Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

S. ALINHAC
M. S. BAOUENDI

Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 22, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 8 - 1 9 7 9

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS NULLES ET SINGULIERES POUR DES OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

par S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI

Exposé n° XXII

22 Mai 1979

Nous donnons dans cet exposé deux types de résultats dont les démonstrations détaillées paraîtront ultérieurement .

Dans la suite $P(x,D)$ désignera un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞ définis dans Ω, voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Son symbole principal est noté $p(x,\zeta)$.

Le premier résultat est une généralisation au cas où les coefficients sont C^∞ (au lieu d'être analytiques) des théorèmes 2 et 2' de [1]. Soient M une variété et S une hypersurface, toutes les deux C^∞, satisfaisant

$$0 \in M \subset S \subset \Omega \, .$$

On pose :

$$\Sigma = N^*(S)|_M \qquad A = \operatorname{Re} p \qquad B = \operatorname{Im} p \, ;$$

H_A désignera le champ hamiltonien de A.

<u>Théorème 1</u> : On suppose :

i) Pour tout $\gamma \in \Sigma$, la projection de $H_A(\gamma)$ n'est pas tangente à M ,

ii) Il existe un entier impair $k \geq 1$ satisfaisant

$$A|_\Sigma = H_A^j B|_\Sigma = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j < k \quad \text{et} \quad H_A^k B|_\Sigma \neq 0 \, ,$$

iii) Pour tout $\gamma \in \Sigma$ et tout j, $0 \leq j < \frac{k-1}{2}$, $H_{H_A^j B}(\gamma)$ est engendré par $H_A(\gamma)$ et l'espace tangent de Σ au point γ.

Alors il existe $U \subset \Omega$, voisinage ouvert de 0, et deux fonctions a et u C^∞ dans U, plates sur $U \cap M$, $u \not\equiv 0$ dans $U \setminus M$, telles que

$$Pu + au = 0 \quad \text{dans} \quad U \, .$$

<u>Théorème 1'</u> : Sous les hypothèses du théorème 1, pour tout entier $\ell \geq m$ il existe $U \subset \Omega$, voisinage ouvert de 0, $u \in C^\ell(U)$, (u n'étant $C^{\ell+1}$ au voisinage d'aucun point de $U \cap M$), $a \in C^\infty(U)$ tels que

$$au \in C^\infty(U) \text{ et } Pu + au = 0 \quad \text{dans } U.$$

Remarque 1 : Notons que si les coefficients de P et les variétés M et S sont analytiques il est démontré dans [1] que l'on peut prendre $a \equiv 0$ dans les conclusions des théorèmes 1 et 1'. En général, il n'en est pas ainsi dans le cas des coefficients C^{∞} comme le montre l'exemple suivant. Soit L l'opérateur de Hans Lewy dans $\mathbb{R}^3$

$$L = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + ix_2)D_3$$

Il est bien connu (voir Hörmander [3]) qu'il existe une fonction $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ telle que la seule solution C^1 de

$$Pu = Lu + fu = 0$$

est la solution triviale. Pour cet opérateur P les hypothèses des théorèmes 1 et 1' sont satisfaites avec M réduit par exemple à l'origine. On ne peut donc prendre $a \equiv 0$ dans les conclusions de ces théorèmes. Des exemples similaires peuvent être obtenus à partir des opérateurs du premier ordre dont les seules solutions sont les constantes, donnés par Nirenberg [5].

Nous passons maintenant au deuxième type de résultat de nature différente des théorèmes 1 et 1'.

Théorème 2 : On suppose :

i) Il existe $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$, réelle satisfaisant

$$p(x,\nabla\varphi) = 0 \text{ et } X = p'_{\xi}(x,\nabla\varphi)\cdot\partial_x \not\equiv 0 \quad ,$$

ii) Il existe $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$, réelle $\psi(0) = 0$ $\nabla\psi \neq 0$, et des constantes $C > 0$, $\alpha \in [0,\infty[$ telles que pour tout $x \in \Omega$

$$|p(x,\nabla\psi(x))| \geq C|\psi(x)|^{\alpha},$$

iii) $X\psi = 0$ dans Ω.

Alors il existe $U \subset \Omega$, voisinage de 0, et deux fonctions a et u C^{∞} dans U avec $\operatorname{supp} u = U \cap \{\psi \geq 0\}$, $\operatorname{supp} a \subset U \cap \{\psi \geq 0\}$, et telles que :

$$Pu + au = 0 \text{ dans } U .$$

<u>Exemple</u> : Soit P l'opérateur des ondes dans $\mathbb{R}^3$

$$P = D^2_{X_3} - D^2_{X_1} - D^2_{X_2} .$$

Il est immédiat de vérifier que le théorème 2 s'applique en prenant

$$\varphi = X_3 + X_1 \text{ (donc } X = 2(\partial_{X_3} - \partial_{X_1})) \text{ et } \psi = X_2 .$$

<u>Idée de la démonstration des Théorèmes 1 et 1'</u>

Après un changement convenable de coordonnées on peut supposer que les variables de $\mathbb{R}^n$ sont $(x,t,y) = (x_1,\dots,x_r,t,y_1,\dots,y_\ell)$ avec $r+1+\ell = n$, $r \geq 1$. Dans ces coordonnées S est définie par $x_1 = 0$ et M par $x = 0$ et $t = 0$. Σ est alors donnée par

$$x = 0,\ t = 0,\ \eta = 0,\ \xi' = (\xi_2,\dots,\xi_r) = 0\ ,\ \tau = 0.$$

Grâce à i) on peut supposer que l'on a

$$\partial_\tau p|_\Sigma \neq 0.$$

Le point essentiel de la démonstration est la construction d'une fonction C^∞ Φ "presque caractéristique" pour P, c'est-à-dire vérifiant :

$$p(x,t,y,\nabla\Phi) = O(t^N) \text{ pour tout } N > 0.$$

et satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(1) $$M = \{\Phi = 0\}$$

(2) $$\Re e\,\Phi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\Phi \geq K(|x|^2 + t^{k+1}) \quad (K > 0) .$$

L'invariance des propriétés i) ii) et iii) par multiplication par un symbole non nul est cruciale ici, elle est démontrée dans [1] même dans le cas des coefficients C^∞.

On construit u par un développement asymptotique de la forme

$$u(x,t,y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} E_j(\Phi(x,t,y))u_j(x,t,y)$$

avec $\frac{d}{dz} E_j(z) = E_{j-1}(z)$ et , dans le cas du théorème 1 ,

$$E_o(z) = e^{-\frac{1}{z^{1/5}}} .$$

(Notons que (2) implique que $E_o(\Phi)$ est C^∞ et est plate sur M). Dans le cas du théorème 1' on prend $E_o(z) = z^{\ell+1/2}$. Les u_j sont déterminées par les équations de transport habituelles.

Le reste de la démonstration se fait alors sans grande difficulté.

Idée de la démonstration du théorème 2

Après un changement convenable de coordonnées, on peut supposer que les variables de $\mathbb{R}^n$ sont

$$(t,y) = (t,y_1,\dots,y_{n-1})$$

et que l'on a

$$\psi(t,y) = t \quad \text{et} \quad X = \frac{\partial}{\partial y_1} .$$

P s'écrit alors

$$P(t,y,D_t,D_y) = q(t,y)D_t^m + \sum_{\substack{|\gamma|+j\le m \\ 0\le j<m}} q_{\gamma,j}(t,y)D_y^\gamma D_t^j .$$

La condition ii) implique que l'on a

$$|q(t,y)| \ge C|t|^\alpha .$$

Alors que la fonction phase Φ a joué le rôle crucial dans la démonstration du théorème 1, ici la fonction phase réelle φ ne servira qu'à réduire P à son équation de transport. Une construction plus minutieuse à la Cohen [2] (voir Hörmander [3], [4]) est alors utilisée pour obtenir les fonctions a et u.

On cherche d'abord une solution approchée de $Pf = 0$ par la méthode de l'optique géométrique sous la forme

$$f \sim e^{i\tau\varphi}(b_0 + \frac{b_1}{\tau} + \frac{b_2}{\tau^2} + \ldots\ldots) ,$$

les b_j étant données par les équations de transport habituelles. En fait on prend b_0 dépendant du grand paramètre τ comme suit :
On pose $\tau = \delta^{-2\rho}$ (δ petit et $\rho > 0$ fixé) et on prend $b_0(t,y,\delta) = c_0(t,y)e^{\Phi(t,\delta)}$ avec $c_0(0,0) \neq 0$ et

$$\Phi(t,\delta) = -\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^4}\theta(\frac{t-\delta}{\delta^2})(t-\delta)$$

où $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\theta(s) = 1$ pour $s \geq \frac{1}{8}$ et $\theta(s) = -\frac{1}{2}$ pour $s \leq -\frac{1}{8}$.

On pose aussi

$$b_j = c_j e^{\Phi}\tau^{j/2} .$$

Il est alors assez facile de construire une fonction $c(t,y,\delta)$ ayant le développement asymptotique

$$c \sim \frac{1}{c_0} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta^{j\rho} \quad \text{quand } \delta \to 0 .$$

(En fait c est C^∞ des variables t,y,δ et de $\frac{t-\delta}{\delta^2}$). En posant

$$v(t,y,\delta) = e^{i\delta^{-2\rho}\varphi(t,y)}e^{\Phi(t,\delta)}c_0(t,y)(1+c(t,y,\delta)) ,$$

on obtient finalement :

$$(3) \qquad Pv = rv$$

où r est C^∞ de (t,y,δ), plate en $\delta = 0$.

Maintenant la construction de u se fait grosso modo comme suit. S'inspirant de [2] la première idée et de poser

$$v_k(t,y) = v(t,y,\frac{1}{k}) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{k+1} < t < \frac{1}{k-1} ,$$

(en fait on ramène v_k d'une manière C^∞ à être nulle au voisinage des points $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k-1}$) et de prendre

$$u = \sum_{k=k_o}^{\infty} v_k .$$

Là où $|v_k| = |v_{k+1}|$ ou bien $|v_k| = |v_{k-1}|$, u est susceptible de s'annuler il faudrait alors s'assurer que Pu soit suffisamment nulle en ces points pour que l'on ait $\frac{Pu}{u}$ de classe C^∞. Ceci nous oblige à modifier un peu la fonction v satisfaisant (3), ce qui se fait à l'aide du théorème de prolongement de Whitney appliqué dans $\mathbb{R}^{n+1}$ aux surfaces $\delta = 0$, ainsi qu'à celles définies par

$$|v(t,y,\delta)| = |v(t,y, \frac{\delta}{\delta+1})|$$

$$|v(t,y,\delta)| = |v(t,y, \frac{\delta}{1-\delta})| .$$

La démonstration du théorème se termine en vérifiant que la fonction $a = \frac{Pu}{u}$ vérifie bien les propriétés annoncées !

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, F. Treves and E. C. Zachmanoglou : Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients. A paraître. Duke Journal (1979).

[2] P. Cohen : The non-uniqueness of the Cauchy problem O. N. R. Techn. Report 93, Stanford (1960).

[3] L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer Verlag (1963).

[4] L. Hörmander : Non-uniqueness for the Cauchy problem. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag n° 459, Fourier integral operators and PDE's (1975) p.36-72.

[5] L. Nirenberg : Lectures on linear partial differential equations. C. B. M. S. Amer. Math. Soc. n° 17 (1970).