J. P. BOURGUIGNON

Première valeur propre du laplacien et volume des sphères riemanniennes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 9, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

PREMIERE VALEUR PROPRE DU LAPLACIEN ET VOLUME DES SPHERES RIEMANNIENNES

par J. P. BOURGUIGNON

Exposé n° IX

18 Décembre 1979

0.0 Dans cet exposé nous nous proposons de discuter, dans le cadre des variétés riemanniennes compactes, des inégalités existant entre la première valeur propre du laplacien et certaines quantités géométriques.

Ce sujet, par ailleurs classique, a connu un développement extrêmement rapide dans les dernières années♦. Même dans le cas des surfaces, de nouveaux et intéressants résultats ont été obtenus récemment.

0.1 Par quantités géométriques nous entendons divers invariants numériques déduits de la topologie de la variété ou définis au moyen de la métrique. Nous distinguerons, un peu artificiellement, ceux qui font intervenir la métrique de façon algébrique en chaque point (tels que le volume, le diamètre et par extension le rayon d'injectivité ou le rayon de convexité) de ceux qui font intervenir les jets de la métrique en chaque point (telles que des bornes sur la courbure ou ses dérivées covariantes).

Dans cet exposé nous focaliserons notre attention sur les premiers, ne réservant que des commentaires pour les seconds.

0.2 Il peut être intéressant de rappeler, à titre de motivation, l'inégalité dite de Faber-Krahn qui relie la première valeur propre du laplacien d'un domaine plan $\mathcal{D}$ pour le problème de Dirichlet ("the pitch of the drum $\mathcal{D}$"), soit $\lambda_1^{\mathcal{D}}$, à son aire que nous noterons $\mathrm{vol}\,\mathcal{D}$

$$\pi j_o^2 = \lambda_1^D \,\mathrm{vol}\, D \leqslant \lambda_1^{\mathcal{D}} \,\mathrm{vol}\, \mathcal{D} \quad . \tag{0.3}$$

où $j_o = 2{,}4\ldots$ désigne le premier zéro de la fonction de Bessel j_o et D désigne le disque (le rayon du disque n'intervient pas car, pour un domaine plan $\mathcal{D}$, le produit $\lambda_1^{\mathcal{D}} \,\mathrm{vol}\, \mathcal{D}$ est invariant par homothétie).

Lord Rayleigh a énoncé cette inégalité comme évidente♦♦ dans son livre "Theory of Sound" (cf [22] § 210). Elle ne fut démontrée que dans les années 1925,

---

♦ On pourra s'en convaincre en contemplant la richesse et la variété des contributions aux Proceedings de la conférence sur la géométrie du laplacien organisée par l'A.M.S. en mars 1979 à Hawaï.

♦♦ L. Rayleigh dit explicitement : "If the area of a membrane is given, there must evidently be some form of boundary for which the pitch (or the principal tone) is the gravest possible, and this form can be no other than the circle". De quoi faire réfléchir sur l'évidence de la notion de compacité dans les espaces fonctionnels!

indépendamment par C. Faber (cf.[13]) et E. Krahn (cf.[17]), par un procédé de symétrisation via l'inégalité isopérimétrique standard

$$4\pi \text{ vol } \mathcal{D} \leqslant (\text{vol } \partial\mathcal{D})^2$$

(à ce propos on pourra consulter le passionnant rapport [21] de R. Osserman).

Une inégalité analogue est vraie en dimension quelconque n (cf.[18]) à condition de considérer la fonction du domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ $\lambda_1^{\mathcal{D}}(\text{vol } \mathcal{D})^{\frac{2}{n}}$ qui est invariante par homothéties.

Par contre il n'existe pas de borne supérieure pour le produit $\lambda_1^{\mathcal{D}}(\text{vol } \mathcal{D})^{\frac{2}{n}}$ comme le montre, dès la dimension 2, la famille des domaines rectangulaires de côtés de longueurs t et $\frac{1}{t}$.

0.4 Nous nous intéressons ici à des variétés compactes M et plus spécialement à certaines des plus simples d'entre elles : les sphères S^n munies d'une métrique quelconque.

L'analogie conduit à considérer le bord $\partial\mathcal{D}$ du domaine $\mathcal{D}$ envisagé auparavant comme l'endroit où la géométrie a été concentrée ; la métrique g, elle, est diffuse sur M. Dans ce parallèle les domaines à bord convexe jouent le rôle des variétés à courbure positive par exemple.

Comme nous le détaillerons aux § 1 et 2 la situation est pourtant toute différente. D'abord, pour une variété M donnée, O est la borne inférieure du produit $\mu_1^g(\text{vol}_g M)^{\frac{2}{n}}$ (où μ_1^g désigne la première valeur propre du laplacien défini par g). Par contre <u>sur la sphère</u> S^2 <u>J. Hersch a montré</u> dans [16] <u>le beau résultat suivant</u>

(0.5) $$\mu_1^g \text{ vol}_g M \leqslant \mu_1^{can} \text{vol}_{can} S^2 = 8\pi$$

(où *can* désigne la métrique canonique de la sphère S^2). De plus l'égalité est caractéristique de la métrique canonique.

0.6 Le but de cet exposé est <u>d'exhiber une famille</u> g_t <u>de métriques sur les sphères</u> S^{2q+1} (donc en particulier sur la sphère S^3) <u>pour laquelle le produit</u> $\mu_1^{g_t}(\text{vol}_{g_t} S^{2q+1})^{\frac{2}{2q+1}}$ <u>n'est pas borné supérieurement</u>, ce qui interdit toute généralisation de (0.5). En général pour une métrique riemannienne arbitraire, évaluer exactement la première valeur propre μ_1^g est une opération désespérée. Il est par contre assez facile de borner supérieurement μ_1^g grâce à sa propriété de minimax.

C'est H. Urakawa qui dans [24], a le premier mis en évidence le phénomène décrit ci-dessus pour S^3. Il avait recours à des calculs algébriques compliqués utilisant les métriques invariantes sur la sphère S^3 vue comme groupe de Lie. Notre approche, développée en commun avec L. Bérard Bergery (cf.[2]), sera plus géométrique et utilise le concept de <u>submersion riemannienne</u>. Grâce à un théorème de commutation entre divers laplaciens définis sur ces espaces nous pouvons évaluer exactement $\mu_1^{g_t}$ sans faire pratiquement aucun calcul (une variante de cette approche a été développée indépendamment par S. Tanno dans [23]). C'est l'objet du § 3 .

0.7 Nous consacrons le paragraphe 4 à quelques résultats récents sur la multiplicité de la première valeur propre : en dimension 2 la métrique canonique de S^2 a la plus grande multiplicité possible (elle n'est pas la seule dans ce cas, cf. [7]); en dimension supérieure ce n'est plus le cas pour la métrique canonique des sphères S^{2q+1}. C'est à nouveau parmi les métriques de la famille g_t que se trouvent les contrexemples (cf. [24] pour S^3, [23] ou [2] pour S^{2q+1}).

Nous terminons l'exposé par un survol des résultats récents qui ont été obtenus sur les bornes de la première valeur propre en fonction de diverses quantités géométriques.

§ 1. LE LAPLACIEN SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE

1.1 Soit (M,g) une variété riemannienne sans bord. Cette métrique définit un élément de volume v_g .

Le laplacien Δ^g est l'opérateur différentiel défini, pour une fonction f de classe C^2 sur M , par

$$\Delta^g f = -\mathrm{div}^g(g^{-1}(df)) \tag{1.2}$$

où df désigne la différentielle de f , g^{-1} l'isomorphisme du fibré cotangent T^*M sur le fibré tangent TM inverse de l'isomorphisme $X \mapsto g(X)$ (défini par $g(X)(Y) = g(X,Y)$) et div^g la divergence définie pour un champ de vecteurs X par $\mathcal{L}_X v_g = (\mathrm{div}^g X)g$.

Pour ceux que les notations intrinsèques effraient, l'expression du laplacien dans un système de coordonnées locales (x^i) est

$$\Delta^g = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{1.3}$$

(où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de l'expression locale (g_{ij}) de la métrique g) .

La dépendance du laplacien en la métrique est compliquée. Cependant, si on multiplie la métrique g par un scalaire α^2 , on voit facilement que $\Delta^{\alpha^2 g} = \alpha^{-2}\Delta^g$

Le laplacien d'une variété riemannienne (M,g) est un opérateur différentiel du second ordre elliptique auto-adjoint qui est non borné sur $L^2(M,v_g)$. Son domaine est l'espace de Sobolev $H^1(M,v_g)$ dont on fixe la norme grâce à la métrique g. Son symbole principal est la métrique vue comme fonction quadratique sur le fibré cotangent. Son symbole sous-principal est nul comme on peut le vérifier en prenant des coordonnées normales en un point. Il annule les constantes. Ces trois propriétés le caractérisent d'ailleurs.

1.4 Nous supposerons dans la suite M <u>compacte</u>. Le spectre de Δ^g est alors discret et forme une suite $0 = \mu_0^g < \mu_1^g \leqslant \mu_2^g \leqslant \dots$ tendant vers $+\infty$. (Avec notre définition, le laplacien est un opérateur positif puisqu'il est le composé d'un opérateur du 1er ordre d et de son adjoint $-\mathrm{div} \circ g^{-1}$.)

Les sous-espaces propres sont de dimension finie. Son noyau, de dimension 1, est formé des constantes. En cela le laplacien Δ^g sur une variété sans bord s'apparente plus au problème de Neumann sur un domaine borné avec bord qu'au problème de Dirichlet.

1.5 D'une importance capitale est <u>la caractérisation</u>, due à L. Rayleigh, <u>de μ_1^g par une propriété de minimax</u>, à savoir

$$\mu_1^g = \inf_{\substack{f \in H^1(M) \\ \int_M f v_g = 0}} \frac{\int_M |df|^2 v_g}{\int_M f^2 v_g} ,$$

la condition $\int_M f v_g = 0$ devant être interprétée comme une condition d'orthogonalité aux constantes (pour d'autres détails sur le laplacien riemannien, voir [5]).

1.6 Parmi les invariants riemanniens élémentaires, nous avons <u>le volume</u> de (M,g) <u>noté</u> $\mathrm{vol}_g M$ qui vérifie $\mathrm{vol}_{\alpha^2 g} M = \alpha^n \mathrm{vol}_g M$ où n est la dimension de M. Il y a aussi le diamètre noté $\mathrm{diam}_g M$. Pour lui $\mathrm{diam}_{\alpha^2 g} M = \alpha \, \mathrm{diam}_g M$.

Ainsi les fonctions $g \mapsto \mu_1^g (\mathrm{vol}_g M)^{\frac{2}{n}}$ et $g \mapsto \mu_1^g \, \mathrm{diam}_g^2 M$, définies sur l'espace $\mathcal{M}(M)$ des métriques de la variété M, sont invariantes par changement homothétique de la métrique, ce qui en fait des fonctions particulièrement naturelles à étudier.

1.7 PROPOSITION : Pour toute variété compacte M,

$$0 = \inf_{g \in \mathcal{M}(M)} \{\mu_1^g (\mathrm{vol}_g M)^{\frac{2}{n}}\} = \inf_{g \in \mathcal{M}(M)} \{\mu_1^g \, \mathrm{diam}_g^2 M\}$$

Preuve : Elle consiste à remarquer que, sur toute variété compacte M, il existe des métriques qui font ressembler M à une haltère (dans un voisinage d'un point faire apparaître un champignon à longue tige, puis, en multipliant la métrique par une fonction, équilibrer les deux extrémités de l'haltère). On utilise alors la propriété de minimax de μ_1^g pour une fonction f qui vaut 1 sur une extrémité de l'haltère, -1 sur l'autre extrémité et qui varie linéairement le long de l'axe. On vérifie alors facilement qu'en faisant tendre le rayon r de l'axe vers zéro (ce qui affecte peu le volume et le diamètre) le rapport $\int_M |df|_r^2 v_{g_r} / \int_M f^2 v_{g_r}$ pour la famille de métriques g_r ainsi construites tend vers 0 et donc les quantités $\mu_1^{g_r} (\mathrm{vol}_{g_r} M)^{\frac{2}{n}}$ et $\mu_1^{g_r} \mathrm{diam}_{g_r}^2 M$ avec lui. ■

1.8 La différence essentielle avec l'inégalité de Faber-Krahn est la suivante : dans le problème de Dirichlet le volume de l'ensemble des zéros de la fonction test est borné inférieurement par l'inégalité isopérimétrique, alors que, dans la Proposition 1.7, elle devient arbitrairement petite. Cette remarque est la base dont J. Cheeger est parti pour donner une borne inférieure de μ_1^g (voir [10] et § 5).

1.9 D'autres quantités géométriques peuvent être introduites pour estimer μ_1^g, en particulier celles faisant intervenir la courbure. Elle seront discutées brièvement au § 5. Deux autres quantités s'apparentent au volume et au diamètre : le rayon d'injectivité, borne inférieure des rayons des boules maximales sur lesquelles l'exponentielle est injective ; le rayon de convexité, borne inférieure des rayons des boules maximales convexes.

§ 2. AUTOUR DU THEOREME DE J. HERSCH SUR LA SPHERE S^2

2.1 Sur les surfaces orientées la géométrie riemannienne et la géométrie complexe sont liées ainsi : grâce à une métrique g nous définissons une notion d'angle, donc une rotation positive d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'où une structure presque complexe dont on montre qu'elle est intégrable. Il y a ainsi une correspondance biunivoque entre les classes conformes de métriques (i.e. toutes les métriques déduites de l'une d'entre elles par mutliplication par une fonction positive) et les structures complexes.

Comme, d'après le théorème d'uniformisation, S^2 a une seule structure complexe, celle de la droite projective $\mathbb{C}P^1$, toute métrique g sur S^2 s'écrit $g = e^{2\varphi}\, can$ où φ est une fonction sur S^2 et où can désigne une métrique à courbure constante 1 (i.e. à un difféomorphisme près la métrique induite par un plongement standard de S^2 dans $\mathbb{R}^3$) . Pour les tores et les surfaces de Riemann de genre plus élevé, le théorème d'uniformisation dit aussi que toute métrique est conforme à une métrique à courbure constante mais cette fois il existe des modules de telles structures inéquivalentes.

2.2 Ce parallèle entre géométrie conforme et géométrie complexe se prolonge aux groupes d'automorphismes . Pour la sphere S^2 , il s'agit du groupe de Möbius $SO(3,1)$ ou $PGl(2,\mathbb{C})$ suivant le point de vue adopté. Grâce à l'action de ce groupe, on prouve qu'il existe une métrique standard sur S^2 qui admette pour diamètre un petit cercle d'un plongement standard de S^2 dans $\mathbb{R}^3$ donné à l'avance (on pousse la métrique induite par le plongement par le flot du gradient de la fonction hauteur du plongement rendant le petit cercle horizontal : ces flots engendrent précisément la partie non compacte du groupe conforme).

2.3 <u>THEOREME</u> (J. Hersch, cf. [16]) : <u>Pour toute métrique</u> g <u>sur la sphère</u> S^2, <u>nous avons</u>

(2.4)
$$\frac{3}{8\pi} = \frac{3}{\mu_1^{can}\ \mathrm{vol}_{can} S^2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_1^g}\right) \frac{1}{\mathrm{vol}_g S^2} .$$

<u>De plus l'égalité est caractéristique d'une métrique canonique.</u>

<u>Preuve</u> : Comme nous nous intéressons à des invariants numériques de la métrique g , quitte à la transporter par un difféomorphisme, nous pouvons écrire g sous la forme $g = e^{2\varphi}\, can$ où can est cette fois la métrique induite par un plongement standard de S^2 dans $\mathbb{R}^3$ (cela résulte de 2.1).

Soit (x_1, x_2, x_3) une base de l'espace des premières harmoniques sphériques de (S^2, can) obtenue en restreignant à S^2 des fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^3$.

Nous allons utiliser le groupe conforme pour normaliser la métrique g par rapport à ces trois fonctions x_1, x_2 et x_3 . D'après 2.2, la partie $\mathcal{P}$ du groupe conforme engendrée par les gradients des premières harmoniques sphériques s'identifie à la boule B^3 de bord l'image de S^2 dans le plongement choisi. L'application qui à un élément φ de $\mathcal{P}$ associe le point de $\mathbb{R}^3$ $\left(\int_{S^2} x_1 v_{\varphi^*g}, \int_{S^2} x_2 v_{\varphi^*g}, \int_{S^2} x_3 v_{\varphi^*g}\right)$ envoie B^3 dans elle-même et tend vers l'identité pour les points du bord. D'après la théorie du degré des applications de S^2 , cette application est surjective, de telle sorte qu'à l'action du groupe conforme près, nous pouvons supposer que $\int_{S^2} x_1 v_g = \int_{S^2} x_2 v_g = \int_{S^2} x_3 v_g = 0$.

Avec cette normalisation l'espace vectoriel engendré par les fonctions coordonnées est inclus dans l'orthogonal (pour la métrique g) des fonctions constantes. Il est alors possible de lui appliquer une variante de la définition par minimax des valeurs propres, variantes due à J. Hersch (cf. [15]) :

2.5 <u>LEMME</u> : <u>Les inverses des 3 premières valeurs propres vérifient</u>

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\int_M f_i^2 v_g}{\int_M |df_i|^2 v_g} \leqslant \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_i^g}$$

<u>où les 3 fonctions</u> f_1, f_2, f_3 <u>forment une base orthonormée pour la norme</u> $\left(\int_M |df|_g^2 v_g\right)^{1/2}$ <u>d'un espace vectoriel de dimension 3 orthogonal aux constantes.</u>

En dimension 2 l'intégrale de Dirichlet est invariante par changement conforme de la métrique

$$\int_{S^2} g^{-1}(dx_i,dx_i)v_g = \int_{S^2} \mathrm{can}^{-1}(dx_i,dx_i)v_{\mathrm{can}} = 8\pi \quad .$$

De plus pour $i \neq j$,

$$\int_{S^2} g^{-1}(dx_i,dx_j)v_g = \int_{S^2} \mathrm{can}^{-1}(dx_i,dx_j)v_{\mathrm{can}} = 0 \quad .$$

Par suite

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\int_{S^2} x_i^2 v_g}{\int_{S^2} g^{-1}(dx_i,dx_i)v_g} \leqslant \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_i^g} \quad .$$

Comme $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1$ et que les dénominateurs sont tous égaux, le membre de gauche vaut $\frac{3}{8\pi}$, d'où l'inégalité (2.4).

L'égalité est caractéristique, car alors les fonctions x_1, x_2, x_3 sont fonctions propres du laplacien pour la valeur propre 2. Le plongement de S^2 est alors nécessairement une homothétie (cf. [3] 4.28). ∎

2.6 COROLLAIRE : Pour toute métrique riemannienne g sur la sphère S^2, nous avons

(2.7) $$\mu_1^g \operatorname{vol}_g S^2 \leqslant \mu_1^{can} \operatorname{vol}_{can} S^2 = 8\pi \quad .$$

De plus l'égalité est caractéristique d'une métrique canonique.

2.8 Il est intéressant de considérer d'autres surfaces que la sphère S^2. Pour la métrique plate du réseau équilatéral sur le tore T^2, la première valeur propre a pour multiplicité 6. Mais cette métrique ne réalise pas le minimum de la fonction $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\mu_i^g}$. Par contre le produit $\mu_1^g \operatorname{vol}_g T^2$ est borné supérieurement parmi les métriques plates par sa valeur pour le tore plat équilatéral (cf. [3] 2.6). La question reste ouverte pour une métrique quelconque sur T^2.

2.9 Il existe une généralisation de (2.4) aux sphères S^n. Dans [3] , la Proposition 4.15 établit que parmi toutes les métriques conformes à une métrique canonique la quantité $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i^g}\left(\frac{1}{\operatorname{vol}_g M}\right)^{\frac{2}{n}}$ est bornée supérieurement en fonction de n, ce qui permet de borner le produit $\mu_1^g(\operatorname{vol}_g M)^{\frac{2}{n}}$. Par contre, et c'est l'objet du § 3 , il n'existe pas de généralisation de (2.4) ou même de (2.7) à toutes les métriques riemanniennes sur les sphères S^n $(n \geqslant 3)$.

§ 3. UNE FAMILLE INTERESSANTE DE METRIQUES SUR LES SPHERES S^{2q+1}

3.1 On peut penser trouver parmi les variétés produits $M = B \times F$ des candidats à ce que les produits $\mu_1^g(\operatorname{vol}_g M)^{\frac{2}{n}}$ et $\mu_1^g \operatorname{diam}_g^2 M$ ne soient pas bornés sur l'ensemble des métriques. Plus précisément en jouant sur les tailles relatives des facteurs, i.e. en considérant sur $M = B \times F$ la famille de métriques $g_t = h \times t^2 k$ (où h et k désignent respectivement des métriques sur B et F) nous obtenons

$$\mu_1^{g_t} = \min(\beta_1^h, t^{-2}\varphi_1^k)$$

de telle sorte que

$$(3.2)\qquad \mu_1^{g_t}(\mathrm{vol}_{g_t} M)^{\frac{2}{n}} = \begin{cases} \varphi_1^k\, t^{\frac{2}{p}(1-p)} & \text{pour } (\varphi_1^k/\beta_1^h)^{1/2} \leqslant t \\ \beta_1^h\, t^{\frac{2}{p}} & \text{pour } t \leqslant (\varphi_1^k/\beta_1^h)^{1/2} \end{cases}$$

où p est la dimension de F .

La fonction $t \mapsto \mu_1^{g_t}(\mathrm{vol}_{g_t} M)^{\frac{2}{n}}$ est donc bornée lorsque t varie. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \mu_1^{g_t}\mathrm{diam}^2_{g_t} M$.

Pour trouver des contrexemples, nous allons partir d'une situation localement produit, mais globalement suffisamment "tordue" pour éviter que les premières fonctions propres soient obtenues par séparation de variables , autrement dit de ce que les géomètres appellent un fibré avec holonomie non triviale.

3.3 Soit $\pi : M \to B$ une fibration localement triviale de fibre F. Nous introduisons une relation de compatibilité entre des métriques riemanniennes sur M et B de la façon suivante : une métrique g sur M permet de définir en chaque point m de M l'orthogonal de l'espace tangent à la fibre F_m passant par m (T_mF_m est appelé l'espace vertical en m et son orthogonal l'espace horizontal). Nous demandons que la restriction de $T_m\pi$ à l'espace horizontal soit une isométrie sur l'espace $(T_{\pi(m)}B, h_{\pi(m)})$ (nous notons h la métrique de B). Nous disons alors que $\pi : (M,g) \to (B,h)$ est une submersion riemannienne.

Dans ce cadre nous pouvons introduire sur l'espace des fonctions sur M d'autres opérateurs que le laplacien riemannien Δ^g : nous notons Δ_v le laplacien vertical défini comme suit

$$(\Delta_v f)(m) = (\Delta^{F_m}(f \restriction F_m))(m) .$$

Bien sûr Δ_v n'est pas un opérateur elliptique puisqu'il ne tient compte du comportement des fonctions que dans les p directions verticales.

3.4 THEOREME (cf.[2]) : Si les fibres de la submersion riemannienne $\pi : (M,g) \to (B,h)$ sont totalement géodésiques, alors les laplaciens Δ^g et Δ_v commutent.

Preuve : Elle résulte d'une expression locale de la différence $\Delta^g - \Delta_v$ en termes de champs de vecteurs adaptés à la situation : si, au voisinage d'un point x de B, nous prenons un repère local orthonormé (X_i), alors $\Delta^g - \Delta_v = \sum_{i=1}^{n-p} \bar{X}_i \cdot \bar{X}_i - D^g_{\bar{X}_i} \bar{X}_i$ où $\bar{X}_i$ désigne le relèvement horizontal de X_i (les champs de vecteurs tels que $\bar{X}_i$ sont appelés basicues) et D^g la dérivation covariante de g . Après avoir remarqué que $D^g_{\bar{X}_i}\bar{X}_i$ est le relèvement horizontal de $D^h_{X_i} X_i$, donc un champ de vecteurs basique, le théorème résulte du lemme :

3.5 LEMME (cf. [14]) : Les champs de vecteurs basiques commutent au laplacien vertical si et seulement si les fibres sont totalement géodésiques. ■

3.6 Le lemme 3.5 permet de caractériser les fibrations qui peuvent être rendues des submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques : les flots des champs de vecteurs basiques envoient isométriquement les fibres les unes sur les autres, de telle sorte que le groupe structural du fibré se réduit à un groupe de Lie de dimension finie qui est un groupe d'isométries de la fibre. On peut donc, dans ce cas, considérer la fibre comme une variété riemannienne (F,k). En particulier si la fibre est compacte, ce groupe est nécessairement compact. Ces conditions sont en fait suffisantes pour pouvoir construire des métriques rendant les fibres totalement géodésiques. La plupart des fibrations classiques vérifient ces conditions : fibration des Stiefeliennes sur les grassmanniennes, fibrations de Hopf, fibrations naturelles déduites du fibré tangent à une variété.

L'exemple qui va retenir notre attention ici est la classique fibration de Hopf $\pi : S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^q$ à fibres S^1.

Parmi les conséquences du Théorème 3.4, notons :

3.7 PROPOSITION : Si (M,g) est l'espace total d'une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, il existe une base orthonormée de $L^2(M,v_g)$ formée de fonctions propres simultanées du laplacien riemannien Δ^g et du laplacien vertical Δ_v .

3.8 En particulier toute valeur propre μ^g de Δ^g se décompose (de façon non nécessairement unique) en $\mu^g = \varphi^k + b$ où φ^k est une valeur propre de Δ_v (donc de Δ^k) et b une valeur propre de l'opérateur positif $\Delta^g - \Delta_v$. Ce fait prend une importance considérable à cause de la construction géométrique que nous décrivons maintenant.

3.9 Toute submersion riemannienne $\pi : (M,g) \to (B,h)$ a une <u>variation canonique</u> qui consiste à varier la taille relative de la base et de la fibre : soit g_t la famille de métriques admettant les mêmes espaces horizontaux que g, dont la restriction aux sous-espaces verticaux est $g_t \upharpoonright T_mF_m = t^2 g \upharpoonright T_mF_m$ et dont la restriction aux sous-espaces horizontaux coïncide avec π^*h. Si $\pi : (M,g) \to (B,h)$ est à fibres totalement géodésiques (F,k), alors $\pi : (M,g_t) \to (B,h)$ l'est encore, les fibres étant (F,t^2k).

3.10 Les valeurs propres du laplacien riemannien Δ^{g_t} sont alors données par $\mu^{g_t} = \varphi^{t^2k} + b = t^{-2}\varphi^k + b$. D'où, suivant que φ^k est nul ou non, μ^{g_t} varie ou ne varie pas avec t. Parmi les valeurs propres μ^g de Δ^g se trouvent nécessairement les valeurs propres β^h de (B,h), car une fonction $\underline{f}$ propre pour Δ^h se relève en $f = \underline{f} \circ \pi$ qui est une fonction propre de Δ^g pour la même valeur propre. Ainsi, pour t petit, la première valeur propre de Δ^{g_t} sera nécessairement β_1^h. Par contre, pour t grand, le comportement de la première valeur propre dépend de la géométrie interne de la submersion riemannienne. Si les fonctions propres pour la valeur propre $\mu_1^{g_t}$ sont invariantes par transport horizontal, alors $\mu_1^{g_t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$ (c'est justement le cas du produit de variétés développé en 3.1). Sinon $\mu_1^{g_t} = t^{-2}\varphi^k + b$ avec $b \neq 0$ et $\mu_1^{g_t}$ tend vers b lorsque t tend vers $+\infty$ (pour une discussion plus détaillée, voir [2]).

3.10 <u>PROPOSITION</u> : <u>Pour la variation canonique de</u> $\pi : S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^q$, nous avons

$$\mu_1^{g_t} = \begin{cases} t^{-2} + 2q & \underline{\text{pour}}\ (2(q+2))^{-1/2} \leq t \\ 4(q+1) & \underline{\text{pour}}\ t \leq (2(q+2))^{-1/2} . \end{cases}$$

<u>Preuve</u> : Pour la métrique standard $\mu_1^g = 2q+1$ avec $\varphi^k = 1$ et $b = 2q$, comme le montre l'examen de la restriction d'une première harmonique sphérique f à un grand cercle fibre de la fibration passant par le maximum de f. ∎

3.11 <u>THEOREME</u> : <u>Sur les sphères</u> S^n, <u>le produit</u> $\mu_1^g \operatorname{vol}_g S^n$ <u>n'est pas borné lorsque</u> g <u>parcourt les métriques riemanniennes</u>.

3.12 Ce théorème est dû à H. Urakawa pour S^3, qui a calculé systématiquement le spectre des métriques invariantes à gauche sur la sphère S^3 vue comme groupe de Lie. Les métriques de la variation canonique de la fibration de Hopf $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1 = S^2$

encore dites métriques de Berger, sont précisément les métriques $U(2)$-invariantes. S. Tanno (cf. [23]) a obtenu ce théorème pour S^{2q+1} par un calcul direct qui ne lui permettait de traiter que ce cas. Le cas de S^{2q} a été établi par H. Muto (cf.[20]).

3.13 <u>Preuve</u> : Pour S^{2q+1}, il suffit de considérer la variation canonique pour t tendant vers $+\infty$. Le volume de S^{2q+1} pour la métrique g_t se calcule de façon fibrée et vaut

$$\mathrm{vol}_{g_t} S^{2q+1} = t.\mathrm{vol}_k S^1.\mathrm{vol}_h \mathbb{C}P^q ,$$

d'où le résultat.

Pour S^{2q} la preuve est plus délicate et consiste à voir S^{2q} comme l'espace total d'une fibration (avec 2 fibres singulières) sur l'intervalle $[-1,+1]$ à fibres S^{2q-1}. On met sur les fibres des métriques de la variation canonique (pour obtenir une métrique riemanienne non singulière sur S^{2q} , il est nécessaire qu'aux deux extrémités de l'intervalle on tende vers la métrique canonique). Il faut ensuite estimer μ_1^g par en-dessous en se ramenant à une équation différentielle ordinaire sur l'intervalle (pour les détails, voir [20] ou [2]). ∎

3.14 Lorsque t tend vers $+\infty$, il ne faut pas croire que le diamètre de (S^{2q+1},g_t) tend aussi vers $+\infty$ et ce , bien que les fibres soient des géodésiques fermées de longueur $2\pi t$. En effet, à cause de "<u>l'holonomie</u>" de la fibration $\pi : S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^q$ deux points quelconques d'une même fibre sont toujours joints par des courbes horizontales dont la longueur ne change pas dans la variation canonique. Par exemple, dans la métrique canonique les cercles (petits ou grands) de $S^2 = \mathbb{C}P^1$ se relèvent à partir d'un point de S^3 en courbes horizontales qui recoupent la fibre du point de départ à une distance égale au volume de la calotte sphérique enclose par le cercle.

La variation canonique de la fibration $\pi : S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^q$ n'infirme donc pas la

3.15 <u>CONJECTURE</u> : <u>Sur une variété compacte</u> M, <u>le produit</u> $\mu_1^g \mathrm{diam}_g^2 M$ <u>est borné parmi les métriques riemanniennes</u> g .

3.16 Bien entendu cette conjecture implique les conjectures analogues plus faibles qui peuvent être faites pour les fonctions homogènes faisant intervenir le rayon d'injectivité ou le rayon de convexité.

3.17 Pour terminer ce paragraphe, remarquons que, pour la variation canonique g_t de $\pi : S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^q$ les premières harmoniques sphériques de la métrique $g_1 = can$ forment toujours un sous-espace propre, mais pour la valeur propre $t^{-2} + 2q$. Ainsi, lorsque t tend vers O, ces fonctions propres qui n'ont que deux domaines nodaux sont associées à des valeurs propres d'ordre arbitrairement élevé . Cela prouve qu'il n'y a pas de borne inférieure non triviale du nombre de domaines nodaux d'une fonction propre associée à une valeur propre d'ordre élevé (pour une borne supérieure, voir [12]).

Mieux le spectre de (S^{2q+1}, g_t) coïncide avec celui de $(\mathbb{C}P^q, can)$ jusqu'à un ordre de plus en plus élevé lorsque t tend vers O, soulignant que la dimension ou le volume ne peuvent se déduire que du développement <u>asymptotique</u> du spectre. Ce phénomène n'est donc pas propre aux produits de variétés.

§ 4. QUELQUES REMARQUES SUR LA MULTIPLICITE DE LA PREMIERE VALEUR PROPRE

4.1 Dans [12] , S. Y. Cheng avait établi que, sur une surface orientable de genre p, au plus les (p+1)(2p+3) premières valeurs propres pouvaient être égales (nous disons dorénavant que la <u>multiplicité</u> de μ_1 sera au plus (p+1)(2p+3)). Ce résultat était optimal pour la sphère S^2 puisque, pour la métrique canonique, la multiplicité de μ_1^{can} vaut 3. Par contre sur le tore équilatéral, qui présente la plus grande multiplicité parmi les métriques plates, la multiplicité de μ_1 vaut 6, alors que l'estimation de S. Y. Cheng donne 10 .

Les résultats de S. Y. Cheng ont été récemment raffinés par G. Besson dans [7] comme suit

4.2 <u>THEOREME</u> : <u>La multiplicité de la première valeur propre d'une métrique sur une surface orientable de genre</u> p <u>est bornée par</u> 4p+3 , <u>sur une surface non orientable de caractéristique d'Euler</u> χ <u>par</u> $4(1 - \chi) + 7$.

<u>Sur</u> T^2 <u>la borne peut être abaissée à</u> 6 <u>et sur</u> $\mathbb{R}P^2$ <u>à 5 ce qui est</u> optimal.

4.3 Il est alors naturel de se demander ce qui se passe en dimension plus grande. La Proposition 3.10 indique que sur les sphères S^{2q+1} pour la variation canonique de la fibration $\pi : S^{2q+1} \to \mathbb{C}P^q$, un phénomène nouveau a lieu. Cela fut remarqué par H. Urakawa sur S^3 et indépendamment de [2] par S. Tanno sur S^{2q+1} .

4.4 THEOREME : *Sur la sphère S^{2q+1}, la première valeur propre du laplacien riemannien de la métrique g_{t_o} avec $t_o = (2(q+2))^{-1/2}$ vaut $q^2 + 4q + 2$.*

4.5 On peut donner une description plongée de cette métrique. En effet la métrique induite sur les sphères S^{2q+1} formées des points à distance r d'un point fixé de $\mathbb{C}P^{q+1}$ muni de sa métrique canonique est une métrique de la variation canonique g_t de S^{2q+1} pour $0 < t < 1$ (pour obtenir le domaine $1 < t$ il faut considérer les sphères de distance dans l'espace $(\mathbb{C}P^{q+1})^*$, espace à courbure négative dual symétrique de $\mathbb{C}P^{q+1}$). Lorsque le rayon r est tel que $tg^2 r = 2q+3$, on trouve justement la métrique g_{t_o} pour laquelle il y a multiplicité exceptionnelle de la première valeur propre.

§ 5. UN SURVOL DES RESULTATS RECENTS SUR LES BORNES GEOMETRIQUES DE LA PREMIERE VALEUR PROPRE

5.1 Très récemment une borne supérieure de la première valeur propre valable pour toute variété riemannienne, dans l'esprit de celle que nous avons examinées jusqu'à maintenant, a été obtenue par C. Croke (cf.[13]), reprenant des idées de M. Berger développées dans [4] et [6] . Il prouve

5.2 THEOREME : *Il existe une constante γ_n telle que, pour toute variété M de dimension n et pour toute métrique g sur M ,*

(5.3) $$\mu_1^g (\mathrm{conv}_g M)^{2n+2} (\mathrm{vol}_g M)^{-2} < \gamma_n$$

où $\mathrm{conv}_g M$ désigne le rayon de convexité de la métrique g .

5.4 En fait, ainsi que l'a suggéré notre discussion du paragraphe 1 où μ_1 peut être estimé comme minimum des quotients de Rayleigh, il est plus facile d'obtenir des bornes supérieures que des bornes inférieures.

J. Cheeger dans [10] a donné une borne inférieure de μ_1^g en fonction d'une quantité isopérimétrique définie à partir de g : soit h_g la borne inférieure des quotients $\mathrm{vol}_g S/\inf[\mathrm{vol}_g M_1, \mathrm{vol}_g M_2]$ où S est une sous-variété de M qui divise M en deux régions M_1 et M_2 . Alors $\frac{1}{4} \leqslant \mu_1^g h_g^{-2}$.

Pendant plusieurs années cette borne inférieure a été considérée comme d'un intérêt purement théorique, mais récemment dans une série d'articles (voir un rapport dans [9]), P. Buser a pu donner des estimées concrètes de cette constante en particulier sur des variétés compactes à courbure constante -1 . En fait il en déduit que sur toute variété compacte cette inégalité est la meilleure possible.

5.4 En ce qui concerne les bornes de la première valeur propre, il peut être intéressant de rappeler qu'en 1974 T. Aubin obtenait une borne inférieure en termes d'une borne inférieure du volume, d'une borne supérieure du diamètre, d'une borne inférieure de la courbure sectionnelle, d'une borne supérieure de la courbure de Ricci et d'une borne inférieure du rayon d'injectivité. On mesurera le chemin parcouru depuis cette période pourtant proche en comparant avec le résultat obtenu récemment par P. Li et S. T. Yau (cf.[19]) :

5.5 THEOREME : *Soit K^g une borne inférieure de la courbure de Ricci, alors*

$$\frac{\pi^2}{4} \leqslant (\mu_1^g - \min((n-1)K^g, 0))\operatorname{diam}_g^2 M .$$

5.6 Ce résultat qui se déduit d'estimées auxiliaires sur la fonction $\dfrac{|du|^2}{b^2-(a+u)^2}$ (où a et b sont des paramètres à ajuster ultérieurement et où u est une fonction propre du laplacien pour la valeur propre μ_1^g) est optimale au facteur $\frac{1}{4}$ près. Les auteurs ne désespèrent pas de pouvoir le faire disparaître, car il est là seulement parce que dans leurs estimées (a et b ayant été ajustés) ils ne peuvent remplacer la fonction u par son opposée.

5.7 Dans [11] , S. Y. Cheng a obtenu une borne supérieure dans les mêmes termes : précisément il montre que μ_1^g est borné par la première valeur propre du problème de Dirichlet pour la boule de rayon $\frac{1}{2}\operatorname{diam}_g M$ dans un espace à courbure constante $\frac{1}{n-1}K_g$ où K_g est une borne inférieure de la courbure de Ricci. Il est intéressant de rapprocher les deux résultats dans le cas de variétés à courbure de Ricci non négative.

5.8 THEOREME : *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive. Alors*

$$\frac{\pi^2}{4} \leqslant \mu_1^g \operatorname{diam}_g^2 M \leqslant n^2\pi^2 . \tag{5.9}$$

REFERENCES

[1] T. AUBIN, Fonctions de Green et valeurs propres du laplacien, J. Maths Pures et Appl., (1974), 347-371.

[2] L. BERARD BERGERY, J. P. BOURGUIGNON, Laplacian and Riemannian submersions with totally geodesic fibres, Preprint.

[3] M. BERGER, Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes, Compo. Math., 26 (1973), 129-149.

[4] M. BERGER, Une inégalité universelle pour la première valeur propre du laplacien, Bull. S. M. F., 107 (1979), 3-9.

[5] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math. 194, Springer, (1971).

[6] A. BESSE, Manifolds all of whose geodesics are closed, Ergeb. der Math. 93 Springer, (1978).

[7] G. BESSON, Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VII, (1979) (article à paraître aux Annales de l'Institut Fourier).

[8] J. P. BOURGUIGNON, H. KARCHER, Curvature operators : pinching estimates and geometric examples, Ann. Sci. E. N. S., 11 (1978), 71-92.

[9] P. BUSER, On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geqslant \frac{h^2}{4}$, Proc. A. M. S. Symp. Pure Math. XXXVI, Geometry of the Laplacian, Hawaï, à paraître.

[10] J. CHEEGER, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, Problems in analysis, A symposium in honour of S. Bochner, Princeton University Press, Princeton, (1970), 195-199.

[11] S. Y. CHENG, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications, Math. Z., 143 (1975), 289-297.

[12] S. Y. CHENG, Eigenfunctions and nodal sets, Commentarii Math. Helv., 51 (1976), 43-55.

[13] C. CROKE, Universal bounds for the first eigenvalue of the Laplacian, Preprint, University of California, Berkeley.

[14] R. HERMANN, A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle, Proc. A. M. S., 11 (1960) 236-242.

[15] J. HERSCH, Caractérisation variationnelle d'une somme de valeurs propres consécutives ; généralisation d'inégalités de Polya-Schiffer et de Weyl, C. R. Acad. Sci. Paris, 252 (1961), 1714-1716.

[16] J. HERSCH, Quatre propriétés isopérimétriques des membranes sphériques homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris, 270 (1970), 1645-1648.

[17] E. KRAHN, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. Math. Ann., 94 (1925), 97-100.

[18] E. KRAHN, Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen, Acta. Comm. Univ. Tartu (Dorpat), A9 (1926), 1-44.

[19] P. LI, S. T. YAU, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, Proc. A. M. S. Symp. Pure Math. XXXVI, Geometry of the Laplacian, Hawaï (à paraître).

[20] H. MUTO, The first eigenvalue of the Laplacian on even dimensional spheres, Preprint, Tôhoku University.

[21] R. OSSERMAN, The isoperimetric inequality, Bull. A. M. S., 84 (1978), 1182-1238.

[22] (Lord) RAYLEIGH, The theory of sound, Mac Millan New York 1877, 1894; Dover, New York, 1945.

[23] S. TANNO, The first eigenvalue of the Laplacian on spheres, Tôhoku Math. J., 31 (1979), 179-185.

[24] H. URAKAWA, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan, 31 (1979), 179-185.

***