L. Boutet de Monvel

Opérateurs de Toeplitz de plusieurs variables complexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 7, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

OPERATEURS DE TOEPLITZ DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES

par L. BOUTET de MONVEL

Exposé n° VII

19 Décembre 1978

§ 1. DEFINITIONS

Classiquement, un opérateur de Toeplitz est défini comme suit : soit D le disque unité $|z| \leq 1$ de $\mathbb{C}$, ∂D le cercle unité $|z| = 1$, bord de D . Notons L^2 l'espace des fonctions de carré sommable sur ∂D, et H^2 le sous-espace des fonctions qui admettent un prolongement holomorphe dans D : une fonction $\varphi \in L^2$ a un développement en série de Fourier :

$$\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad , \quad \text{avec } \Sigma |a_n|^2 < \infty$$

et on a $\varphi \in H^2$ si $a_n = 0$ pour $n < 0$. Notons enfin S le projecteur orthogonal de L^2 sur H^2 $(S(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n)$. Si f est une fonction continue sur ∂D, l'opérateur de Toeplitz T_f est l'opérateur continu sur H^2 défini par

$$T_f(\varphi) = S(f\varphi)$$

($f\varphi$ est un élément de L^2, qui peut ne pas être holomorphe, et on reprojette cet élément sur H^2). Dans la base 1, z, z^2,... de H^2, T_f a pour matrice (a_{ij}) avec $a_{ij} = \hat{f}_{i-j}$ (coefficient de Fourier d'indice i-j de f) ; en particulier a_{ij} ne dépend que de i-j.

On montre assez facilement que si f et g sont deux fonctions continues sur ∂D, l'opérateur $T_f T_g - T_{fg}$ est compact. En particulier si f est inversible, $T_f T_{f^{-1}} - \mathrm{Id}$ et $T_{f^{-1}} T_f - \mathrm{Id}$ sont des opérateurs compacts, de sorte que T_f a un indice (cet indice est égal à l'opposé du nombre d'enroulements de f : $-\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{df}{f}$ si $f \in \mathcal{C}^1$).

On généralise ces définitions comme suit : soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, de frontière C^∞ $\partial\Omega$ (plus généralement, on peut remplacer $\mathbb{C}^n$ par un espace analytique de Stein, lisse au voisinage de ∂D). Notons $L^2(\partial\Omega)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur $\partial\Omega$ (on suppose choisie une mesure de densité C^∞ positive, par exemple l'élément de volume pour la métrique induite par la métrique usuelle de $\mathbb{C}^n$). Comme plus haut, $H^2(\partial\Omega)$ désigne le sous-espace des fonctions $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ qui ont un prolongement holomorphe dans Ω, et S le projecteur orthogonal de L^2 sur H^2 (projecteur de Szegö). Si f est une fonction continue sur $\partial\Omega$, l'opérateur de Toeplitz

T_f est l'opérateur continu sur $H^2(\partial\Omega)$ défini par $Tf(\varphi) = S(f\varphi)$. Plus généralement, si Q est un opérateur pseudo-différentiel sur $\partial\Omega$, on définit l'opérateur de Toeplitz T_Q sur $H^2(\partial\Omega)$ par

$$T_Q(\varphi) = S(Q\varphi)$$

Sans hypothèses supplémentaires sur Ω, on ne peut pas dire grand chose de ces opérateurs (par exemple il n'est pas vrai en général que $T_f T_g - T_{fg}$ soit compact). Dans toute la suite nous supposerons que Ω est strictement pseudo-convexe, autrement dit qu'il peut être défini par une inégalité $\rho < 0$, où ρ est une fonction C^∞, $d\rho \neq 0$ aux points de $\partial\Omega$, et la matrice de Levi $\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$ est $\gg 0$. [Certains des résultats décrits ci-dessous sont probablement encore vrais en supposant seulement que le problème "$\bar\partial$-Neumann" dans Ω est sous-elliptique].

Dans ce cas (cf. [4]) le projecteur de Szegö se prolonge (ou se restreint) en un opérateur continu $H^s(\partial\Omega) \to \mathcal{O}^s(\partial\Omega)$ pour tout s, $H^s(\partial\Omega)$ désignant l'espace de Sobolev, et $\mathcal{O}^s(\partial\Omega)$ le sous-espace des fonctions $\varphi \in H^s(\partial\Omega)$ qui admettent un prolongement holomorphe dans Ω. On peut alors définir l'opérateur de Toeplitz T_Q lorsque le degré d de Q est $\neq 0$; c'est un opérateur continu : $\mathcal{O}^s(\partial\Omega) \to \mathcal{O}^{s-d}(\partial\Omega)$ pour tout s. On obtient des classes plus ou moins larges d'opérateurs de Toeplitz selon qu'on part de classes plus ou moins larges d'opérateurs pseudo-différentiels sur $\partial\Omega$. Dans la suite, nous ne considérons que des opérateurs pseudo-différentiels réguliers (ou "classiques"), c'est-à-dire dont le symbole total (dans un système de coordonnées) admet un développement asymptotique :

$$q(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} q_{d-j}(x,\xi)$$

où q_{d-j} est C^∞ pour $\xi \neq 0$, homogène de degré d-j en ξ, et où le degré d est entier.

Il se produit alors le fait remarquable que les opérateurs de Toeplitz T_Q forment une algèbre, qui donne lieu à un calcul symbolique identique à celui des opérateurs pseudo-différentiels de n variables réelles. Nous nous proposons d'expliquer cela au paragraphe 2.

§ 2. MODELE MICROLOCAL DU PROJECTEUR DE SZEGÖ

Notons (x,y) la variable dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et posons

(2.1) $$D_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + y_j |D_x| \qquad (j = 1,\ldots,q)$$

Soit H_o l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^p)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ défini par

(2.2) $$H_o f(x,y) = (2\pi)^{-p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{ix.\xi - \frac{1}{2}|y|^2|\xi|} \left(\frac{|\xi|}{\pi}\right)^{q/4} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R}^p)$. H_o est un opérateur de Hermite, au sens de [1], ou un opérateur intégral de Fourier à phase complexe, au sens de [5]. On montre facilement que c'est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^p)$ sur le sous-espace $\mathcal{O}^o$ de $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ formé des $f \in L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ telles que $D_j f = 0$ pour $j = 1,\ldots,q$. Par suite le projecteur orthogonal sur $\mathcal{O}^o$ est $S_o = H_o H_o^*$.

Si Q est un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^{p+q}$, notons T_Q l'opérateur sur $\mathcal{O}^o$ défini par $T_Q(\varphi) = S_o(Q\varphi)$. Transportant de $\mathcal{O}^o$ à $L^2(\mathbb{R}^p)$ au moyen de H_o, on obtient l'opérateur $P = H_o^* T_Q H_o = H_o^* Q H_o$, et on a $T_Q = H_o P H_o^*$.

Il résulte de [5] (cf. aussi [2], [3]) que P est un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^p$, "classique" si Q est "classique", de symbole $\sigma(Q)|T^*\mathbb{R}^p$ lorsqu'on identifie $T^*\mathbb{R}^p$ a la sous-variété Σ_o d'équations $y = \eta = 0$ de $T^*\mathbb{R}^{p+q}$. Comme la correspondance $T_Q \mapsto P$ est bijective, les T_Q forment une algèbre isomorphe à l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^p$.

Or il se trouve (cf. [4])que, microlocalement, le projecteur de Szegö sur les fonctions holomorphes est équivalent au projecteur S_o ci-dessus (avec $p = n$, $q = n-1$), i.e. il existe (microlocalement) une transformation intégrale de Fourier elliptique qui fait passer de l'un à l'autre ; d'où l'assertion du paragraphe 1.

Décrivons la situation de façon un peu plus précise : dans le cas complexe, ce qui joue le rôle du système $(D_1,\ldots,D_q)$ ci-dessus est le système $\bar{\partial}_b$ des équations de Cauchy-Riemann tangentielles. Ce qui joue le rôle de la sous-variété $\Sigma_o \simeq T^*\mathbb{R}^p$ d'équations $y = \eta = 0$ est le cône Σ des points caractéristiques de $\bar{\partial}_b$ en lesquels $\bar{\partial}_b$ n'est pas hypoelliptique; Σ est le fibré en demi-droites formé des couples (x,ξ) où $x \in \partial\Omega$, et ξ est un covecteur de la forme $\lambda\alpha(x)$, $\lambda > 0$, α désignant la forme différentielle

$$(2.3) \qquad \alpha = \frac{1}{i} d'\rho\,|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2i}\,(d'\rho - d''\rho)\,|_{\partial\Omega}$$

(où comme au paragraphe 1, Ω est défini par l'inégalité $\rho < 0$).
$d = d' + d''$ est la décomposition de la dérivation extérieure en ses composantes de type $(1,0)$ (holomorphe) et $(0,1)$ (antiholomorphe) ; comme la forme induite $d\rho\,|\partial\Omega$ est nulle, et comme $d'\rho$ et $d''\rho$ sont conjugués, $d'\rho\,|\partial\Omega$ est imaginaire pure et $\frac{1}{i}d'\rho\,|\partial\Omega$ est réelle. On sait que les points caractéristiques de $\bar\partial_b$ sont les points de la forme $(x,\lambda\alpha(x))$ avec $\lambda \neq 0$; et qu'en outre, si Ω est strictement pseudo-convexe, $\bar\partial_b$ est hypoelliptique en un tel point si $\lambda < 0$ (cf. [1], [4]). L'hypothèse de stricte pseudo-convexité implique encore que x est une forme de contact sur $\partial\Omega$, et que Σ est une sous-variété symplectique de $T^*\partial\Omega$. Le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^p$ se traduit alors ainsi pour les opérateurs de Toeplitz : ceux-ci forment une algèbre (i.e. la somme, le composé de deux opérateurs de Toeplitz en est un autre) et

(i) <u>Un opérateur de Toeplitz</u> T_Q <u>de degré</u> k <u>possède un symbole</u> $\sigma_k(T_Q)$, <u>qui est une fonction</u> C^∞, <u>homogène de degré</u> k, <u>sur</u> Σ (en fait $\sigma(T_Q) = \sigma(Q)|\Sigma)$.

(ii) <u>Si</u> T_Q <u>est de degré</u> $\leq k$, <u>l'égalité</u> $\sigma_k(T_Q) = 0$ <u>implique que</u> T_Q <u>est en fait de degré</u> $\leq k-1$ (autrement dit, qu'il existe Q', de degré $\leq k-1$, tel que $T_Q = T_{Q'}$) .

(iii) <u>On a</u> $\sigma_{k+k'}(T_Q T_{Q'}) = \sigma_k(T_Q)\,\sigma_{k'}(T_{Q'})$

(iv) <u>On a</u> $\sigma_{k+k'-1}([T_Q,T_{Q'}]) = \frac{1}{i}\{\sigma_k(T_Q), \sigma_{k'}(T_{Q'})\}_\Sigma$ où $\{\ \}_\Sigma$ est le crochet de Poisson de la variété symplectique Σ.

(Pour les assertions ci-dessus, on a supposé que les o.p.d. Q, Q' servant à définir les opérateurs de Toeplitz T_Q, $T_{Q'}$ sont "classiques". On peut aussi construire des opérateurs de Toeplitz à partir d'o.p.d. plus généraux sur $\partial\Omega$; il faut alors modifier les assertions ci-dessus comme on le ferait pour ces o.p.d.)

§ 3. APPLICATIONS

Soit T_Q un opérateur de Toeplitz, ou plus généralement une matrice de tels opérateurs. On dit que T_Q est elliptique si son symbole est inversible. Dans ce cas T_Q possède une paramétrix, autrement dit il existe un opérateur de Toeplitz $T_{Q'}$ (de degré $-\deg(T_Q)$, et de symbole $\sigma(T_Q)^{-1}$) tel que $T_Q T_{Q'} - \mathrm{Id}$ et $T_{Q'} T_Q - \mathrm{Id}$ soient des opérateurs de degré $-\infty$ (i.e de la forme T_R où R est un opérateur de noyau C^∞). Comme un opérateur de degré < 0 est compact, il en résulte qu'un opérateur de Toeplitz elliptique possède un indice (i.e. le noyau est de dimension finie, l'image fermée de codimension finie). Cet indice est d'ailleurs donné par une formule analogue à la formule de Atiyah et Singer ; je renvoie à [2] pour sa description.

Voici un cas particulier intéressant : soit $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel holomorphe, à coefficients holomorphes, défini au voisinage de $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Alors P opère sur l'espace des fonctions holomorphes dans Ω (il est continu de $\mathcal{O}^s(\partial\Omega)$ dans $\mathcal{O}^{s-d}(\partial\Omega)$ si $d = \deg(P)$). On vérifie en outre aisément qu'il coïncide, dans les espaces $\mathcal{O}^s(\partial\Omega)$, avec un opérateur de Toeplitz T_Q de symbole donné par

$$\sigma(T_Q)(\lambda\alpha) = \sigma(P)(\frac{\lambda}{i} d'\rho)$$

où α et ρ sont définis comme au paragraphe 2 (2.3).

Ici, comme P ne dépend que des $\frac{\partial}{\partial z_j}$ et pas des $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, on a aussi $\sigma(P)(\frac{1}{i} d'\rho) = \sigma(P)(\frac{1}{i} d\rho) = \sigma(P)(\frac{\nu}{i})$, ou ν désigne le covecteur normal à $\partial\Omega$ ($\nu = d\rho$). Donc l'opérateur de Toeplitz défini par P est elliptique, et a un indice, si $\sigma(P)(\nu)$ est inversible, autrement dit si $\partial\Omega$ est non caractéristique pour P. On retrouve ainsi un résultat démontré par Bony et Schapira. Dans ce cas l'indice est de nouveau donné par la formule de [2] (il se trouve d'ailleurs que, dans la situation décrite ici, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, l'indice est toujours nul si P est un opérateur scalaire ; pour que l'indice soit non trivial, il faut que P soit une matrice carrée d'ordre $k \times k$, avec $k^2 \geq 2n-1$; il en serait autrement pour Ω ouvert d'une variété ou d'un espace de Stein arbitraire).

Comme l'algèbre des opérateurs de Toeplitz est très analogue à celle des opérateurs pseudo-différentiels, il n'est pas surprenant que les méthodes d'étude du spectre d'un o.p.d. elliptique auto-adjoint s'adaptent aux opérateurs de Toeplitz ; ceci fait l'objet de [3]. Voici un exemple : soit A un opérateur de Toeplitz autoadjoint, elliptique de degré 1, de symbole > 0. Alors les valeurs propres de A forment une suite qui tend vers $+\infty$, et le nombre N(s) de valeurs propres $\leq$ s (compte tenu des multiplicités) satisfait à la relation

$$N(s) = \frac{C}{(2\pi)^n} S^n + \mathcal{O}(S^{n-1}) \tag{3.1}$$

où n est la dimension complexe de Ω ($\dim_{\mathbf{R}} \partial\Omega = 2n-1$), et où C est le volume symplectique de la région de Σ définie par l'inégalité $\sigma(A) \leq 1$. Cette formule est l'exact analogue, pour les opérateurs de Toeplitz, de la formule de H. Weyl. En voici un exemple (bien connu en géométrie algébrique) : soit $Z \subset \mathbb{C}^N$ un cône complexe lisse en dehors de l'origine, de dimension n ; soit Ω l'intersection de la boule unité de $\mathbb{C}^N$ et de Z, de sorte que $\partial\Omega$ est l'intersection de $\mathbb{C}^N$ et de la sphère unité. Dans ce cas on choisit comme fonction de définition la fonction

$$\rho = \sum_1^N z_j \bar{z}_j - 1$$

de sorte que la forme de contact α est donnée par la formule

$$\alpha = \frac{1}{i} \sum \bar{z}_j dz_j |_{\partial\Omega}$$

Le groupe U(1) opère dans $\mathbb{C}^N$, Z, Ω, et $\partial\Omega$ (par $z \mapsto e^{i\theta} z$) ; le générateur infinitésimal $\frac{\partial}{\partial\theta}$ induit alors un opérateur de Toeplitz ($\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ coïncide, sur les fonctions holomorphes, avec l'opérateur $\sum_1^N z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$). Notons A l'opérateur de Toeplitz défini par $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$, sur $\partial\Omega$. C'est un opérateur autoadjoint, de degré 1, et elliptique positif car on a $\sigma(A)(\alpha) = \langle\alpha, \frac{\partial}{\partial\theta}\rangle = 1$. Les valeurs propres de A sont les entiers $k \geq 0$, les fonctions propres correspondantes étant les restrictions à $\partial\Omega$ des fonctions holomorphes homogènes de degré k sur $Z \setminus 0$ (qui sont des polynômes, du moins pour k assez grand). Le nombre N(k) de valeurs propres de A inférieures à k (compte tenu des multiplicités) satisfait donc à la relation de H. Weyl (3.1). D'autre part il est bien connu en géométrie algébrique qu'on a

$$N(k) = \frac{\deg(X)}{n!} k^n + O(k^{n-1})$$

$X \subset P_{N-1}(\mathbb{C})$ désignant la variété projective définie par Z. Effectuant alors le calcul du volume C dans la formule (3.1), on retrouve le résultat (bien connu) :

$$\deg(X) = \mathrm{vol}(X)/\mathrm{vol}\, P_{n-1}(\mathbb{C}) = \mathrm{vol}(X) . \frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} .$$

§ 4. GENERALISATIONS

Soit X une variété C^∞ de dimension impaire $2n-1$. On dit qu'une 1-forme différentielle α est une forme de contact si $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ ne s'annule en aucun point de X. On appelle structure de contact orientée sur X la structure définie par la donnée d'une classe de formes de contact équivalentes, deux formes α et α' étant équivalentes s'il existe une fonction $\lambda \in C^\infty(X)$, $\lambda > 0$, telle que $\alpha' = \lambda\alpha$. Se donner une classe de 1-formes équivalentes, sans zéro, revient à se donner un sous-fibré en demi-droites $\Sigma \subset T^*X \setminus 0$ (Σ est l'ensemble des covecteurs $(x, \lambda\alpha(x))$ avec $\lambda > 0$) ; un tel cône correspond à une structure de contact si et seulement si c'est une sous-variété symplectique de T^*X. Par exemple le bord $\partial\Omega$ d'un ouvert strictement pseudo-convexe est muni d'une structure de contact orientée. Voici un autre exemple (on peut montrer que c'est en fait un cas particulier du précédent) : soit Y une variété C^∞ de dimension n ; alors la sphère cotangente S^*Y, munie de la forme induite par la forme de Liouville $(\Sigma \eta_j dy_j)$ de T^*Y, est une variété de contact orientée.

On peut montrer que si X est une variété compacte, munie d'une structure de contact orientée, il existe toujours un projecteur S qui a le même comportement microlocal que le projecteur de Szegö, Σ jouant le rôle du cône caractéristique de ∂_b. A partir de là, on peut construire une algèbre "d'opérateurs de Toeplitz" sur X, qui a essentiellement les mêmes propriétés que celle décrite au paragraphe 2. Dans le cas où X est la sphère cotangente S^*Y d'une variété compacte, l'algèbre ainsi construite est essentiellement isomorphe à l'algèbre des o.p.d. sur Y. Cette construction est utilisée dans [3]. En voici une dernière application : on montre que si G est un groupe compact de transformations de contact de X, on peut choisir le "projecteur de Szegö" de sorte qu'il soit invariant par G. De ce résultat on déduit le résultat suivant : si Y est une variété compacte, tout groupe compact de transformations symplectiques, homogènes, de $T^*Y\setminus 0$ se relève en un groupe d'opérateurs intégraux de Fourier sur Y ; ce résultat a été démontré (par une autre méthode) par A. Weinstein. Je renvoie à [3] pour le détail de ces constructions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 585-639.

[2] L. Boutet de Monvel : On the index of Toeplitz operators of several complex variables. A paraître dans Invent. Math.

[3] L. Boutet de Monvel et V. Guillemin. The spectral theory of Toeplitz operators. A paraître .

[4] L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand : Sur la singularité des noyaux de Bergmann et de Szegö. Astérisque 34-35 (1976), 123-164.

[5] A. Melin et J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex valued phase functions, dans "Fourier integral operators and partial differential equations". Lecture Notes n°459, Springer Verlag, 120-223.