Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

PHAM THE LAI

Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n^o 6, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1978-1979

PROBLEME DE DIRICHLET DANS UN CONE AVEC PARAMETRE SPECTRAL POUR UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV A POIDS

par PHAM THE LAI

Exposé n° VI

21 Novembre 1978

§ 1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de montrer les conditions de résolubilité du problème de Dirichlet dans un cône $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sommet l'origine, relatif à l'opérateur :

$$(1.1) \qquad (\Delta + \lambda)u = f$$

$$(1.2) \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

où λ est un paramètre complexe, dit paramètre spectral, appartenant à $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+$ étant la demi-droite des réels > 0.

Nous construisons une classe d'espaces de Sobolev à poids pour laquelle le problème de Dirichlet possède la propriété d'unicité de la solution et nous donnons des conditions nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de cette solution.

Les résultats serviront comme "modèles" pour des problèmes plus généraux.

Ils généralisent, dans un certain sens, ceux de A. Avantaggiati-M. Troisi [3], de P. Grisvard [6] et de V. A. Kondratiev [9]. Dans ces derniers travaux, les auteurs n'ont considéré que le cas $\lambda = 0$.

Le cas $\lambda \neq 0$ demande une étude distincte du cas $\lambda = 0$, la singularité à l'infini étant différente.

Pour θ_o, θ_∞ deux nombres réels, notons par $r = |x|$ et par :

$$L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) = \{f \in L^2_{loc}(\Omega); r^{\theta_o}(1+r)^{\theta_\infty - \theta_o} f \in L^2(\Omega)\}$$

Alors, pour le second membre f de (1.1) appartenant à $L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$, l'espace dans lequel nous cherchons la solution u est différent selon le cas $\lambda = 0$ ou $\lambda \neq 0$.

Si $\lambda = 0$, c'est l'espace :

$$H^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) ; r^{-2+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) ; |\alpha| \le 2\}$$

tandis que, si $\lambda \neq 0$, c'est l'espace

$$W^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) ; (\tfrac{r}{1+r})^{-2+|\alpha|} D^\alpha u \in L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) ; |\alpha| \le 2\} .$$

Pour illustrer les résultats obtenus, considérons le cas d'un secteur plan Ω, d'ouverture ω_o, décrit en coordonnées polaires par :

$$\Omega = \{x = (r,\omega) \; ; \; r > 0, \; 0 < \omega < \omega_o\} \qquad 0 < \omega_o < 2\pi$$

Supposons, pour simplifier, que

$$\theta_o = \theta, \quad \theta_\infty = 1 \quad \text{avec} \quad \theta \leq 1 \quad \text{et} \quad \theta \neq 1 - \frac{\pi}{\omega_o}$$

Nous obtenons alors, pour $f \in L^2_{\theta,1}(\Omega)$, les conclusions :

(i) <u>Le cas $\lambda = 0$</u>

Le problème (1.1) (1.2) a une solution unique dans $H^2_{\theta,1}(\Omega)$ si f vérifie :

a. Si $\omega_o < \frac{\pi}{1-\theta}$, aucune condition sur f

b. Si $\omega_o > \frac{\pi}{1-\theta}$, f vérifie :

$$\int_\Omega f \chi_k \, dx = 0 \quad \text{pour tout entier } k < \frac{\omega_o(1-\theta)}{\pi}$$

où $\chi_k = r^{-\frac{k\pi}{\omega_o}} \sin \frac{k\pi\omega}{\omega_o}$.

(ii) <u>Le cas $\lambda \neq 0$</u>

Le problème (1.1) (1.2) a une solution unique dans $W^2_{\theta,1}(\Omega)$ si f vérifie :

a. Si $\omega_o < \frac{\pi}{1-\theta}$, aucune condition sur f

b. Si $\omega_o > \frac{\pi}{1-\theta}$, f vérifie :

$$\int_\Omega f \psi_k \, dx = 0 \quad \text{pour tout entier } k < \frac{\omega_o(1-\theta)}{\pi}$$

où $\psi_k = \alpha_k(r) \sin \frac{k\pi\omega}{\omega_o}$ et $\alpha_k(r)$ étant l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$

$$r^2\left(\frac{d^2\alpha_k}{dr^2} + \lambda\alpha_k\right) + r\frac{d\alpha_k}{dr} - \left(\frac{\pi k}{\omega_o}\right)^2 \alpha_k = 0$$

tendant rapidement vers 0 lorsque $r \to +\infty$.

Les résultats décrits ci-dessus sont des cas particuliers des théorèmes donnés aux paragraphes II et III. Nous donnons aussi des estimations a priori par rapport au paramètre spectral λ, généralisant au domaine conique celles bien connues de S. Agmon [1], M. S. Agranovitch - M. I. Vishik [2] pour un demi-espace.

La méthode de résolution suit celle de P. Grisvard [6] ; on utilise les coordonnées sphériques : un point x de $\mathbb{R}^n$ est repéré à l'aide de $r > 0$ et $\omega \in S^{n-1}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, le domaine Ω sera le cône de sommet l'origine engendré par un ouvert G <u>régulier</u> de S^{n-1} c'est-à-dire :

$$\Omega = \{x \mid x = (r,\omega), \quad r > 0, \ \omega \in G\}$$

L'équation (1.1) s'écrit en coordonnées sphériques :

$$r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \lambda u\right) + (n-1)r\,\frac{\partial u}{\partial r} + Lu = r^2 f = g \tag{1.3}$$

où L est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{n-1}.

La condition de Dirichlet est réalisée implicitement en cherchant u dans l'espace

$$u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ ; H^1_o(G)) \tag{1.4}$$

où $H^1_o(G)$ est l'espace de Sobolev usuel d'ordre 1 sur G, à trace nulle.

Puisque G est régulier, il est bien connu que l'opérateur $-L$ avec domaine $D(L) = H^2(G) \cap H^1_o(G)$ est auto-adjoint, positif dans $L^2(G)$.

Soit la base orthonormale $\{v_k\}_{k \geq 1}$ de $L^2(G)$, formée de fonctions propres de l'opérateur $-L$:

$$-Lv_k = \lambda_k v_k$$

où $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ est la suite des valeurs propres qui sont positives, tendant vers $+\infty$ (avec la convention habituelle : les valeurs propres sont rangées $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ chacune des valeurs propres étant répétée suivant sa multiplicité).

D'après (1.4), on a :

$$u(r;\omega) = \sum_{k \geq 1} u_k(r)\, v_k(\omega) \tag{1.5}$$

où

$$u_k(r) = \int_G u(r,\omega) v_k(\omega)\,d\omega$$

la série du second membre de (1.5) étant convergente dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1_o(G))$.

L'équation (1.3) s'écrit :

$$(1.6) \qquad r^2\left(\frac{d^2u_k}{dr^2} + \lambda u_k\right) + (n-1)r\,\frac{du_k}{dr} - \lambda_k u_k = g_k \quad , \quad k \geq 1$$

où

$$g_k(r) = \int_G g(r;\omega)v_k(\omega)\,d\omega$$

Le problème est ainsi réduit à la résolution de la suite d'équations (1.6) dans des espaces de Sobolev à poids adaptés sur $\mathbb{R}^+$.

§ II. ENONCES DES RESULTATS

II.1 Le cas $\lambda = 0$

Pour θ_o, θ_∞ donnés, considérons le problème :

$$(D)_{\theta_o,\theta_\infty} \qquad \begin{cases} \text{Chercher } u \in H^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^1_o(G)) \text{ vérifiant} \\ \Delta u = f \ , \quad f \text{ donnée dans } L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \end{cases}$$

Introduisons les hypothèses suivantes pour le couple (θ_o,θ_∞) :

(A) Toutes les valeurs propres λ_k de l'opérateur $-L$ sont différentes de

$$(\theta_o + \tfrac{u}{2} - 2)(\theta_o - \tfrac{n}{2}) \qquad \text{et} \qquad (\theta_\infty + \tfrac{n}{2} - 2)(\theta_\infty - \tfrac{n}{2})$$

(B) $\theta_o \leq \theta_\infty$

Sous les hypothèses (A) (B) pour $(\theta_o, \theta_\infty)$, définissons les sous-ensembles d'entiers :

$$N^1_{\theta_o,\theta_\infty} = \begin{cases} \phi \quad \text{si} \ \ \theta_\infty \leq 1 \quad \text{ou si} \ \theta_o = \theta_\infty \\ \{k \geq 1 \ ; \ \ \lambda_k < (\theta_\infty - \frac{n}{2})(\theta_\infty + \frac{n}{2} - 2)\} \quad \text{si} \ \theta_o \leq 1 < \theta_\infty \\ k \geq 1 \ ; \ (\theta_o - \frac{n}{2})(\theta_o + \frac{n}{2} - 2) < \lambda_k < (\theta_\infty - \frac{n}{2})(\theta_\infty + \frac{n}{2} - 2) \ \text{si} \ 1 < \theta_o < \theta_\infty \end{cases}$$

$$N^2_{\theta_o,\theta_\infty} = \begin{cases} \phi \quad \text{si} \quad \theta_o \geq 1 \quad \text{ou si } \theta_o = \theta_\infty \\ \{k \geq 1 \ ; \ \lambda_k < (\theta_\infty - \frac{n}{2})(\theta_o + \frac{n}{2} - 2)\} \quad \text{si} \quad \theta_o < 1 \leq \theta_\infty \\ \{k \geq 1 \ ; \ (\theta_\infty - \frac{n}{2})(\theta_\infty + \frac{n}{2} - 2) < \lambda_k < (\theta_o - \frac{u}{2})(\theta_o + \frac{u}{2} - 2) \ \text{si } \theta_o < \theta_\infty < 1 \end{cases}$$

$$N_{\theta_o,\theta_\infty} = N^1_{\theta_o,\theta_\infty} \cup N^2_{\theta_o,\theta_\infty}$$

Ces ensembles sont finis car $\lambda_k \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Introduisons finalement, pour une fonction $f \in L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$, la condition (C) :

(a) elle est vide si $N_{\theta_o,\theta_\infty}$ est vide

(b) si $N_{\theta_o,\theta_\infty}$ est non vide, alors f vérifie, pour tout $k \in N_{\theta_o,\theta_\infty}$:

(b_1) $\int_\Omega \chi_{2,k} f \, dx = 0$ si $k \in N^1_{\theta_o,\theta_\infty} - N^2_{\theta_o,\theta_\infty}$

(b_2) $\int_\Omega \chi_{1,k} f \, dx = 0$ si $k \in N^2_{\theta_o,\theta_\infty} - N^1_{\theta_o,\theta_\infty}$

(b_3) $\int_\Omega \chi_{1,k} f \, dx = \int_\Omega \chi_{2,k} f \, dx = 0$ si $k \in N^1_{\theta_o,\theta_\infty} \cap N^2_{\theta_o,\theta_\infty}$

Dans ces intégrales, nous avons noté les fonctions $\chi_{i,k}$ $(i = 1,2; k \geq 1)$ définies dans les coordonnées sphériques pour la formule :

$$\chi_{i,k}(r,\omega) = r^{\mu_i(k)} v_k(\omega)$$

avec

$$\mu_1(k) = 1 - \frac{n}{2} - \sqrt{(\frac{n}{2} - 1)^2 + \lambda_k}$$

$$\mu_2(k) = 1 - \frac{n}{2} + \sqrt{(\frac{n}{2} - 1)^2 + \lambda_k}$$

<u>Remarque</u> : Les différentes conditions (b_1) (b_2) (b_3) ont un sens car on vérifie facilement que les fonctions sous l'intégrale sont intégrables. Alors, nous avons le :

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> $\theta_o,\theta_\infty \in \mathbb{R}$ <u>et</u> f <u>donnée dans</u> $L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$. <u>Sous les conditions</u> (A)(B) <u>pour le couple</u> (θ_o,θ_∞) <u>et la condition</u> (C) <u>pour f, le problème de Dirichlet</u> $(D)_{\theta_o,\theta_\infty}$ <u>a une solution et une seule</u>. <u>La condition</u>

(C) est aussi nécessaire pour l'existence.

Remarque : Lorsque $\theta_o = \theta_\infty = \theta$, il est clair que $N_{\theta,\theta}$ est vide quelque soit θ. Le théorème 1 montre que le problème $(D)_{\theta,\theta}$ a toujours une solution unique pour $f \in L^2_{\theta,\theta}(\Omega)$ sous la seule condition (A) pour le couple (θ,θ). On retrouve ainsi un résultat de V. A. Kondratiev [9] .
Lorque $\theta = 1$, la condition (A) est toujours réalisée : la solution correspondante est, de fait, la solution variationnelle qu'étudie P. Grisvard [6] .

II.2 Le cas $\lambda \neq 0$

Pour θ_o, θ_∞ donnés, considérons maintenant le problème :

$$(D^\lambda)_{\theta_o,\theta_\infty} \quad \begin{cases} \text{Chercher } u \in W^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ ; H^1_o(G)) \text{ vérifiant} \\ (\Delta + \lambda)u = f \ , \ f \text{ donnée dans } L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \end{cases}$$

Introduisons les hypothèses suivantes pour θ_o :

(α) Toutes les valeurs propres λ_k de l'opérateur $-L$ sont différentes de $(\theta_o + \frac{n}{2} - 2)(\theta_o - \frac{n}{2})$

(β) $\theta_o < 1 + \sqrt{(\frac{n}{2} - 1)^2 + \lambda_1}$

Pour θ_o vérifiant $(\alpha)(\beta)$, notons le sous-ensemble d'entiers fini :

$$N_{\theta_o} = \begin{cases} \phi & \text{si } \theta_o \geq 1 \\ \{k \geq 1 \ ; \lambda_k < (\theta_o - \frac{n}{2})(\theta_o + \frac{n}{2} - 2)\} & \text{si } \theta_o < 1 \end{cases}$$

Introduisons, pour une fonction $f \in L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\ell)$, la condition $(\mathcal{C})$:

(a) elle est vide si N_{θ_o} est vide

(b) si N_{θ_o} est non vide, alors f vérifie, pour tout $k \in N_{\theta_o}$:

$$\int_\Omega f \, \psi_k \, dx = 0$$

Dans ces intégrales, nous avons noté les fonctions ψ_k $(k \geq 1)$ définies par :

$$\psi_k(r,\omega) = \alpha_k(r)v_k(\omega)$$

où α_k est l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$:

$$r^2\left(\frac{d^2\alpha_k}{dr^2} + \lambda\alpha_k\right) + (n-1)r\frac{d\alpha_k}{dr} - \lambda_k\alpha_k = 0$$

tendant rapidement vers 0 lorsque $r \to \infty$.

Remarque : On vérifie aussi que la fonction sous l'intégrale est intégrable en explicitant le comportement à l'origine de α_k .

Alors, nous avons le :

Théorème 2 : Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \overline{\mathbb{R}^+}$, $\theta_o, \theta_\infty \in \mathbb{R}$ et f donnée dans $L^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega)$. Sous les conditions $(\mathcal{A})$ $(\mathcal{B})$ pour θ_o et la condition $(\mathcal{C})$ pour f, le problème de Dirichlet $(D^\lambda)_{\theta_o,\theta_\infty}$ a une solution unique. La condition $(\mathcal{C})$ est aussi nécessaire pour l'existence .

Lorsque $\theta_o = \theta_\infty = \theta$, on peut montrer que toute demi-droite du plan complexe $D_\tau = \{\lambda = \rho e^{i\tau} ; 0 < \rho\}$ $0 < \tau < 2\pi$, différente de $\mathbb{R}^+$, est une direction de "croissance minimale" de la résolvante. C'est le :

Corollaire 3 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\tau \in]0, 2\pi[$. Supposons que $(\mathcal{A})$ $(\mathcal{B})$ sont vérifiées pour θ. Il existe une constante C telle que :

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2_{\theta,\theta}(\Omega)} + |\lambda|^{1/2} \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2_{\theta,\theta}(\Omega)} + |\lambda| \|u\|_{L^2_{\theta,\theta}(\Omega)} \leq$$

$$\leq C\|(\Delta + \lambda)u\|_{L^2_{\theta,\theta}(\Omega)}$$

pour tout $u \in N^2_{\theta,\theta}(\Omega) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_o(G))$ et $\lambda \in D_\tau$.

Au paragraphe suivant, nous donnons une idée de la démonstration du théorème 2 et nous renvoyons à notre travail [10] pour les démonstrations complètes.

§ III. ETUDE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE 2 DEPENDANT DE DEUX PARAMETRES ET PREUVE DU THÉOREME 2

On a vu au paragraphe I que l'étude du problème de Dirichlet se ramène à l'étude de la suite d'équations (1.6) sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C} - \overline{\mathbb{R}^+}$ et $\xi > 0$, notons, en écrivant $\frac{d}{dr} = \partial$,

(3.1) $$\mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial) = r^2(\partial^2 + \lambda) + (n-1)r\partial - \xi^2$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre 2, singulier à l'origine et à l'infini. L'origine est un point singulier régulier tandis que l'infini est un point singulier irrégulier de type 2. Nous avons à étudier la résolubilité de $\mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial)$ dans des espaces de Sobolev à poids sur $\mathbb{R}^+$ adaptés et à contrôler les normes des isomorphismes inverses en fonction des deux paramètres λ et ξ.

Pour θ_o, θ_∞ donnés, posons :

(3.1) $$\gamma_o = \theta_o - 2 + \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma_\infty = \theta_\infty - 2 + \frac{n-1}{2}$$

Notons :

$$L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+) = \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+) \; ; \; r^{\gamma_o}(1+r)^{\gamma_\infty - \gamma_o} u \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$$

$$W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+) = \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+) \; ; \; r^k(1+r)^{2-k}\partial^k u \in L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+); \; k = 0,1,2\}$$

Soit $P_{\lambda,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty}$ l'opérateur de $W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)$ dans $L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)$ défini par $u \mapsto \mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial)u$. Il est clair que $P_{\lambda,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty}$ est continu .

III.1 <u>Etude de</u> $P_{\lambda,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty}$

Soit Q_ξ le polynôme caractéristique de $\mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial)$ à l'origine :

$$Q_\xi(\mu) = \mu^2 + (n-2)\mu - \xi^2$$

Les deux racines de Q_ξ sont réelles et distinctes et notons les $\mu_1(\xi)$, $\mu_2(\xi)$ avec $\mu_1(\xi) < \mu_2(\xi)$.

Nous avons le :

Théorème 4 : Supposons que $-(\frac{1}{2}+\gamma_0)$ n'est pas racine de Q_ξ. Alors l'opérateur $P_{\lambda,\xi;\gamma_0,\gamma_\infty}$ est à indice. Plus précisément, nous avons :

(a) Si $-(\frac{1}{2}+\gamma_0) < \mu_1(\xi) < \mu_2(\xi)$, $\operatorname{ind} P_{\lambda,\xi;\gamma_0,\gamma_\infty} = 1$ et $P_{\lambda,\xi;\gamma_0,\gamma_\infty}$ est surjectif.

(b) Si $\mu_1(\xi) < -(\frac{1}{2}+\gamma_0) < \mu_2(\xi)$, $\operatorname{ind} P_{\lambda,\xi;\gamma_0\gamma_\infty} = 0$ et $P_{\lambda,\xi;\gamma_0,\gamma_\infty}$ est un isomorphisme.

(c) Si $\mu_1(\xi) < \mu_2(\xi) < -(\frac{1}{2}+\gamma_0)$, $\operatorname{ind} P_{\lambda,\xi;\gamma_0,\gamma_\infty} = -1$ et $P_{\lambda,\xi;\gamma_0,\gamma_\infty}$ est injectif.

La preuve du théorème 4 est basée essentiellement sur la recherche des solutions du noyau $\mathcal{N}_{x,\xi} = \{\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) \; ; \; \mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial)\alpha = 0\}$ qui tendent rapidement vers 0 lorsque $r \to +\infty$.

Pour l'opérateur $\mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial)$, l'infini est un point singulier irrégulier de type 2 et à pour caractéristiques (premières caractéristiques) et exposants (en suivant la terminologie du livre de N. Dunford, J. T. Schwartz [5] page 1528)

$$(i\sqrt{\lambda}, \frac{n-1}{2}) \text{ et } (-i\sqrt{\lambda}, \frac{n-1}{2})$$

Comme $e^{i\sqrt{\lambda}r}$ est "petite" par rapport à $e^{-i\sqrt{\lambda}r}$ est "petite" par rapport à $e^{-i\sqrt{\lambda}r}$ lorsque $r \to +\infty$, il existe une solution unique $\alpha \in \mathcal{N}_{\lambda,\xi}$ telle que son développement asymptotique, lorsque $r \to \infty$, est de la forme :

$$\alpha(r) = e^{i\sqrt{\lambda}r}\, r^{-\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \dots\right) \qquad r \to +\infty$$

Soit β_1, β_2 une base de $\mathcal{N}_{\lambda,\xi}$, dont les développements asymptotiques à l'origine sont :

$$\left.\begin{aligned} \beta_1(r) &= r^{\mu_1(\xi)}(1 + b_1 r + b_2 r^2 + \dots) \\ \beta_2(r) &= r^{\mu_2(\xi)}(1 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots) \end{aligned}\right\} \quad r \to 0$$

Par transformation de variable et de fonction, on montre que

$$\beta_2(r) = r^{\mu_2(\xi)}\, e^{-i\sqrt{\lambda}\,r}\, \phi\left(\frac{n-1}{2} + \mu_2(\xi),\, n-1 + 2\mu_2(\xi);\, 2i\sqrt{\lambda}\, r\right) \tag{3.2}$$

où $\phi(\alpha,\gamma;z)$ est l'unique fonction <u>entière</u> en z solution de l'équation hypergéométrique confluente :

$$z\frac{d^2}{dz^2}\phi + (\gamma - z)\frac{d\phi}{dz} - \alpha\phi = 0$$

et vérifiant $\phi(\alpha,\gamma;0) = 1$.

$\phi(\alpha,\gamma;z)$ a un comportement asymptotique.

$$\phi(\alpha,\gamma;z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha} \qquad |z| \to \infty \ ; \ \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2} \tag{3.3}$$

Il résulte de (3.2) (3.3) que β_2 est une solution "grande" à l'infini et par conséquent α s'écrit :

$$\alpha = C_1\beta_1 + C_2\beta_2 \tag{3.4}$$

avec $C_1 \neq 0$.

Il est facile de prouver par ailleurs que $P_{\lambda,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty}$ est à indice et d'indice égal à $\chi - 1$ où χ est le nombre des racines de Q_ξ plus grandes que $-(\frac{1}{2}+\gamma_o)$. Ce résultat et (3.4) prouvent alors le théorème 4.

Le théorème 4 nous montre que le problème :

$$(*) \quad \begin{cases} \text{Pour } h \in L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+) \\ \text{chercher } v \in W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+) \text{ telle que } \mathcal{P}_{\lambda,\xi}(\partial)v = h \end{cases}$$

a une solution, unique dans le cas (b), non unique dans le cas (a).

La résolubilité dans le cas (c) est donnée par la :

<u>Proposition 5</u> : <u>Supposons que</u> $\mu_2(\xi) < -(\frac{1}{2}+\gamma_o)$. <u>Le problème</u> (*) <u>a une solution unique si et seulement si</u> :

$$\int_o^\infty r^{n-3}\,\alpha(r)\,h(r)dr = 0 \tag{3.5}$$

Comme $\mu_1(\xi) \to -\infty$ et $\mu_2(\xi) \to +\infty$ lorsque $\xi \to \infty$, il existe $\xi_o > 0$ telle que l'opérateur $P_{\lambda,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty}$ est un isomorphisme (cas (b)) pour tout $\xi \geq \xi_o$ et $\lambda = \mathbb{C} - \overline{\mathbb{R}^+}$.

Pour estimer la norme de l'inverse en fonction de λ,ξ écrivons :

$$\lambda = \rho\, e^{i\tau} \quad \text{avec } \rho = |\lambda| \quad \text{et} \quad 0 < \tau < 2\pi$$

$$h_{\rho,\xi}(r) = (\rho + \xi^2 r^{-2})^{1/2}$$

$$\|v\|^2_{\rho,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty} = \sum_{j=o}^{2} \|r^2 h^{2-j}_{\rho,\xi}\partial^j_v\|_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)}$$

Il est clair que, pour chaque ρ,ξ fixés, la norme $\| \ \|_{\rho,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty}$ est équivalente à la norme $\| \ \|_{H^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}}$.

Nous avons le :

<u>Théorème 6</u> : <u>Soit</u> $0 < \tau < 2\pi$. <u>Il existe</u> ξ_o <u>et</u> $C > 0$ <u>telle que</u> :

$$\text{(3.6)} \qquad \|v\|_{\rho,\xi;\gamma_o,\gamma_\infty} \leq C\|P_{\lambda,\xi}(\partial)v\|_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)}$$

<u>pour tout</u> $\xi \geq \xi_o$, $\lambda \in D_\tau$ <u>et</u> $v \in W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)$.

La preuve du théorème 6 est faite en deux étapes : on fait une partition de l'unité de $\mathbb{R}^+$ dépendant de ρ,ξ en étudiant (3.6) successivement sur $[0,\delta_o\xi\rho^{-1/2}]$ et $[\delta_1\xi\rho^{-1/2},+\infty[$ avec $\delta_1 < \delta_o$ convenables.

La première étape consiste par établir le :

<u>Lemme 7</u> : <u>Il existe</u> $0 < \delta_o < 1$, $\xi_o > 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>telle que</u> (3.6) <u>est vraie pour tout</u> $\xi \geq \xi_o$, $\lambda \in \mathbb{C} - \overline{\mathbb{R}^+}$, $v \in W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)$ <u>à support dans</u> $[0,\delta_o\xi\rho^{-1/2}]$.

Pour cela on commence à établir que :

$$\sum_{j=o}^{\infty} \xi^{2-j}\|r^j\partial^j v\|_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)} \leq C\|r^2\partial^2 v + (n-1)r\partial v - \xi^2 v\|_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)}$$

pour tout $v \in H^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+) = \{v; r^j\partial^j v \in L^2_{\gamma_o,\gamma_o}(\mathbb{R}^+); j = 0,1,2\}$ et $\xi \geq \xi_o$.

Comme $|\lambda| r^2 \leq \delta_o^2\xi^2$ et $r^2 h^{2-j}_{\rho,\xi} \leq 2r^j\xi^{2-j}$ sur $[0,\delta_o\xi\rho^{-1/2}]$, l'inégalité précédente donne le lemme. La deuxième étape utilise un résultat de M. I. Vishik, V. V. Grushin [8] sur les équations différentielles à "coefficients peu variables". On fait un changement de variable $r \to t$

par la formule :

$$t(r) = \int_{\delta_1 \xi \rho^{-1/2}}^{r} h_{\rho,\xi}(\tau)d\tau$$

et un changement de fonction pour se ramener à la situation de [8] et obtenir le :

<u>Lemme 8</u> : <u>Soit</u> $0 < \tau < 2\pi$. <u>Il existe</u> ξ_o <u>et</u> $C > 0$ <u>telle que</u> (3.6) <u>est vraie pour</u> $\xi \geq \xi_o$, $\lambda \in D_\tau$ <u>et</u> $v \in W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)$ <u>à support dans</u> $\overline{\delta_1 \xi \rho^{-1/2},\infty}$.

L'idée d'utiliser [8] est déjà faite dans P. Bolley, J. Camus, B. Helffer [4] . On obtient ensuite facilement le théorème 6 en utilisant une partition de l'unité et les deux lemmes précédents.

III.2 <u>Preuve du théorème 2</u>

Avec les notations du paragraphe I, il est clair que :

$$(3.7) \qquad \|f\|^2_{L^2_{\theta_\infty,\theta_\infty}(\Omega)} = \sum_{k\geq 1} \|q_k\|^2_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)}$$

avec γ_o,γ_∞ donnés par les formules (3.1) du paragraphe III.

On donne maintenant, pour une fonction u, les conditions sur les composantes $\{u_k\}_{k\geq 1}$, pour que u appartienne à $W^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1_o(G))$.

Notons pour cela $W(\Omega)$ le sous-espace de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1_o(G))$ défini par :

$$W(\Omega) = \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1_o(G));\ \sum_{k\geq 1} \|r^2 h^{2-j}_{1,\sqrt{\lambda_k}}\, \partial^j u_k\|^2_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)} < \infty\}$$

Muni de la norme canonique, c'est un espace de Hilbert :

<u>Lemme 9</u> : <u>Pour</u> $\theta_o,\theta_\infty \in \mathbb{R}$, <u>on a</u> :

$$(3.8) \qquad W^2_{\theta_o,\theta_\infty}(\Omega) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+;H^1_o(G)) = W(\Omega)$$

<u>et la norme de</u> $W^2_{\theta_o\theta_\infty}(\Omega)$ <u>est équivalente à celle de</u> $W(\Omega)$.

En vertu de (3.7) (3.8), la résolution du problème $(D^{\lambda})_{\theta_o\theta_\infty}$ est équivalente à la résolution d'une suite d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^+$:

$$(3.8)_k \qquad \begin{cases} \mathcal{P}_{\lambda,\sqrt{\lambda_k}}(\partial)u_k = g_k \\ u_k \in W^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+) \end{cases}$$

telle que la suite $\{u_k\}_{k\geq 1}$ vérifie :

$$(3.9) \qquad \sum_{j=o}^{2} \sum_{k\geq 1} \| r^2 h^{2-j}_{1,\sqrt{\lambda_k}} \partial^j u_k \|^2_{L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)} < \infty$$

Or, nous savons que $g_k \in L^2_{\gamma_o,\gamma_\infty}(\mathbb{R}^+)$; les hypothèses $(\mathcal{A})$ $(\mathcal{B})$ pour θ_o assure, comme on le vérifie aisément, que le problème $(3.8)_k$ a au plus une solution, pour tout $k \geq 1$.

La condition $(\mathcal{C})$ pour f entraîne que, pour $k \in N_{\theta_o}$, la fonction g_k vérifie la condition d'orthogonalité (3.5) et par conséquent $(3.8)_k$ a une solution unique pour ces k.

Si $k \notin N_{\theta_o}$, on vérifie que $P_{\lambda,\sqrt{\lambda_k};\gamma_o,\gamma_\infty}$ est un isomorphisme et donc $(3.8)_k$ a encore une solution unique pour ces k.

Il reste à vérifier (3.9). On l'obtient facilement en utilisant le théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. on Pure and Applied Math., Vol.15, (1962), p.119-147.

[2] M. S. Agranovitch, M. J. Vishik : Elliptic problems with parameters and parabolic problems of general type. Russian Math. Survey, Vol.19, (1964), p.53-157.

[3] A. Avantaggiati, M. Troisi : Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo, I, II, III Ann. di Mat. pura e appl., (1973) p.348-361, (1973) p.207-252, (1974) p.1-64.

[4] P. Bolley, J. Camus, B. Helffer : Remarques sur l'hypoellipticité C. R. Acad. Sc. Paris 283 (1976), p.A979-A982 .

[5] N. Dunford, J. T. Schwartz : Linear operators (Part II). Interscience Publishers (1963).

[6] P. Grisvard : Problème de Dirichlet dans un cône. Ricerche di Matematica, vol.XX, (1971), p.175-192.

[7] P. Grisvard : Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problems in a plygonal or polyhedral domain. Numerical solution of Part. Diff. Equation (1976), p.207-273.

[8] V. V. Grushin, M. I. Vishik : Boundary value problems of elliptic equations degenerate on the boundary of a domain. Math. URSS Sbornik, vol. 9,(1969), p.423-454.

[9] V. A. Kondratiev : Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. Transactions of the Moscow Math. Soc., t.16, (1967), p.227-313.

[10] Pham The Lai : Problème de Dirichlet dans un cône avec paramètre spectral pour une classe d'espaces de Sobolev à poids. A paraître dans Comm. in P.D.E.