Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Wagschal

Le problème de Goursat non-linéaire

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

LE PROBLEME DE GOURSAT NON-LINEAIRE

par C. WAGSCHAL

Exposé n° XVII

20 Mars 1979

On se propose d'étudier le problème de Goursat non-linéaire dans l'espace des fonctions holomorphes, puis dans les espaces de Gevrey.

Le problème de Goursat a été l'objet de nombreuses études ; signalons en particulier les travaux de Lednev [5], Gårding [2], Friedmann [1] et Persson [9]. Nous allons donner de nouvelles démonstrations d'une part du théorème de Lednev, d'autre part d'un théorème d'existence et d'unicité dans les espaces de Gevrey. On trouvera dans [13] d'autres applications de la méthode proposée. Tous ces théorèmes peuvent se déduire du théorème du point fixe dans des algèbres de Banach, algèbres qui sont définies par l'intermédiaire, soit du formalisme des fonctions majorantes de Cauchy dans le cas holomorphe, soit d'un formalisme de séries formelles dans le cas Gevrey.

§ 1. LE THEOREME DE LEDNEV

On considère au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ le problème de Goursat non-linéaire

$$(1.1)\qquad \begin{cases} D^{\alpha}u(x) = f(x, D^{B}u(x)), \\ u = O(x^{\alpha}), \end{cases}$$

où $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, B désigne une partie finie de

$$\{\beta \in \mathbb{Z}^n \,;\, |\beta| \leq |\alpha| \text{ et } \beta \neq \alpha\},$$

où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $|\beta| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$;

$$D^B u = (D^{\beta}u)_{\beta\in B} ,$$

où $D_j^{-1}u$ désigne la primitive de u par rapport à x^j qui s'annule avec x^j; la fonction f est une fonction de $x \in \mathbb{C}^n$ et de $n' = \mathrm{Card}\, B$ variables complexes $y = (y_{\beta})_{\beta\in B}$ qu'on suppose holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+n'}$.

On pose

$$A_\beta = D_{y_\beta} f(0,0), \quad \beta \in B,$$

et, pour tout $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on définit la fonction spectrale de Lednev

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| = |\alpha|}} |A_\beta| \, \xi^{\beta-\alpha}$$

On a alors le théorème suivant dû à Lednev.

<u>Théorème 1.1</u> : S'il existe $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\rho(\xi) < 1$, le problème de Goursat (1.1) admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Pour prouver ce théorème, on peut supposer $\alpha = 0$ (prendre $D^\alpha u$ comme nouvelle inconnue), puis $f(0,0) = 0$ (prendre $u - f(0,0)$ comme nouvelle inconnue). Il s'agit donc d'étudier le problème

$$u(x) = f(x, D^B u(x))$$

où $B \subset \{\beta \in \mathbb{Z}^n \; ; \; |\beta| \leq 0 \text{ et } \beta \neq 0\}$, $f(0,0) = 0$ sous la condition

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| = 0}} |A_\beta| \xi^\beta < 1.$$

A cet effet, nous allons montrer que l'application

$$T : u \in \mathbb{C}\{x\} \to f(x, D^B u(x)) \in \mathbb{C}\{x\}$$

est une contraction stricte dans une boule fermée d'une algèbre de Banach, qui sera définie à l'aide de la notion de fonction majorante.

§ 2. <u>FONCTIONS MAJORANTES</u>

Si $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha x^\alpha$, $\phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \phi_\alpha x^\alpha$ sont deux séries formelles avec $u_\alpha \in \mathbb{C}$, $\phi_\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $u \ll \phi$ la relation $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n)\,(|u_\alpha| \leq \phi_\alpha)$.

Si ϕ est une série convergente, on note [10] B_ϕ l'espace de Banach

$$B_\phi = \{u \in \mathbb{C}\{x\}; (\exists C \geq 0)(u << C\phi)\}$$

pour la norme

$$\|u\|_\phi = \mathrm{Min}\,\{C \geq 0;\ u << C\,\phi\}.$$

Selon une idée dûe à Gevrey [3], reprise par Lax[4] sous une forme simplifiée, considérons la série convergente

$$\theta(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2} \quad ;$$

d'après Lax [4], il existe une constante $K > 0$ telle que

(2.1) $$\theta^2(t) << K\theta(t)\ .$$

Etant donné un paramètre $R > 0$, posons alors

(2.2) $$\varphi_R(t) = K^{-1}\theta(\tfrac{t}{R})\ ;$$

on a donc

(2.3) $$\varphi_R^2(t) << \varphi_R(t)\ .$$

Nous noterons alors $B_r(\xi)$ <u>l'algèbre</u> (d'après (2.3)) <u>de Banach associée à la fonction majorante</u> $\varphi_R(\xi.x)$.

Le fait de travailler dans une algèbre permet de majorer très simplement une fonction composée.

<u>Proposition 2.1</u> : Soient $u \in B_R(\xi)$ et $R' > \|u\|$, alors $\frac{R'}{R'-u}$ appartient à $B_R(\xi)$ et

$$\frac{R'}{R'-u} << (K + \frac{\|u\|}{R'-\|u\|})\ \varphi_R(\xi.x).$$

<u>Preuve</u> : On a $|u(0)| \leq \|u\|\varphi_R(0) < R'$ car $\varphi_R(0) \leq 1$ vu que $\varphi_R^2 << \varphi_R$. Ceci prouve que $\frac{R'}{R'-u}$ est définie et holomorphe au voisinage de l'origine et que

$$\frac{R'}{R'-u} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{u^n}{R'^n} << 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u\|^n}{R'^n} \varphi_R(\xi . x) ,$$

d'après (2.3), et on remarque que $1 = K\varphi_R(0) << K\varphi_R(\xi . x)$. CQFD.

Proposition 2.2 : Pour tout $\eta > 1$, il existe $c = c(\eta) > 0$ tel que

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} << c \varphi_R(t) .$$

Il en résulte ceci : si u est holomorphe et bornée dans le polydisque $\Delta = \{x \in \mathbb{C}^n ; \xi_j |x^j| < \eta R\}$, on a, d'après les inégalités de Cauchy,

$$u << M \frac{\eta R}{\eta R - \xi . x} << c M \varphi_R(\xi . x) ,$$

où $M = \sup_\Delta |u|$. Lorsque $u(0) = 0$, ceci prouve que $u << \varepsilon(R)\varphi_R(\xi . x)$, où $\lim_{R \to 0} \varepsilon(R) = 0$.

Proposition 2.3 : Il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} , D^{-k}\varphi_R(t) << cR^k \varphi_R(t) .$$

Corollaire 2.4 : Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $|\alpha| \leq 0$, l'application $D^\alpha : B_R(\xi) \to B_R(\xi)$ est linéaire, continue de norme $\leq c \xi^\alpha R^{-|\alpha|}$.

§ 3. PREUVE DU THEOREME 1.1

Le théorème 1.1 résulte de la

Proposition 3.1 : Il existe $R > 0$, $a > 0$ tel que $T : u \to f(x, D^B u)$ soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0,a) \subset B_R(\xi)$.

Preuve (sommaire) : On peut écrire

$$(3.1) \quad \begin{cases} f(x,y) = f(x,0) + \sum_{\beta \in B} A_\beta y_\beta + \sum_{\beta \in B} F_\beta(x,y) y_\beta \\ f(x,y) - f(x,z) = \sum_{\beta \in B} A_\beta (y_\beta - z_\beta) + \sum_{\beta \in B} G_\beta(x,y,z)(y_\beta - z_\beta) \end{cases}$$

où les fonctions F_β et G_β sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+2n'}$ et

$$f(0,0) = F_\beta(0,0) = G_\beta(0,0,0) = 0.$$

En utilisant la proposition 2.2 et la remarque qui la suit, on a donc

$$(3.2) \qquad \begin{cases} f(x,0) \ll \varepsilon(R)\varphi_R(\xi.x), \\ F_\beta(x,y) \ll \varepsilon(R,R')\varphi_R(\xi.x) \prod\limits_{\gamma\in B} \dfrac{R'}{R'-y_\gamma}, \\ G_\beta(x,y,z) \ll \varepsilon(R,R')\varphi_R(\xi.x) \prod\limits_{\gamma\in B} \dfrac{R'}{R'-y_\gamma} \dfrac{R'}{R'-z_\gamma}, \end{cases}$$

où les fonctions $\varepsilon(R)$, $\varepsilon(R,R')$ tendent vers 0 avec (R,R').

Considérons alors un élément $u \in B'(0;a)$; vu la proposition 2.3, on a

$$y_\beta = D^\beta u \ll a\,\xi^\beta D^{|\beta|}\varphi_R(\xi.x) \ll \begin{cases} a\xi^\beta \varphi_R(\xi.x), & \text{si } |\beta| = 0, \\ a\,\varepsilon(R)\varphi_R(\xi.x), & \text{si } |\beta| < 0, \end{cases}$$

où $\varepsilon(R)$ tend vers 0 avec R. Vu la proposition 2.1, sous des conditions de la forme

$$(3.3) \qquad a \le cR' \quad \text{et} \quad a\,\varepsilon(R) \le R',$$

on a

$$\frac{R'}{R'-y_\beta} \ll c\,\varphi_R(\xi.x) \quad , \; y_\beta = D^\beta u \quad (\beta \in B).$$

Vu (3.1) et (3.2), on en déduit que

$$v = Tu \ll [\varepsilon(R) + a(\rho(\xi) + \varepsilon(R,R'))]\varphi_R(\xi.x).$$

Considérons alors un nombre ρ tel que $\rho(\xi) < \rho < 1$. Pour que $T(B'(0,a)) \subset B'(0;a)$, il suffit donc que

$$(3.4) \qquad \rho(\xi) + \varepsilon(R,R') \le \rho,$$

$$(3.5) \qquad a \le cR',$$

(3.6) $$a\varepsilon(R) \leq R' \text{ et } \varepsilon(R) \leq a(1-\rho).$$

Si $u, u' \in B'(0;a)$, un calcul analogue montre que

$$Tu - Tu' \ll \|u-u'\|(\rho(\xi) + \varepsilon(R,R'))\varphi_R(\xi.x).$$

<u>En résumé</u>, la proposition est démontrée si on peut satisfaire à (3.4)-(3.6). On choisit d'abord R' tel que (3.4) soit vérifié pour tout R suffisamment petit ; on choisit ensuite a conformément à (3.5), puis R suffisamment petit pour satisfaire à (3.4) et (3.6). <u>C.Q.F.D</u>

§ 4. <u>PROBLEME DE GOURSAT DANS LES ESPACES DE GEVREY</u>

Rappelons d'abord la définition des espaces de Gevrey utilisés. Etant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et $d \geq 1$, on note $G^{\alpha,d}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^p$, $\gamma \leq \alpha$ et tout $\delta \in \mathbb{N}^q$, des dérivées partielles continues $D^\gamma_x D^\delta_y u : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^p,\ \gamma \leq \alpha \text{ et } \forall \delta \in \mathbb{N}^q,\ \sup_\Omega |D^\gamma_x D^\delta_y u| \leq c^{|\delta|+1}|\delta|!^d .$$

De telles fonctions sont donc de classe de Gevrey d en y.

On considère alors le problème de Goursat non-linéaire

(4.1) $$\begin{cases} D^\alpha_x u(x,y) = f(x,y,D^B u(x,y)), \\ u = O(x^\alpha), \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$, B est une partie finie de

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q ; |\gamma| + d|\delta| \leq |\alpha| \text{ et } \gamma < \alpha\},$$

$$D^B u = (D^\gamma_x D^\delta_y u)_{(\gamma,\delta)\in B} ;$$

la fonction f est une fonction de $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$ et de $r = \operatorname{Card} B$ variables réelles $z = (z_\sigma)_{\sigma \in B}$ qu'on suppose <u>de classe $G^{0,d}$ au voisinage de l'origine de</u> $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$; f est donc continue en x et de classe de Gevrey d en (y,z).

On a alors le :

Théorème 4.1 : Le problème de Goursat (4.1) admet une unique solution de classe $G^{\alpha,d}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Remarque 4.1 : Lorsque $d=1$, c'est à dire dans le cas analytique, on peut donner un théorème plus précis que le théorème 4.1 et qui nécessite une condition spectrale. On considère le problème

$$\begin{cases} D_x^\alpha D_y^\beta u(x,y) = f(x,y,D^B u(x,y)) , \\ u = O(x^\alpha y^\beta), \end{cases}$$

où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q$,

$$B \subset \{(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}^q \,;\, |\gamma| + |\delta| \leq |\alpha| + |\beta|, (\gamma,\delta) \neq (\alpha,\beta) \text{ et } \gamma \leq \alpha\};$$

alors le théorème d'existence et d'unicité vaut s'il existe $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ tel que

$$\rho(\zeta) = \sum_{\substack{|\delta|=|\beta| \\ (\alpha,\delta)\in B}} |A_{\alpha,\delta}| \, \zeta^{\delta-\beta} < 1 ,$$

où $A_\sigma = D_{z_\sigma} f(0,0,0)$, $\sigma \in B$.

Pour la démonstration détaillée de ces théorèmes, on pourra se reporter à [13] ; dans cet exposé, nous allons simplement indiquer le formalisme permettant de démontrer le théorème 4.1.

§ 5. SERIES FORMELLES GEVREY

Etant donné un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}_x^p$ et un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}_y^q$, on note $\mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U}\times\Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \mathcal{U}\times\Omega \to \mathbb{R}$ admettant, pour tout $\delta \in \mathbb{N}^q$, des dérivées partielles continues $D_y^\delta u : \mathcal{U}\times\Omega \to \mathbb{R}$. On notera

$$t = |x| := (|x^1|, \dots, |x^p|)$$

et $|\mathcal{U}|$ l'image de $\mathcal{U}$ par l'application $x \to |x|$. On considère alors une série formelle en y dépendant continûment de t

$$\phi \equiv \phi(t,y) = \sum_{\delta \in \mathbb{N}^q} \phi_\delta(t) \frac{y^\delta}{\delta!}$$

où les fonctions $\phi_\delta : |\mathcal{U}| \to \mathbb{R}_+$ sont continues.

Si $u \in \mathcal{C}^{o,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$, on notera $u << c\phi$ $(c \geq 0)$ la relation

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \quad \sup_\Omega |D_y^\delta u(x,y)| \leq c\,\phi_\delta(t) ;$$

on considère alors le sous-espace

$$\mathcal{C}_\phi^{o,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega) = \{u \in \mathcal{C}^{o,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega) ; (\exists c \geq 0)(u << c\,\phi)\}$$

qui est <u>un espace de Banach</u> lorsqu'on le munit de la norme

$$\|u\| \equiv \|u\|_\phi = \mathrm{Min}\{c \geq 0 ; u << c\phi\} .$$

Le formalisme précédent est bien adapté pour majorer les opérateurs de dérivation. Les opérateurs de primitive par rapport aux variables x^j seront bien définis si $\mathcal{U}$ vérifie la condition

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{U}, \text{ pour tout } \lambda \in [0,1]^p.$$

On a alors la propriété évidente

$$\left\{\begin{array}{l} \text{soit } u \in \mathcal{C}_\phi^{o,\infty}, \text{ pour tout } (\gamma,\delta) \in (-\mathbb{N})^p \times \mathbb{N}^q, \text{ on a} \\ \qquad D_x^\gamma D_y^\delta u << \|u\| D_t^\gamma D_y^\delta \phi(t,y). \end{array}\right.$$

Le formalisme adopté permet de majorer très simplement une fonction composée. Par exemple, si v est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $v(z) << \psi(z)$ où ψ est une série formelle, si $u(x,y) << \phi(t,y)$ et si la fonction composée $v \circ u$ est bien définie, on a

$$v \circ u << \psi\,[\phi(t,y)], \text{ où } [\phi(t,y)] = \phi(t,y) - \phi(t,0).$$

Pour démontrer le théorème 4.1, on utilise la série formelle

$$\phi_R^d(t,y) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!}\, k!^{d-1} D^k \varphi_R(\xi.t)$$

qui dépend des paramètres $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p$, $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$, $R > 0$ et $d \geq 1$; cette série formelle est bien définie lorsque

$$t \in |\mathcal{U}_R| \quad \text{où } \mathcal{U}_R = \{x \in \mathbb{R}^p \,;\, \xi . |x| < R\}.$$

<u>On note</u> $G_R^d(\mathcal{U}_R \times \Omega)$ <u>l'espace de Banach associé à</u> ϕ_R^d. Toute fonction de cet espace est de classe de Gevrey d d'après l'analyticité de φ_R sur $]-R,+R[$.

Lorsque $d=1$, on remarque que

$$\phi_R^1(t,y) = \varphi_R(\xi . t + \zeta . y) \; ;$$

autrement dit, $\phi_R^d(t,y)$ s'obtient à partir de la série de Taylor de la fonction $y \to \varphi_R(\xi . t + \zeta . y)$ en lui appliquant un opérateur de Gevrey [6,7,8]. Ceci permet d'établir les propriétés utiles des espaces G_R^d grâce au

<u>Lemme 5.1</u> : Soit $\varphi = \sum_{k=o}^{\infty} a_k X^k$ une série formelle $\gg 0$ telle que $\varphi^2 \ll \varphi$ et soit $\varphi^d = \sum_{k=o}^{\infty} a_k \, k!^{d-1} X^k$. On a alors

(5.1) $$(\varphi^d)^2 \ll \varphi^d .$$

(5.2) $$[\varphi^d]^n \ll \frac{1}{n!^{d-1}} [\varphi^d] \;, \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ où } [\varphi^d] = \varphi^d - \varphi(0).$$

La propriété (5.1) montre que les espaces G_R^d sont <u>des algèbres de Banach</u>.

La propriété (5.2) permet de majorer très simplement la composée de deux fonctions de classe de Gevrey en procédant de la façon suivante. On pose

$$\Theta_{R'}^d(z) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{z^k}{R'^k} \, k!^{d-1} .$$

On a alors la

<u>Proposition 5.2</u> : Si $0 \leq C < R'$, on a

$$\Theta_{R'}^d \circ [c\phi_R^d] \ll \mathrm{Max}(K, \frac{c}{R'-c}) \phi_R^d .$$

Indiquons enfin comment opèrent les "dérivations" dans les algèbres G_R^d.

<u>Proposition 5.3</u> : Pour $(\gamma,\delta) \in (-\mathbb{N})^p \times \mathbb{N}^q$ tel que $|\gamma| + d|\delta| \leq 0$, l'application $D_x^\gamma D_y^\gamma : G_R^d \to G_R^d$ est linéaire, continue de norme $\leq c_{\gamma,\delta}\, \xi^\gamma \zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$.

Ce formalisme étant acquis, le théorème 4.1 se déduit du théorème du point fixe dans une boule fermée $B'(0;a)$ de l'algèbre G_R^d : voir [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Friedmann : A new proof and generalizations of the Cauchy-Kowalewski theorem, Trans. A. M. S., 98, 1961, p.1-20.

[2] L. Gårding : Une variante de la méthode de majoration de Cauchy, Acta Math., t.114, 1965, p143-158.

[3] M. Gevrey : Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t.35, 1918, p.129-190.

[4] P. D. Lax : Non linear hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 6, 1953, p.231-258.

[5] N. A. Lednev : A new method for solving partial differential equations, Mat. Sbornik, t.22, 64, 1948, p.205-266.

[6] J. Leray et Y. Ohya : Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Colloque de Liège, 1964, CBRM, p.105-144.

[7] J. Leray et Y. Ohya : Equations et systèmes non-linéaires, hyperboliques non stricts , Math. Annalen 170, 1967, p.167-205.

[8] J. Leray et L. Waelbroeck : Norme formelle d'une fonction composée, Colloque de Liège, 1964, CBRM, p.145-152.

[9] J. Persson : New proofs and generalizations of two theorems by Lednev for Goursat problems, Math. Ann. 178, 1968, p.184-208.

[10] C. Wagschal : Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielle holomorphes ou partiellement holomorphes, J. Math. pures et appl., t.53, 1974, p. 147-164.

[11] C. Wagschal : Une nouvelle démonstration d'un théorème de Lednev, C. R. Acad. Sc. Paris, t.288, 1979, p.213-216.

[12] C. Wagschal : Le problème de Cauchy non-linéaire, Séminaire Vaillant 1978-1979, a paraître.

[13] C. Wagschal : Le problème de Goursat non-linéaire, à paraître.