Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Helffer
J. Nourrigat

Opérateurs différentiels hypoelliptiques et groupes nilpotents

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 5, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU · 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 , Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

OPERATEURS DIFFERENTIELS HYPOELLIPTIQUES ET GROUPES NILPOTENTS

par B. HELFFER et J. NOURRIGAT

Exposé n° V

21 Novembre 1978

§ 1. INTRODUCTION

Soit M une variété réelle C^∞ de dimension n. On considère des champs de vecteurs $X_1,\dots,X_p$ sur M, à coefficients réels C^∞, vérifiant la condition de Hörmander. On désigne, pour tout entier k et pour tout point x de M, par $V_k(x)$ le sous-espace de T_xM engendré par les crochets de longueur inférieure ou égale à k, restreints en x, des champs X_j. La condition de Hörmander [14] dit alors qu'il existe un entier r supérieur ou égal à 1 tel que :

$$(1.1) \qquad V_r(x) = T_xM , \qquad \forall x \in M$$

On se propose d'étudier l'hypoellipticité d'opérateurs différentiels de la forme suivante :

$$(1.2) \qquad P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, X^\alpha$$

où, pour toute suite $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, on pose $X^\alpha = X_{\alpha_1} \cdot\dots\cdot X_{\alpha_k}$ et $|\alpha| = k$ et où les coefficients a_α sont des fonctions C^∞ sur M, à valeurs complexes.

<u>Définition 1.1</u> : On dit que P, de la forme (1.2), est hypoelliptique maximal en un point x_o de M, s'il existe un voisinage ω de x_o, et une constante C strictement positive , tels que l'on ait, pour tout u dans $C_o^\infty(\omega)$:

$$(1.3) \qquad \sum_{|\alpha| \leq m} \|X^\alpha u\|^2_{L^2(M)} \leq C(\|Pu\|^2_{L^2(M)} + \|u\|^2_{L^2(M)})$$

L'hypoellipticité maximale en un point x_o implique bien l'hypoellipticité de P dans un voisinage de x_o. En effet, on sait (cf. Rotschild-Stein [20]) que, si les champs X_j vérifient la conditions de Hörmander (1.1), il existe, pour tout compact K de M, une constante C_K strictement positive telle que l'on ait, pour tout u dans $C_o^\infty(K)$:

$$(1.4) \qquad \|u\|^2_{H^{1/r}(M)} \leq C_K(\sum_{j=1}^{p} \|X_j u\|^2_{L^2(M)} + \|u\|^2_{L^2(M)}) .$$

Un critère de Trèves [22] (cf. également [23]) permet de démontrer l'hypoellipticité de P à partir de (1.3) et (1.4).

On se propose, dans ce qui suit, d'énoncer des conditions nécessaires d'hypoellipticité maximale pour des opérateurs de la forme (1.2). Donnons tout de suite des cas "classiques" où les conditions nécessaires seront aussi suffisantes.

<u>Exemple 1.2</u> : (Hörmander [14], Rotschild-Stein [20]).
Les opérateurs

$$(1.5) \qquad P = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 + \sum_{j,k\leq p} a_{jk}[X_j, X_k]$$

(où les a_{jk} sont réels) sont hypoelliptiques maximaux en tout point de M.

<u>Exemple 1.3</u> : (Grušin [8])
Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et où les champs X_j sont :

$$(1.6) \qquad X_n = \frac{\partial}{\partial x_n} \quad , \quad X_j = x_n^k \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1 \leq j \leq n)$$

(où k est un entier ≥ 0)
La condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité maximale démontrée dans [8] coïncide avec la condition que nous énoncerons au § 2 dans un cadre plus général.

<u>Exemple 1.4</u> :
Dans le cas où r est égal à 1, la condition (1.3) est équivalente à l'hypoellipticité.

On verra dans la suite de l'exposé d'autres cas où la condition nécessaire d'hypoellipticité maximale que nous démontrons est aussi suffisante. C'est en particulier le cas, lorsque l'hypothèse suivante est satisfaite :

(1.7) Pour tout k inférieur à r, la fonction $x \to \dim V_k(x)$ est constante sur M .

Cette condition a été introduite par G. Métivier [17] pour l'étude de la fonction spectrale des opérateurs (1.5). Dans ce cas, L. P. Rotschild [19] a récemment démontré que la condition nécessaire énoncée au paragraphe 3 est suffisante pour l'hypoellipticité maximale des opérateurs (1.2).

§ 2. LE CAS QUASI-HOMOGENE

2.1 Hypothèses

Nous supposons dans ce paragraphe que la variété M est l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, et qu'on s'est donné une décomposition de E en somme de sous-espaces E_i

(2.1.1) $$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

On associe à cette décomposition une famille de dilatations δ_t $(t > 0)$ définie par :

(2.1.2) $$\delta_t\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} t^i x_i \qquad \text{où } x_i \in E_i$$

On dira qu'un opérateur A sur E est homogène de degré m si :

(2.1.3) $$A(f \circ \delta_t) = t^m (Af) \circ \delta_t \;, \quad \forall t > 0 \;, \quad \forall f \in C_0^\infty(E)$$

On fait sur les champs X_j, outre l'hypothèse (1.1), l'hypothèse suivante :

(2.1.4) | Les champs X_j sont homogènes de degré 1 et leurs coefficients sont des polynômes.

2.2 Lien avec les représentations des groupes de Lie nilpotents

(cf. Folland [6])

a) Sous l'hypothèse (2.1.4), on voit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ engendré par les X_j est nilpotente et de dimension finie.

Désignons par $\mathfrak{G}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ le sous-espace de $\mathfrak{G}$ formé des champs homogènes de degré i. On a :

(2.2.1) $$\begin{cases} \mathfrak{G} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{G}_i & \\ [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_{i+j} & \text{si } i + j \leq r \\ [\mathfrak{G}_i, \mathfrak{G}_j] = 0 & \text{si } i + j > r \\ \mathfrak{G}_1 \text{ engendre } \mathfrak{G} & \end{cases}$$

Soit $\mathcal{H}$ le sous-espace de $\mathcal{G}$ formé des champs s'annulant à l'origine. $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre graduée de $\mathcal{G}$, et a pour dimension :

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{G} - \dim E \geq 0.$$

b) Réciproquement, soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie vérifiant (2.2.1), et $\mathcal{H}$ une sous-algèbre graduée de $\mathcal{G}$. Soient G et H les groupes connexes, simplement connexes associés à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ par l'application exponentielle. Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ qu'on identifie à $H\backslash G$. Soit p la projection de G sur E. On définit l'action à droite : $(x,g) \to x.\bar{g}$ de G sur E par :

$$x.\bar{g} = p(yg) \qquad \text{si } x = p(y) .$$

On remarque que, si E est choisi convenablement (comme supplémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$), la mesure de Lebesgue sur E est invariante par l'action de G. On définit alors la représentation unitaire $\pi_{(o,\mathcal{H})}$ de G dans $L^2(E)$ par :

$$\pi_{(o,\mathcal{H})}(g)\, f(x) = f(x\bar{g}), \qquad \forall f \in L^2(E), \quad \forall g \in G, \quad \forall x \in E$$

Sa différentielle, encore notée $\pi_{(o,\mathcal{H})}$, associe à tout élément a de $\mathcal{G}$ un champ de vecteurs sur E, défini par :

$$\pi_{(o,\mathcal{H})}(a).f(x) = \frac{d}{dt}\, f(x\,\overline{\exp ta})/_{t=o} \quad , \qquad \forall f \in C_o^\infty(E)$$

Soit $\{a_1,\ldots,a_p\}$ une base de $\mathcal{G}_1$. On montre (cf. Folland [6]) que les champs $X_j = \pi_{(o,\mathcal{H})}(a_j)$ vérifient les hypothèses (1.1) et (2.1.4) et qu'il est équivalent de se donner des champs X_j vérifiant (1.1) et (2.1.4), où de se donner $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ comme dans b).

2.3 <u>Cas où $\dim \mathcal{G} = \dim E$</u>

Dans les paragraphes suivants (§2.3 à 2.6), on suppose que $a_\alpha(x)=a_\alpha \in \mathbb{C}$ (cf.1.2). Dans le cas où $\mathcal{H}$ est réduit à $\{0\}$, le problème de l'hypoellipticité maximale des opérateurs (1.2) est déjà résolu (cf. Rockland [18] pour l'énoncé de la conjecture, Beals [1] pour la démonstration de la condition nécessaire , Helffer [10] et Helffer-Nourrigat [11], [12] pour la condition suffisante). En effet, si l'on identifie alors E et G, les champs X_j sont invariants à gauche, et l'on peut énoncer, en posant :

(2.3.1) $$P_m(X_1,\ldots,X_p) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha X^\alpha$$

le théorème suivant :

<u>Théorème 2.3.1</u> : Si les champs X_j vérifient les hypothèses (1.1) et (2.1.4) et si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ qu'ils engendrent est de la même dimension que l'espace E, alors l'opérateur P est hypoelliptique maximal, si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

(Ro) Pour toute représentation unitaire, irréductible, non triviale du groupe G correspondant à $\mathcal{G}$, l'opérateur $\pi(P_m)$ est injectif dans l'espace $\mathcal{S}_\pi$ des vecteurs C^∞ de la représentation π.

2.4 <u>Un exemple où dim $\mathcal{G}$ est supérieure à dim E</u>

On peut chercher à se ramener au cas précédent par une technique d'addition de variables en plongeant E dans un espace $\tilde{E}$ de même dimension que $\mathcal{G}$. Cette méthode utilisée dans Rotschild-Stein [20], Helffer [9], donne des conditions suffisantes d'hypoellipticité, <u>non nécessaires</u> en général.

Par exemple, soit (δ_t) le groupe de dilatations défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

(2.4.1) $$\delta_t(x_1,x_4) = (tx_1,t^3x_4) \quad \text{pour } (x_1,x_4) \in \mathbb{R}^2$$

Soient X_1 et X_2 les champs de vecteurs :

(2.4.1) $$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad , \quad X_2 = \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_4}$$

qui vérifient les hypothèses ci-dessus.

Soit $\mathcal{G}_4$ l'algèbre de Lie de dimension 4 admettant une base (a_1,a_2,a_3,a_4) telle que :

$$[a_1,a_2] = a_3$$
$$[a_1,a_3] = a_4$$

les autres crochets de deux a_i étant nuls.

Il n'est pas difficile de constater que l'algèbre de Lie engendrée par les champs X_j est isomorphe à $\mathcal{G}_4$. La méthode d'addition de variables revient à remplacer les champs X_j par les champs $\tilde{X}_j$ sur $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad , \quad \tilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4}$$

L'hypoellipticité sur $\mathbb{R}^4$ de l'opérateur $\tilde{P} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \tilde{X}^\alpha$, qui s'étudie au moyen du théorème 2.3.1, implique bien celle de P, mais ne lui est pas équivalente.

En effet, la condition d'hypoellipticité maximale en 0 de P est bien connue (V. V. Grušin [8]) ; il faut et il suffit qu'on ait :

2.4.3 $\begin{cases} \forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash 0 , \quad \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \pi(a)^\alpha \neq 0 \\ \text{en posant } \pi(a_1) = i\xi_1 , \ \pi(a_2) = i\xi_2 , \quad \pi(a_3) = \pi(a_4) = 0 \end{cases}$

2.4.4 $\begin{cases} \forall \xi_4 \in \mathbb{R} \backslash 0 , \quad \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \pi(a)^\alpha \text{ est injectif dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ en posant} \\ \pi(a_1) = \frac{\partial}{\partial t} , \ \pi(a_2) = i \frac{t^2}{2} \xi_4 , \ \pi(a_3) = it\xi_4 , \ \pi(a_4) = i\xi_4 \end{cases}$

Dans les deux cas, les conditions qui apparaissent font intervenir des représentations de $\mathfrak{G}$ obtenues comme différentielles de représentations unitaires irréductibles non triviales de G.

Or la condition (Ro) pour l'opérateur $\tilde{P}$ se traduit par des conditions (contenant 2.4.3 et 2.4.4) qui portent sur toutes les représentations irréductibles de G. La méthode de Kirillov [16] permet de voir, qu'outre les représentations apparaissant dans (2.4.3) et (2.4.4), on a les représentations :

2.4.5 $\quad \pi(a_1) = \partial_t \qquad \pi(a_2) = it\xi_3 \quad (\xi_3 \neq 0)$

2.4.6 $\quad \pi(a_1) = \partial_t \qquad \pi(a_2) = i\xi_2 + i\frac{t^2}{2}\xi_4 \quad (\xi_4 \neq 0, \ \xi_2 \in \mathbb{R})$

Cet exemple suggère que l'hypoellipticité maximale en 0 de P est équivalente à la condition (Ro) portant sur un certain sous-ensemble de $\hat{G}$ (ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G), que nous allons définir au paragraphe suivant .

2.5 Rappel sur les résultats de Kirillov [16] et définition du spectre

Dans le cas général, on sait (Kirillov [16]) qu'on peut, comme dans l'exemple ci-dessus, associer explicitement à tout élément ξ du dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$ une représentation unitaire irréductible π_ξ de G unique (à une équivalence près). On désigne, pour tout h dans $\mathcal{G}$, par (adh) l'application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$:

$$x \to [h,x]$$

et par $(\mathrm{adh})^*$ sa transposée. On dira qu'un point η de $\mathcal{G}^*$ est sur l'orbite de ξ ($\in \mathcal{G}^*$) s'il existe h dans $\mathcal{G}$ tel que :

$$\eta = \exp(\mathrm{adh})^* \xi$$

On notera alors : $\eta \sim \xi$.

Kirillov [16] a montré qu'il existait une bijection entre $\hat{G}$ et l'ensemble des orbites de $\mathcal{G}^*$.

A toute sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, on va associer, grâce à la bijection de Kirillov, un sous-ensemble de $\hat{G}$.

On désigne par Ω le sous-ensemble suivant de $\mathcal{G}^*$:

$$\Omega = \{\xi \in \mathcal{G}^* \; ; \; \exists \eta \quad \text{t.q.} \quad \eta \sim \xi \quad \text{et} \quad \eta/\mathcal{H} = 0\}$$

Soit $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans $\mathcal{G}^*$. Alors $\bar{\Omega}$ est une réunion d'orbites, et la bijection de Kirillov fait correspondre à $\bar{\Omega}$ un sous-ensemble de $\hat{G}$, que nous noterons $sp(\pi_{(o,\mathcal{H})})$ (cf. Dixmier [3]). Revenons à l'exemple du paragraphe 2.4. La sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}_4$ telle que les champs correspondants sur $\mathbb{R}^2$ s'annulent à l'origine, est engendrée par a_2 et a_3. On calcule facilement l'ensemble $\bar{\Omega}$: $\xi_3^2 = \xi_2 \xi_4$ et l'on vérifie que les représentations associées à $\bar{\Omega}$ par la bijection de Kirillov sont exactement celles de (2.4.3) et (2.4.4), c'est-à-dire les seules qui interviennent effectivement dans la condition d'hypoellipticité de V. V. Grušin [8].

2.6 Enoncé des résultats

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.6.1 : Si les champs X_j vérifient (1.1) et (2.1.4), alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L'opérateur P est hypoelliptique en 0

ii) Il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout u dans $C_0^\infty(E)$:

$$\sum_{|\alpha|=m} \|X^{\alpha}u\|^2_{L^2(E)} \leq C\|P_m u\|^2_{L^2(E)}$$

iii) On a, pour toute π dans $Sp(\pi_{(0,\mathcal{K})})$ et pour tout u dans $\mathcal{S}_{\pi}$:

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\pi(X^{\alpha})u\|^2_{H_{\pi}} \leq C\|\pi(P_m)u\|^2_{H_{\pi}}$$

Ces conditions équivalentes impliquent la suivante :

iv) Pour toute représentation π non triviale dans $Sp(\pi_{(0,\mathcal{K})})$, l'opérateur $\pi(P_m)$ est injectif dans $\mathcal{S}_{\pi}$.

Indications sur la démonstration

L'implication i) ⇒ ii) s'obtient en remplaçant dans (1.3) u par $u \circ \delta_t$, et en faisant tendre t vers $+\infty$. L'implication ii) ⇒ i) résulte d'une inégalité de dérivées intermédiaires.
L'équivalence ii) ⇔ iii) est plus délicate, elle utilise les techniques de Kirillov [16] et la proposition 2.1 de [12].
L'implication iii) ⇒ iv) est facile.

Le théorème (2.6.1) donne donc en particulier l'implication i) ⇒ iv) qui est en quelque sorte la généralisation de la conjecture de Rockland [18]. La réciproque iv) ⇒ i) n'est obtenu pour l'instant que dans certains cas particuliers : cas où $\mathcal{K} = 0$, cas de Grušin et cas où r est égal à 2. Quand l'entier r est égal à 2, les techniques de Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [2] permettent dans un grand nombre de cas de construire des paramétrixes, mais elle ne couvrent pas le cas général contrairement au cas où $\mathcal{K}$ est nul (cf. Helffer [10]).

§ 3. LE CAS GENERAL

3.1 Espaces vectoriels munis de dilatations

Nous allons montrer que des champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander (1.1) peuvent être approchés, en tout point x de M, par des champs vérifiant les hypothèses du paragraphe 2. Pour préciser cette notion d'approximation, plaçons-nous dans le cas du paragraphe 2.1 et donnons quelques définitions supplémentaires (cf. Goodman [7], Métivier [17]).

On munit d'abord E d'une "norme homogène"

(3.1.1) $$|u| = [\sum_{j=1}^{r} \|u_j\|^{2/j}]^{1/2}$$

où $u = (u_1,\ldots,u_r)$, $u_j \in E_j$ et où $\| \ \|$ est une norme euclidienne dans E_j.

Si U est un voisinage de 0 dans E et m est dans $\mathbb{Z}$, on définit l'espace $C^\infty_m(U)$ par :

(3.1.2) $$C^\infty_m(U) = \{f \in C^\infty(U),\ |f(u)| = O(|u|^m) \text{ lorsque } u \text{ tend vers zéro}\}$$

On dit qu'un opérateur T de $C^\infty(U)$ dans $C^\infty(U)$ est d'ordre inférieur ou égal à p en 0, si, pour tout m, on a :

(3.1.3) $$T\,C^\infty_m \subset C^\infty_{m-p}(U)$$

Pour tout multi-indice α dans $\mathbb{N}^{\dim E}$, tel que $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ avec α_j dans $\mathbb{N}^{\dim E_j}$, on posera :

(3.1.4) $$[\alpha] = \sum_{j=1} j|\alpha_j|$$

Un opérateur T différentiel défini par :

(3.1.5) $$T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(u)\,\partial_u^\alpha$$

est d'ordre $\leq$ p en 0 si et seulement si, pour tout α, a_α est dans $C^\infty_{[\alpha]-p}(U)$, c'est à dire si l'on a :

(3.1.6) $$\partial_u^\beta a_\alpha(0) = 0$$

pour tous multi-indices α et β tels que $[\beta] < [\alpha] - p$. On peut alors associer à T sa partie homogène de degré p $\hat{T}$ définie par :

(3.1.7) $$\hat{T} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_{[\beta]=[\alpha]-p} (\partial_u^\beta a_\alpha)(0)\,\frac{u^\beta}{\beta!}\,\partial_u^\alpha$$

Enfin, on désignera par Q la dimension homogène de l'espace E

(3.1.8) $$Q = \sum_{j=1}^{r} j \dim E_j$$

3.2 Le théorème d'approximation

Soient $(X_1,\dots,X_p)$ des champs de vecteurs sur une variété M de dimension n, vérifiant la condition de Hörmander. Soit x un point fixé de M. On décompose l'espace $E=\mathbb{R}^n$ en somme directe :

$$(3.2.1) \qquad E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k \qquad \text{où} \quad E_k = \mathbb{R}^{\dim V_k(x)-\dim V_{k-1}(x)}$$

en convenant que $V_o(x) = 0$.

On munit E de la famille de dilations δ_t correspondante, qui dépend de x (de manière discontinue en général).

On démontre le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 [13] : Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un difféomorphisme θ_x d'un voisinage de x dans M sur un voisinage de 0 dans E, tel que :

i) Les champs images $\theta_x^* X_j$ sont d'ordre inférieur ou égal à 1 à l'origine.

ii) Les parties homogènes $\hat{X}_{j,x}$ de degré 1 des champs $\theta_x^* X_j$ vérifient encore la condition de Hörmander.

Dans le cas particulier où les champs X_j sont "libres jusqu'à l'ordre r", c'est-à-dire quand la dimension de M est égale à celle de l'algèbre de Lie nilpotente libre à p générateurs, de rang de nilpotence r, ce théorème a été démontré par Rotschild-Stein [16]. Des démonstrations différentes et plus simples ont été données par Goodmann [7] et Hörmander-Melin [15]. Dans le cas plus général où l'hypothèse (1.7) est vérifiée, le théorème 3.1 est dû à Métivier [17], qui démontre de plus les propriétés suivantes :

Théorème 3.2.2 [17] : Si de plus l'hypothèse (1.7) est vérifiée, on a, outre i) et ii) :

iii) Le difféomorphisme θ_x dépend de manière C^∞ de x

iv) L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_x$ engendrée par les parties homogènes $\hat{X}_{j,x}$ est de la même dimension que M.

3.3 Le théorème d'approximation, énoncé en termes de représentations des groupes

Parmi toutes les algèbres de Lie nilpotentes de rang r, et admettant p générateurs, on sait qu'il en existe une et une seule $\mathfrak{G}_{r,p}$, dont la dimension est maximale. $\mathfrak{G}_{r,p}$ est appelée l'algèbre nilpotente libre à p générateurs, de rang r. Cette algèbre admet une décomposition naturelle de la forme (2.2.1). Soit $(a_1,\dots,a_p)$ un système de générateurs de $\mathcal{G}_{r,p}$ c'est à dire une base de $\mathcal{G}_1$. Il est démontré dans [20] et [7] qu'il existe une application linéaire unique λ de $\mathcal{G}_{r,p}$ dans L(M) (algèbre de Lie des champs de vecteurs réels C^∞ sur M) telle que :

i) $\lambda(a_j) = X_j$

ii) λ est un homomorphisme partiel, au cran r, de $\mathcal{G}_{r,p}$ dans L(M), i.e. $\forall a \in \mathcal{G}_j$, $\forall b \in \mathcal{G}_r$, avec $j+k \leq r$, $\lambda([a,b]) = [\lambda(a),\lambda(b)]$.

En tout point x de M, on définit un sous-espace $\mathcal{K}^k(x)$ de $\mathcal{G}_{r,p}$, pour k inférieur ou égal à r, par :

(3.3.1) $$\mathcal{K}^k(x) = \{a \in \mathcal{G}_k, \lambda(a)/x \in V_{k-1}(x)\} \quad (1 \leq k \leq r)$$

Puis on pose

(3.3.2) $$\mathcal{K}(x) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathcal{K}^k(x)$$

on peut démontrer [13] la proposition suivante :

<u>Proposition 3.3.1</u> : Pour tout x dans M, $\mathcal{K}(x)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}_{r,p}$, dont la dimension est :

$$\dim \mathcal{K}(x) = \dim \mathcal{G} - \dim M$$

Si l'hypothèse (1.7) est vérifiée, $\mathcal{K}(x)$ est un idéal de $\mathcal{G}_{r,p}$ et l'algèbre $\mathcal{G}_x$ est isomorphe au quotient $\mathcal{G}_{r,p}/\mathcal{K}(x)$

On a vu au paragraphe 2.2 qu'on pouvait associer à la sous-algèbre $\mathcal{K}(x)$ de $\mathcal{G}_{r,p}$ une représentation $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}$ de $G_{r,p}$ (= $\exp \mathcal{G}_{r,p}$), tels que les $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}(a_j)$ soient des champs sur $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim \mathcal{G}_{r,p} - \dim\mathcal{K}$) vérifiant (2.1.4). Le théorème (3.2.1) se réunit sous la forme :

<u>Théorème 3.3.2</u> : Sous les hypothèses du théorème (3.2.1), les champs de vecteurs $\overset{*}{\theta}_x X_j - \pi_{(0,\mathcal{K}(x))}(a_j)$ sont d'ordre ≤ 0 en 0. Autrement dit la partie homogène $\hat{X}_{j,x}$ coïncide avec $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}(a_j)$ $(j = 1,\dots,p)$.

3.4 Applications : condition nécessaire d'hypoellipticité maximale

On associe, en tout point x de M, à l'opérateur P défini en (1.2), un élément $\mathcal{P}_x$ de l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{r,p})$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{r,p}$, en posant :

$$\mathcal{P}_x = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, a^\alpha \tag{3.4.1}$$

Pour toute représentation π de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{r,p}$, on a :

$$\pi(\mathcal{P}_x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \pi(a)^\alpha \tag{3.4.2}$$

On déduit du théorème (3.3.2), le théorème suivant [13] :

Théorème 3.4.1 : Si l'opérateur P défini en (1.2) est hypoelliptique maximal en un point x de M, alors l'opérateur $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}(\mathcal{P}_x)$ est hypoelliptique maximal en 0 dans $E = \mathbb{R}^n$.

Combinant les théorèmes (2.6.1) et (3.4.1), on obtient :

Théorème 3.4.2 : Si l'opérateur P défini en (1.2) est hypoelliptique maximal en un point x de M, alors, pour toute représentation π non triviale dans le spectre de la représentation $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}$, l'opérateur $\pi(\mathcal{P}_x)$ est injectif dans l'espace $\mathcal{S}_\pi$ des vecteurs C^∞ de la représentation π.

§ 4. CAS DE L'HYPOTHESE 1.7. RESULTATS DE L. P. ROTSCHILD [19]

Si l'hypothèse (1.7) est vérifiée, $\mathcal{K}(x)$ étant un idéal de $\mathcal{G}_{r,p}$, le spectre de la représentation $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}$ s'identifie à l'ensemble des représentations unitaires irréductibles du groupe quotient G_x d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_x$. L'opérateur $\pi_{(0,\mathcal{K}(x))}(\mathcal{P}_x)$ s'identifie à un opérateur invariant à gauche sur le groupe G_x. On va récapituler dans ce cas les résultats obtenus.

4.1 Enoncé des résultats

Théorème 4.1.1 [13] et [19] : Si l'hypothèse (1.7) est vérifiée, les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

i) P est hypoelliptique maximal au point x_o de M.

ii) $\hat{P}_{x_o}$ est hypoelliptique maximal en 0 dans $\mathcal{G}_{x_o}$ (où $\hat{P}_x$ est défini par

$\widehat{\theta_x^* P})$.

iii) Pour toute représentation π unitaire, irréductible, non triviale du groupe G_{x_o}, $\pi(\widehat{P_{x_o}})$ est injectif dans l'espace $\mathcal{S}_\pi$ des vecteurs C^∞ de de la représentation π.

i) ⇒ ii) ⇔ iii) résulte des résultats des paragraphes précédents.
L. P. Rotschild [19] a démontré l'implication ii) ⇒ i). Plus précisément elle démontre le théorème suivant :

<u>Théorème 4.1.2</u> [19] : Sous les hypothèses précédentes, si $\widehat{P_{x_o}}$ est hypoelliptique, il existe une fonction $\varphi \in C_o^\infty(M)$ égale à 1 sur un voisinage de x_o, et des opérateurs K et S de $L^2_{loc}(M)$ dans $\mathcal{D}'(M)$ tels que

i) L'opérateur S est continu de $H^\alpha_{loc}(M)$ dans $C^\infty(M)$ pour tout α dans $\mathbb{R}$

ii) L'opérateur K est continu de $H^\alpha_{loc}(M)$ dans $H^{\alpha+m/r}_{loc}(M)$ pour tout α dans $\mathbb{R}$.

iii) $KP = \varphi I + S$.

<u>Remarque 4.1.3</u> : Dans [19] et [20], on montre aussi des propriétés de continuité pour les opérateurs K et S dans des espaces de Sobolev définis à partir de L^p et dans des espaces de fonctions lipschitziennes.

4.2 <u>Construction du noyau</u>

Les principales étapes de la construction de l'opérateur K sont les suivantes. Tout d'abord on se ramène, par une technique d'addition de variables (cf. §6.3 de [11] et [13]), au cas où l'ordre m de P est strictement inférieur à la dimension homogène Q de $\mathfrak{G}_{x_o}$ et où $\widehat{P_{x_o}}$ est autoadjoint. On utilise alors le résultat de Folland [4] :

<u>Proposition 4.2.1</u> [4] : Soit D un opérateur différentiel invariant à gauche, homogène de degré m sur un groupe nilpotent, connexe, simplement connexe, gradué G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, hypoelliptique, autoadjoint, tel que : m est inférieur strictement à la dimension homogène Q de $\mathfrak{G}$. Alors il existe une distribution k homogène de degré $-Q+m$, C^∞ sur $\mathfrak{G}\setminus\{0\}$, unique, telle que :
Pour tout f dans $C_o^\infty(\mathfrak{G})$,

$$f = Df * k = f * Dk$$

(on a identifié $\mathcal{G}$ et G).

On applique cette proposition avec $D = \widehat{P}_{x_0}$. Une des propositions clef de la démonstration de L. P. Rotschild est alors la suivante :

<u>Proposition 4.2.2</u> [19] : Sous les hypothèses du théorème (4.1.2), il existe un voisinage U de x_o dans M, tel que $\widehat{P}_x$ soit hypoelliptique pour tout x dans U. Soit k_x dans $C^\infty(\mathcal{G}_x \backslash \{0\})$ la solution fondamentale homogène unique de $\widehat{P}_x$ $(x \in U)$. Alors l'application :

(4.2.1) $$(x,u) \rightarrow k_x(u)$$

est C^∞ sur $M \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (en identifiant $\mathcal{G}_x$ et $\mathbb{R}^n$).

La difficulté de cette proposition vient du fait que les $\mathcal{G}_x$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels munis d'une dilation, mais non en tant qu'algèbres de Lie. Dans le cas où ils sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie, les résultats de Rotschild-Stein [20] suffiraient pour démontrer le théorème 4.1.2. La technique de démonstration utilise les techniques de Rotschild-Tartakoff [21] et la proposition suivante :

<u>Proposition 4.2.3</u> [19] : Soit G un groupe nilpotent muni d'une dilatation et L un opérateur différentiel invariant à gauche sur G homogène de degré m. Si :

$$\varphi \in C^o(G) \quad , \quad L\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \in C^{m+1}(G)$$

Alors P est hypoelliptique sur G.

Cette proposition est un raffinement du résultat de R. Beals [1], et utilise les techniques utilisées dans le paragraphe 4 de [20].

On définit ensuite un noyau $K_1(x,y)$ C^∞ sur $U \times U - \Delta$ (où Δ est la diagonale de $U \times U$). On choisit φ_1 et φ_2 dans $C_o^\infty(U)$ telles que : $\varphi_2 = 1$ sur le support de φ_1, et l'on pose :

(4.2.2) $$K_1(x,y) = \varphi_1(x)\, k_y(\theta_y(x))\, \varphi_2(y)$$

La démonstration suit alors les lignes de Folland-Stein [5] et Rotschild-Stein [20].

REFERENCES

[1] R. Beals : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n° 19.

[2] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, Astérisque 34-35, p.93-121.

[3] J. Dixmier : Les C*-algèbres et leurs représentations, Paris, Gauthier-Villars.

[4] G. B. Folland : Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, Arkiv F. Mat., 13 (1975) p.161-207.

[5] G. B. Folland et E. M. Stein : Parametrices and estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex on strongly pseudo-convex boundaries, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), p.253-258.

[6] G. B. Folland : On the Rotschild-Stein lifting theorem, Comm. in P.D.E. 2 (2) (1977) p.165-191.

[7] R. W. Goodman : Nilpotent Lie groups. Lecture Notes in Mathematics n°562.

[8] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators. Math. Sbornik 83 (125) (1970) n° 3 ou Math. USSR Sbornik 12 n°3 (1970) p.458-475.

[9] B. Helffer : Addition de variables et applications à la régularité. Annales de l'Institut Fourier.

[10] B. Helffer : Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur les groupes nilpotents. (A paraître au cours du C.I.M.E. 1977)

[11] B. Helffer, J. Nourrigat : Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotentce 3. Comm. in P.D.E., 3 (8), p.643-743 (1978).

[12] B. Helffer, J. Nourrigat : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent gradué. A paraître.

[13] B. Helffer, J. Nourrigat : Approximation d'un système de champs de vecteurs et applications à l'hypoellipticité . A paraître.

[14] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations Acta Math. 119 (1967) p.147-171.

[15] L. Hörmander, A. Melin : Free systems of vector fields, Ark. f. Mat. vol. 16 n° 1, May (1978).

[16] A. A. Kirillov : Unitary representations of nilpotent Lie groups Russian Math. Survey 17 (1962).

[17] G. Métivier : Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques. Comm. in P.D.E. 1 (1976) p.467-519.

[18] C. Rockland : Hypoellipticity on the Heisenberg group. Representation theoretic criteria. Trans. of the A.M.S. 240 (Juin 1978) p.1-53.

[19] L. P. Rotschild : A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. Preprint.

[20] L. P. Rotschild et E. M. Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math., 137 (1976), p.247-320.

[21] L. P. Rotschild et D. Tartakoff : Parametrices with C^∞ error for $\square_b$ and operators of Hörmander type. Proc. of "Partial differential equations and differential geometry", Park City, Utah, 1977 (à paraître).

[22] F. Trèves : An invariant criterion of hypoellipticity (Amer. J. Math., vol. 83, 1961, p.645-668).

[23] A. et J. Unterberger : Hölder estimates and hypoellipticity. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26 (1976) n° 2, p.35-54.