-j-1)_+} |\xi|^{-n(m-1)-j}$$

$(n-j-1)_+$ vaut $n-j-1$ si $j \leqslant n-1$ et vaut 0 si $j \geqslant n-1$.

Le point crucial pour l'inégalité (2) réside dans la présence du facteur $\dfrac{(t-s)^{(n-j-1)_+}}{n!}$ dans ces estimations.

<u>Exemple</u> : Si $P = \frac{\partial}{\partial t} + i\, t^{2k} \frac{\partial}{\partial y}$ alors $\tilde{P} = -\frac{\partial}{\partial t}$ et $\approx\!\!\!\!P = -1$, et on trouve que :

$$k_n(t,s,y,\xi) = -\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Il reste à définir un vrai symbole k_n à partir du symbole formel $\sum_j k_{n,j}$. Suivant [7] on introduit une suite de fonctions de troncature χ_j telle que :

$$\begin{cases} \chi_j(\xi) = 1 & \text{pour } |\xi| \geqslant 2j \\ \chi_j(\xi) = 0 & \text{pour } |\xi| \leqslant j \\ \forall\alpha,\ |\alpha| \leqslant j & |\partial^\alpha \chi_j(\xi)| \leqslant M_o^{|\alpha|} \end{cases}$$

et on pose

$$k_n(t,s,y,\xi) = \sum_{j=o}^{\infty} \chi_j(\xi/\lambda) k_{n,j}(t,s,y,\xi) \tag{13}$$

λ étant un paramètre à déterminer.

Suivant [7] , si λ est assez grand, la formule (13) définit un symbole analytique. En outre on a les estimations :

$$(14) \qquad |\partial_\xi^\alpha k_n| \leq |\xi|^{-n(m-1)} \frac{|\alpha|!}{n!} C_2^{|\alpha|+1} C_1^n$$

pour $|\xi| \geq 2\lambda|\alpha|$ et pour (t,s,y) dans un voisinage complexe de 0 .

L'opérateur (7) est alors parfaitement défini pour $u \in L^1_{comp}(\omega)$, ω étant un voisinage assez petit de O. On a alors :

<u>Lemme 8</u> : <u>Si</u> λ <u>est assez grand, il existe une constante</u> C_3 <u>telle que pour tout</u> $u \in L^1_{comp}(\omega)$ <u>on a</u> :

$$|\xi|^{n(m-\delta)} |\hat{K}_n u(\xi)| \leq C_3^{n+1} \frac{1}{(n!)^\delta} \|u\|_{L^1(\omega)}$$

Ce lemme résulte des estimations du lemme 7, faisons seulement le calcul dans le cas de l'exemple :

Si $P = \frac{\partial}{\partial t} + it^{2k} \frac{\partial}{\partial y}$, l'amplitude (9) a_n est donnée par :

$$a_n(t,\tau,\eta) = - \int_{-\infty}^{t} e^{-(t^{2k+1}-s^{2k+1})\,\eta/2k+1}\, e^{i(t-s)\tau} \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} ds$$

(On se place dans un voisinage conique de $\tau_o = 0$, $\eta_o = 1$ et η est ici > 0)

Majorant (cf. Lemme 5)

$$(t^{2k+1} - s^{2k+1})/2k+1 \geq c(t-s)^{2k+1} \qquad \text{pour } t > s$$

et effectuant le changement de variables

$$s = t - \left(\frac{\rho}{c\eta}\right)^{1/2k+1}$$

on obtient la majoration

$$|a_n(t,\tau,\eta)| \leq \frac{1}{2k+1} |c\eta|^{-\frac{n}{2k+1}} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{n/2k+1 \; -1} d\rho$$

La dernière intégrale vaut $\Gamma(\frac{n}{2k+1})$ et on a une estimation du type :

(15) $$|a_n(t,\tau,\eta)| \leqslant C^{n+1}|\eta|^{-\frac{n}{2k+1}}(n!)^{1-1/2k+1}$$

(k est ici fixé et la constante C dépend de k).

Puisque $\hat{K}_n u(\tau,\eta) = \int a_n(t,\tau,\eta)e^{-iy\eta}\, u(t,y)dt\, dy$, l'estimation du lemme 8 découle immédiatement de (15)

III. DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Ayant construit la parametrix K_n, on articule la démonstration autour du raisonnement suivant : soit χ_N une suite de fonctions de $C_o^\infty(\omega)$, qui valent 1 sur un voisinage $\omega' \subset\subset \omega$ de x_o et telle que :

$$\forall\alpha\ ,\ |\alpha| \leqslant Nm : |\partial^\alpha \chi_N| \leqslant (M_1 N)^{|\alpha|}$$

on écrit :

(15) $$\widehat{\chi_n u} = \hat{K}_n\, \chi_n\, P^n u + R_n(\chi_n u) + S_n u$$

avec

$$\begin{cases} R_n v = \hat{v} - \hat{K}_n\, P^n v & \text{pour } v \in \mathcal{E}'(\omega) \\ S_n u = \hat{K}_n[P^n,\ \chi_n]u & \text{pour } u \in \mathcal{D}'(\omega) \end{cases}$$

Par le lemme 8 on sait que si $P^n u \in L^1(\omega)$:

(16) $$|\xi|^{n(m-\delta)}\,|(\hat{K}_n\chi_n P^n u)(\xi)| \leqslant C_3^{n+1}\ \frac{1}{(n!)^\delta}\,\|P^n u\|_{L^1(\omega)}$$

et on en déduira des estimations semblables pour $\widehat{\chi_n u}$, si l'on montre que R_n et S_n sont "régularisants". Pour R_n cela résulte de la construction de K_n comme parametrix de P^n, et pour S_n cela résulte du caractère pseudo-local de cette parametrix.

Détaillons un peu l'argument : par un calcul "explicite" on voit que R_n s'écrit :

$$R_n v(\xi) = \int e^{-iy\eta}\Big(\int_{-T}^{t} e^{i\varphi - i\tau s}\tilde{r}_n(t,s,y,\xi)\,ds\Big)v(t,y)\,dt\,dy$$

$$+ \int e^{-ix.\xi}\big(\tilde{\tilde{r}}_n(t,s,y,\xi)\big)\big|_{s=t}\, v(x)\,dx\ .$$

et le fait que K_n est une parametrix de P^n est contenu dans le résultat suivant :

Lemme 9 : Il existe C_4, C_5 $\varepsilon > 0$ tels que pour tout n on ait :

$$|\tilde{r}_n(t,s,y,\xi)| \leqslant C_4^{n+1}\ e^{-\varepsilon|\xi|}$$

$$|\tilde{\tilde{r}}(t,s,y,\xi)| \leqslant C_4^{n+1}\ e^{-\varepsilon|\xi|}$$

Par suite pour tout $v \in L^1_{\mathrm{comp}}(\omega)$:

$$|R_n v(\xi)| \leqslant C_5^{n+1}\ e^{-\varepsilon|\xi|}$$

L'étude de S_n est un peu plus délicate. D'abord on calcule $[P^n, \chi_n]$ et on trouve :

(17) $$[P^n, \chi_n] = \sum_{|\alpha| \leqslant nm-1} D_x^\alpha\, C_\alpha^n$$

avec

(18) $$|C_\alpha^n| \leqslant (mn-|\alpha|)!\,C_6^{n+1}$$

Rappelons que dans tout ce qui précède ξ est dans un voisinage conique de ξ_o. Pour prendre la transformée de Fourier on introduit une fonction de troncature $g(\xi)$ à la K. Anderson [1] : $g(\xi)$ est nulle pour $\xi \notin \Gamma$ et aussi pour $|\xi| \leqslant 1$; $g(\xi) = 1$ pour ξ dans un cône $\Gamma_1 \subset\subset \Gamma$, $|\xi| \geqslant 2$; en outre

(19) $$|\partial^\alpha g(\xi)| \leqslant \left(\frac{M_2|\alpha|}{|\xi|}\right)^{|\alpha|/2} \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant |\xi|$$

(on peut modifier très légèrement la construction de K. Anderson pour avoir exactement (19)).

Prenant Fourier inverse on introduit :

$$L_n u = \mathcal{F}^{-1} g S_n u = \sum_{|\alpha| \leqslant nm-1} \mathcal{F}^{-1}(g \hat{K}_n (D_x^\alpha C_\alpha^n u))$$

et puisque $C_\alpha^n = 0$ sur ω' le caractère pseudolocal de K_n se traduit par :

<u>Lemme 10</u> : Il existe un voisinage $\omega'' \subset\subset \omega''$ de x_o et une constante C_7 tels que pour tout n, tout γ et tout $u \in L^1(\omega)$:

$$\|D_x^\gamma L_n u\|_{L^1(\omega'')} \leqslant C_7^{1+n+|\gamma|} |\gamma|! \; \|u\|_{L^1(\omega)}$$

Supposons maintenant que $u \in L^1(\omega)$ avec $P^n u \in L^1(\omega)$. Soit :

$$f(\xi) = (\hat{K}_n \chi_n P^n u)(\xi) + (R_n \chi_n u)(\xi)$$

D'après le lemme 8 (cf.(16)) et le lemme 9 on a, pour $\xi \in \Gamma$:

(20) $$\xi^{n(m-\delta)} |f(\xi)| \leqslant C_8^{n+1} \frac{1}{(n!)^\delta} \{\|P^n u\|_{L^1(\omega)} + (n!)^m \|u\|_{L^1(\omega)}\}$$

Prenant Fourier inverse on a d'après (15) :

(21) $$\mathcal{F}^{-1} g \; \widehat{\chi_n u} = \mathcal{F}^{-1} g f + L_n u$$

On introduit alors une autre suite χ'_N, a support dans ω'', valant 1 sur un voisinage fixe de x_o, et vérifiant

$$\forall \alpha \quad |\alpha| \leqslant N \; : \; |\partial^\alpha \chi'_N| \leqslant (M_3 N)^{|\alpha|}$$

Puisque $\chi'_N \; \chi_n u = \chi'_N u$ on a

$$\widehat{\chi'_N u} = \widehat{\chi'_N} * g \; \widehat{\chi_n u} + \widehat{\chi'_N} * (1-g) \; \widehat{\chi_n u}$$

Multipliant (21) par χ'_N et prenant Fourier on obtient alors :

(22) $$\widehat{\chi'_N u} = \widehat{\chi'_N} * gf + \widehat{\chi'_N L_n u} + \widehat{\chi'_N} * (1-g) \; \widehat{\chi_n u} .$$

Le lemme suivant est classique :

Lemme 11 : i) si $v(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ est nulle pour $\xi \in \Gamma_1$, $|\xi| \geq 2$, alors pour ξ dans un cône $\Gamma_2 \subset\subset \Gamma_1$ et pour $N \geq \nu + 1$ on a :

$$|\xi|^{N-\nu-1} \, |(\widehat{\chi'_N} * v)(\xi)| \leq C_9^{N+1} N! \, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^\nu)}$$

ii) si $v(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ et vérifie

$$|v(\xi)| \leq H(1 + |\xi|)^{-\mu}$$

alors pour $N \geq \nu + \mu + 1$ on a :

$$|\xi|^\mu |(\widehat{\chi'_N} * v)(\xi)| \leq C_{10}^{N+1} \{H + N! \, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^\nu)}\}$$

On choisit $N = \nu + 1 + [n(m-\delta)]$ (où $[\lambda]$ désigne la partie entière du réel λ), on applique le point i) de ce lemme au troisième terme de (22), le point ii) au premier terme, compte tenu de (20) et on majore chacun de ces termes par

$$C_{11}^{n+1} \frac{1}{(n!)^\delta} \{\|P^n u\|_{L^1(\omega)} + (n!)^m \|u\|_{L^1(\omega)}\} .$$

La majoration du terme $\widehat{\chi_N L_n u}$ résultant directement du lemme 10, on a achevé la démonstration du théorème 2.

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Le schéma général est le même que pour le théorème 2, mais la construction de la parametrix est beaucoup plus facile et plus classique, puisqu'il s'agit de la parametrix d'opérateurs elliptiques, que l'on construit comme pseudodifférentiel analytique classique.

On écrira alors :

$$\hat{K}_n u(\xi) = \int e^{-ix.\xi} a_n(x,\xi) u(x) dx$$

avec $a_n(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(\xi/\lambda) a_{n,j}(x,\xi)$, $a_{n,j}$ étant homogène de degré $-nm-j$.

Les estimations du lemme 7 sont remplacées par :

$$|a_{n,j}| \leqslant C_1^{1+n+j}\, j!\, |\xi|^{-nm-j}$$

et le lemme 8 par

$$|\xi|^{nm}\, |\hat{K}_n u(\xi)| \leqslant C_3^{n+1}\, \|u\|_{L^1(\omega)}$$

Le reste de la démonstration, c'est à dire contrôle de R_n et S_n est exactement du même type .

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Anderson : Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients ; Arkiv för Mat. 8, (1970) p.277.

[2] P. Bolley, J. Camus, C. Mattera : Analyticité microlocale et itérés d'opérateurs. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79 .

[3] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets, Comm. on Pure and Appl. Math., 24 (1971) p.671.

[4] T. Kotaké, M. S. Narasimhan : Bull. Soc. Math. France, 1962, p.471.

[5] G. Métivier : Propriété des itérés et ellipticité, Comm. in P.D.E., 3 (1978) p. 827.

[6] F. Treves : Analytic hypoelliptic partial differential equations of principal type; Comm. on Pure and Appl. Math. 24 (1971), p.537.

[7] F. Treves : Pseudodifferential operators, Chap. V (Livre à paraître).

*
* *