A. Lichnewsky

Un problème modèle en théorie de la plasticité ; analogie avec le problème des surfaces minimales

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 15, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

UN PROBLEME MODELE EN THEORIE DE LA PLASTICITE ; ANALOGIE AVEC LE PROBLEME DES SURFACES MINIMALES

par A. LICHNEWSKY

Exposé n° XV

20 Février 1979

§ 0. INTRODUCTION

Le problème que nous étudions est lié à ceux de la détermination des charges limites pour un cisaillement longitudinal d'un matériau plastique, introduits par J. R. Rice [1] et G. Strang [2]

(1) Trouver u minimisant $\int_\Omega |\nabla u| dx$ sous les contraintes

$$\int_\Omega fu\, dx = 1 \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Le comportement asymptotique de la fonctionnelle minimisée évoque le problème non paramétrique des surfaces minimales. Ceci permet de définir des solutions faibles pour (1) et d'en prouver l'existence , cf. R. Temam [3] . Il n'y a pas a priori unicité pour la solution de ce problème qui est, en outre, simplement astreinte à satisfaire une condition aux limites "relaxée" similaire à celle intervenant dans l'étude du problème des surfaces minimales. ∎

L'objet de ce travail est d'étudier de façon plus systématique le comportement au bord des solutions faibles d'un problème voisin qui nous est apparu plus simple :

(2) Trouver u minimisant $\int_\Omega |\nabla u| dx$ sous la contrainte $u|_{\partial\Omega} = g$

Après avoir défini des solutions faibles pour ce problème par un procédé analogue à celui de R. Temam [3] nous étudierons le comportement au bord des solutions faibles appartenant à un ensemble (non vide) particulier $\mathcal{S}$. Ceci nous permettra de montrer l'existence de solutions régulières du problème (2) lorsque $\partial\Omega$ est de courbure moyenne positive. Lorsque $\partial\Omega$ ne vérifie pas cette dernière hypothèse, nous montrerons l'existence de solutions faibles présentant un "saut" sur certaines positions de $\partial\Omega$. Alors que ce phénomène admet une interprétation géométrique simple dans le cas du problème non paramétrique des surfaces minimales, il conduit ici à envisager le "glissement" du matériau plastique (cf. H. Matthies, G. S. Strang et R. Temam [4]). Alors que les résultats que nous obtiendrons seront vrais dans le cas d'un ouvert Ω de R^n $(n \geq 2)$, leur interprétation mécanique n'est valable que dans le cadre bidimensionnel (n=2). L'étude du problème tridimensionnel correspondant a été entreprise par P. Suquet [5], R. Temam [3], G. Strang [2]

§ 2. FORMULATION DU PROBLEME, SOLUTIONS FAIBLES

Soit Ω un ouvert borné de R^n dont le bord $\partial\Omega$ est une variété $\mathcal{C}^1$, Ω étant localement situé d'un même côté de $\partial\Omega$. Soit g une fonction donnée dans $L^1(\partial\Omega)$.

Par analogie avec le problème des surfaces minimales nous étendons à $L^1(\Omega)$ la fonctionnelle à minimiser en (2). Plus précisément, nous posons, pour $\varepsilon \in [0,1]$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$:

$$(3)\quad e(\varepsilon,g;u) = \sup_{\substack{\theta \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})^{n+1} \\ \sum_{i=0}^{n} \theta_i^2 \leq 1}} \left\{ \int_\Omega [\sqrt{\varepsilon}\,\theta_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\theta_i}{\partial x_i} u]\,dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} \theta_i \nu_i g \, dS \right\}$$

où on a noté $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ le vecteur unitaire porté par la normale à $\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur de Ω. En intégrant par parties, il vient le

<u>Lemme 1</u> : La fonctionnelle $e(\varepsilon,g;\cdot)$ (à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) est convexe, semi-continue inférieurement et propre dans $L^1(\Omega)$. Son domaine est $BV(\Omega)$ et de plus pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$:

$$(4)\qquad e(\varepsilon,g;u) = \int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{1/2}\,dx + \int_{\partial\Omega} |u - g|\,dS$$

Nous étudierons donc la formulation faible de (2) suivante :

(5) <u>Trouver</u> $u \in L^1(\Omega)$ <u>minimisant</u> $e(0,g;u)$.

La manière dont nous avons affaibli ♦ la condition aux limites sera justifiée a posteriori par les théorèmes 2 et 3 ci-après. L'existence de solution de (5) dans $BV(\Omega)$ se démontre aisément. ∎

♦ "relaxé" dans la terminologie employée par R. Temam [3] .

§ 2. RAPPELS SUR LE PROBLEME DES SURFACES MINIMALES

Ce paragraphe a pour seul but de rendre cette exposition autonome, nous renvoyons à G. Gilbarg et N. S. Trudinger [6] pour une bibliographie extensive.

L'équation des surfaces minimales s'écrit :

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{div} \frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

il s'agit d'une équation non uniformément elliptique la dégénerescence apparaissant pour $|\nabla u| \to +\infty$ et portant sur la dérivation " dans la direction $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ ".

Nous utiliserons les deux résultats suivants :

<u>Lemme 2</u> : Soient $u \in L^1(\Omega) \cap W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ une solution faible de (6) dans Ω et $B(X,R')$ une boule contenue dans Ω. Pour tout R tel que $0 < R < R'$ on a :

$$\|u\|_{L^\infty(B(X,R))} \leq K(n)\max(1,(R'-R)^{-1}).\{\|u\|_{L^1(B(X,R'))} + (R')^{n+1/2}\}$$

Le résultat ci-dessus est prouvé dans A. Lichnewsky [7], le théorème ci-dessous, dû à O. A. Ladyzenskaya et N. N. Uralceva, figure dans D. Gilbarg et N. S. Trudinger [6, th. 14.2].

<u>Théorème A</u> : Soit $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ une solution de (6). On a alors la majoration :

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 + C_2 \cdot \|\nabla u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \quad . \quad \blacksquare$$

Nous utiliserons aussi les <u>solutions généralisées</u> du problème des surfaces minimales et ferons un large usage des résultats de R. Temam [8], A. Lichnewsky [7,9]. Les principales propriétés de ces solutions généralisées sont résumées dans le théorème ci-dessous ; le lien avec les solutions généralisées que l'on peut obtenir par les méthodes de E. de Giorgi, M. Miranda et E. Giusti est précisé dans I. Ekeland et R. Temam [10] .

<u>Théorème B</u> : Supposons Ω et g comme ci-dessus. Il existe une solution généralisée $\tilde{u}$ du problème des surfaces minimales :

(7) <u>Trouver</u> u <u>minimisant</u> $\int_\Omega (1+|\nabla u|^2)^{1/2}dx$ <u>sous la contrainte</u>

$u = g$ <u>sur</u> $\partial\Omega$.

qui possède les propriétés suivantes :

(a) $\tilde{u}$ est unique à une constante additive près

(b) $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et vérifie l'équation (6)

(c) toute suite minimisante dans $W^{1,1}(\Omega)$ de (7) :

$(u_n)_{n\in N}$ converge vers $\tilde{u}$ au sens suivant :

$$u_n \to \tilde{u} \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)/R$$

$$\nabla u_n \to \nabla\tilde{u} \quad \text{dans} \quad (L^1_{loc}(\Omega))^n$$

(d) Si Γ est une portion de $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^3$, de courbure moyenne positive ou nulle sur laquelle g est continue alors

$$\tilde{u} = g \quad \text{sur } \Gamma \quad . \quad \blacksquare$$

§ 3. <u>UN ENSEMBLE PARTICULIER DE SOLUTIONS</u> ; <u>PREMIERES PROPRIETES</u>

Supposons $\varepsilon > 0$; le problème :

(8) <u>Trouver</u> u <u>minimisant</u> $e(\varepsilon,g;u)$

se ramène, en posant $v = u\,\varepsilon^{-1/2}$ et $h = g\,\varepsilon^{-1/2}$, à une formulation faible de (7) [cf. [10]]. On obtient donc une solution généralisée $\tilde{u}_\varepsilon$ à l'aide du Théorème B. Ceci étant nous définissons un ensemble de solutions de (5) par :

<u>Définition</u> : On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points d'adhérence dans $L^1(\Omega)$ des suites $\tilde{u}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \searrow 0$.

<u>Théorème 1</u> : $\mathcal{S}$ est un ensemble non vide et fermé dans $BV(\Omega)$ de solutions de (5). De plus les éléments de $\mathcal{S}$ appartiennent à $L^\infty_{loc}(\Omega)$. $\blacksquare$

<u>Preuve</u> : Il résulte de (3) que

$$e(0,g;u) \leq e(\varepsilon,g;u) \leq e(0,g;u) + \varepsilon$$

ceci entraîne que les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon\searrow 0}$ sont des suites minimisantes de (5) bornées dans $BV(\Omega)$. La semi-continuité inférieure de $e(0,g;.)$ implique la première partie du résultat.

Posons $v_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}u_\varepsilon$; v_ε est une solution faible de (6) à laquelle on peut appliquer le lemme 2. Il vient : si $B(X,R') \subset \Omega$, $0 < R < R'$

$$\|\varepsilon^{-1/2}u_\varepsilon\|_{L^\infty(B(X,R))} \leq K(n)\max(1,(R'-R)^{-1})\{\varepsilon^{-1/2}\|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + (R')^{n+1/2}\}$$

en multipliant par $\varepsilon^{1/2}$ on obtient une estimation a priori qui fournit le reste du théorème . ■

<u>Remarque</u> : 1) L'estimation a priori dans L^∞_{loc} ci-dessus n'est pas conséquence directe des "injections de Sobolev".

2) Il n'y a pas a priori d'unicité pour la solution de (5) c'est ce fait qui nous a conduit à n'étudier qu'une famille particulière de solutions : $\mathcal{S}$. ■

§ 4. ETUDE DU COMPORTEMENT AU BORD

Nous commençons par construire une famille de fonctions barrières pour les problèmes (8) qui soit <u>indépendante de</u> ε

Il nous suffit de faire cette construction de façon globale lorsque $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^3$ et de courbure moyenne partout strictement positive. Les techniques de localisation déjà utilisées dans A. Lichnewsky [9] s'appliquent ici aussi et permettront d'en déduire les autres résultats. La méthode de construction que l'on utilise s'inspire fortement de J. Serrin [11] et D. Gilbarg- N.S. Trundinger [6].

<u>Lemme 3</u> : Soit Ω un ouvert borné de R^n dont le bord $\partial\Omega$ est une variété $\mathcal{C}^3$; Ω étant, localement , situé d'un même côté de $\partial\Omega$. Supposons la courbure moyenne de $\partial\Omega$ strictement positive. Soit g une donnée au bord $g \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$. Pour tout $M > 0$ il est possible de construire un voisinage $\mathcal{O}$ de $\partial\Omega$ dans R^n et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{O} \cap \Omega})$ tels que

(a) $\mathcal{O}$ et φ sont indépendants de $\varepsilon \in]0,1]$

(b) φ est une sur-solution de l'équation d'Euler associée à (8) :

(9) $\quad \operatorname{div} \dfrac{\nabla\varphi}{(\varepsilon+|\nabla\varphi|^2)^{1/2}} \leq 0$ dans $\Omega \cap \mathcal{O}$ pour $\varepsilon \in]0,1]$

(c) $\varphi = g$ sur $\partial\Omega$; $\varphi \geq M$ sur $\partial\mathcal{O} \cap \Omega$. ■

Remarque : Ce résultat n'est pas valable si l'on suppose simplement la courbure moyenne positive ou nulle. Ceci peut être montré à l'aide d'un contre-exemple au théorème 2. Dans le cas du problème des surfaces minimales la courbure moyenne de $\partial\Omega$ peut être prise positive ou nulle. ■

Preuve : (a) La variété $\partial\Omega$ étant $\mathcal{C}^3$ et compacte on peut paramétrer un voisinage "tubulaire" V de $\partial\Omega$ dans R^n par l'application

(10) $$x \in V : \rightsquigarrow (d(x), y(x)) \in]-\alpha,\alpha[\times \partial\Omega$$

où on a noté :

$$\begin{cases} d(x) = \text{distance } (x,\partial\Omega) \text{ si } x \in \overline{V \cap \Omega} \\ \quad\;\; = -\text{ distance } (x,\partial\Omega) \text{ si } x \in V - \Omega \\ y(x) = \text{projection de } x \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

L'application définie en (10) étant un difféomorphisme $\mathcal{C}^2$; nous utiliserons le calcul des dérivées de cette application explicité dans J. Serrin [11], D. Gilbarg et N. S. Trudinger [6]. Soit $\bar{g}$ le relèvement de g dans $\mathcal{C}^2(\bar{V})$: $\bar{g}(x) = g(y(x))$.

(b) Nous cherchons maintenant la sur-solution $\varphi(x)$ sous la forme $\varphi(x) = \bar{g}(x) + \psi(d(x))$ où ψ est une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de dérivée $\psi' > 0$. On doit avoir (9) pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, soit de manière équivalente :

(11) $$(\varepsilon + |\nabla\varphi|^2)\Delta\varphi - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$$

Pour calculer les divers termes de (11) nous explicitons les dérivées de d ; en notant $(\varkappa_i)_{i=1}^{n-1}$ les courbures principales de $\partial\Omega$ en $y(x)$ ♦ il vient :

♦ Nous orientons ici la normale à $\partial\Omega$ vers l'intérieur de Ω, ce qui permet d'obtenir le signe usuel pour les courbures.

$$\Delta\varphi = \Delta\bar{g} + \psi'\Delta(d(x)) + \psi''|\nabla d|^2$$

$$(12) \qquad \Delta\varphi = \Delta\bar{g} + \psi'\Big(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varkappa_i(y(x))}{1-\varkappa_i(y(x)).d(x)}\Big) + \psi''$$

en utilisant le fait que $|\nabla d| = 1$.

Pour le second terme de (11) nous avons

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla\varphi|^2) .$$

On observe que $\nabla d.\nabla\bar{g} = 0$ si bien que

$$|\nabla\varphi|^2 = |\nabla\bar{g}|^2 + 2\psi'\,\nabla d.\,\nabla\bar{g} + \psi'^2|\nabla d|^2 = |\nabla\bar{g}|^2 + \psi'^2 .$$

Finalement :

$$(13) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{g}}{\partial x_i}\frac{\partial|\nabla\bar{g}|^2}{\partial x_i} + \frac{\psi'}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d(x)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla\bar{g}|^2 + \psi'^2\psi''$$

nous venons d'utiliser le fait que :

$$\sum_{i=1}^{n} \psi'^2\psi''\Big(\frac{\partial d(x)}{\partial x_i}\Big)^2 = \psi'^2\psi''|\nabla d|^2 = \psi'^2\psi''$$

En regroupant les divers termes de (12) et (13) et en utilisant le fait que $\nabla\bar{g}.\nabla d = 0$ on met (11) sous la forme équivalente :

$$(14) \qquad (\varepsilon + |\nabla\bar{g}|^2)\Big(\Delta\bar{g} - \psi'\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varkappa_i}{1-\varkappa_i d}\Big) + \psi''\Big) + (\psi')^2\Big(\Delta\bar{g} - \psi'\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varkappa_i}{1-\varkappa_i d}\Big)\Big)$$

$$- 1/2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla\bar{g}|^2) - \frac{\psi'}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla\bar{g}|^2) \leq 0$$

(d) Nous choisissons d'abord $\mathcal{O}$. Pour cela on remarque que la fonction : $x \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varkappa_i(y(x))}{1-\varkappa_i(y(x)).d(x)}$ est continue, et que du fait des hypothèses et de la compacité de $\partial\Omega$:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \varkappa_i(x) > \gamma > 0 \quad \text{sur } \partial\Omega .$$

Ceci fait qu'il est loisible de choisir α_1, $0 < \alpha_1 < \alpha$ tel que sur $\mathcal{O} = \{x | 0 \le d(x) \le \alpha_1\}$ on ait

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varkappa_i}{1 - \varkappa_i d} \ge \beta > 0 .$$

Les quantités $|\Delta\bar{g}|$, $|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla\bar{g}|^2|$ et $\sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla\bar{g}|^2|$ sont majorées par des constantes C_1, C_2, C_3 qui ne dépendent que de $\|g\|_{\mathcal{C}^2(\partial\Omega)}$ et de la géométrie. On remarque enfin que $|\frac{\partial d}{\partial x_i}| \le |\nabla d| \le 1$.
L'inégalité (14) sera donc vérifiée si

$$(\varepsilon + |\nabla\bar{g}|^2)(C_1 - \psi'\beta + \psi'') + \psi'^2(C_1 - \psi'\beta) + C_2 + C_3\psi' \le 0 .$$

Nous choisissons ψ tel que $\psi'' \equiv 0$, $\psi' \ge \max(\frac{2C_1}{\beta}, \rho)$ où ρ est la racine positive du polynôme $-C_1X^2 + C_3X + C_2$. Ceci garantit que l'inégalité (14) est vérifiée.

(e) On modifie encore la constante ψ' de façon à vérifier les autres propriétés requises. En prenant $\psi' \ge \max(\frac{2C_1}{\beta}, \rho, \frac{M + |g|_\infty}{\alpha_1})$ on obtient une fonction

$$\varphi(x) = \bar{g}(x) + \psi(d(x))$$

qui vérifie $\varphi|_{\{x | d(x) = \alpha_1\}} = \varphi|_{\partial\mathcal{O} \cap \Omega} \ge M$.

Ceci achève la démonstration du lemme 3. On remarque que toutes les constantes ont été déterminées indépendamment de ε.

En utilisant les techniques de localisation developpées dans [9] le théorème 1 et le lemme 3 ci-dessus permettent d'obtenir le

<u>Théorème 2</u> : Soit Ω un ouvert borné de R^n dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que Γ soit une portion de $\partial\Omega$ de courbure moyenne strictement positive et de classe $\mathcal{C}^3$. Pour toute donnée $g \in L^1(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Gamma)$ les solutions de (5) appartenant à $\mathcal{S}$ sont continues en tout point de Γ et

vérifient $u = g$ sur Γ.

Remarque : (a) Lorsque $\partial\Omega$ est partout de courbure moyenne strictement positive et lorsque g est continue on a ainsi obtenu l'existence de solutions faibles de (2) satisfaisant à la condition aux limites.

(b) Ce résultat peut être étendu au cas d'un bord $\partial\Omega$ moins régulier suivant la démarche employée en [9]. ⌑

§ 5. EXISTENCE DE SOLUTIONS REGULIERES

En employant conjointement le théorème A et le lemme 3 nous obtenons l'existence de solutions fortes pour le problème initial [2].

Théorème 3 : Soit Ω un ouvert de R^n dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^3$. Supposons la courbure moyenne de $\partial\Omega$ strictement positive. Pour toute donnée $g \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\partial\Omega)(\mu > 0)$, toute solution $\tilde{u}$ dans $\mathcal{S}$ du problème (5) appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ et satisfait la condition aux limites $u = g$ en tout point de $\partial\Omega$.

Preuve : On construit, à l'aide du lemme 3 un voisinage $\mathcal{O}$ de $\partial\Omega$ et deux fonctions $\varphi^{\pm}$ telles que

(a) φ^+ (resp. φ^-) est une sur-solution (resp. sous-solution) des équations d'Euler associées à (8) pour $\varepsilon \in]0,1]$ dans $\Omega \cap \mathcal{O}$.

(b) $\varphi^+ = \varphi^- = g$ sur $\partial\Omega$

(c) sur $\partial(\mathcal{O} \cap \Omega) - \partial\Omega$: $\varphi^+ \geq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + 1$

et $\varphi^- \leq -\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} - 1$

(d) $\varphi^{\pm} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega \cap V})$.

Nous appliquons à la suite $\tilde{u}_\varepsilon$ approchant $\tilde{u}$ le principe du maximum ; il vient $\varphi^- \leq \tilde{u}_\varepsilon \leq \varphi^+$. Ceci entraîne que

$|\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \operatorname{Sup} \|\nabla \varphi^{\pm}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$. Du fait de la régularité supposée de $\partial\Omega$ et de g, $\tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ et on peut appliquer le Théorème A à $u_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}\tilde{u}_\varepsilon$ qui est solution de (6). Il vient :

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 + C_2 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

d'où

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{\varepsilon}\, C_1 + C_2 \operatorname{Sup} \|\nabla \varphi^{\pm}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

Le résultat est maintenant conséquence de cette estimation, le passage à la limite s'effectuant comme vu plus haut. ▫

Remarque : Le théorème d'injection compacte de Sobolev entraîne que sous les hypothèses du théorème 3 la suite u_ε convergeant vers $\tilde{u}$ converge uniformément vers $\tilde{u}$ au sens de la norme $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Cette propriété semble intéressante si l'on désire un procédé d'approximation numérique de $\tilde{u} \in \mathcal{S}$.

§ 6. NECESSITE DES HYPOTHESES

Le résultat suivant, dont la démonstration reprend les idées utilisées pour l'étude du problème des surfaces minimales (cf. J. Serrin [11]), montre la nécessité des hypothèses. D'un point de vue mécanique ce résultat suggère la possibilité d'un "glissement" du matériau plastique.

Théorème 4 : Supposons que Ω soit un ouvert borné de R^n de bord $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^3$. Soit x un point de $\partial\Omega$ où la courbure moyenne de $\partial\Omega$ est strictement négative. Il est possible de construire un voisinage V de x dans R^n et une fonction $g \in \mathcal{C}^3(\partial\Omega)$ tels que pour toute solution u de (5) appartenant à $\mathcal{S}$:

$$u \leq \min_{x \in V \cap \partial\Omega} g(x) - 1 \quad \text{dans } V \cap \Omega.$$ ▪

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. R. Rice : Int. J. Fract. Mech., 2, 1966, p.426-447.

[2] G. Strang : A family of model problems in plasticity, Proceedings Third International Symposium on Computing methods, I.R.I.A, Versailles, 1977.

[3] R. Temam : Mathematical problems in plasticity theory, Proc. Int. School Math., Erice 1978, (A paraître).

[4] H. Matthies, G. Strang, R. Temam : Mathematical and computational methods in plasticity, Proc. IUTAM Conf. on variationnal methods in the mechanics of solids, Evanston (Ill. U.S.A.). 1978.

[5] P. Suquet : C. R. Acad. Sc. Paris 286, (1978). p.1201-1204 et p.1129-1132.

[6] D. Gilbarg et N. S. Trudinger : Elliptic partial differential equations of second order, Springer 1977.

[7] A. Lichnewsky : Bull. Soc. Math. France. 102, 1974, p.417-434.

[8] R. Temam : Arch. Rat. Mech. Anal., 44, 1971, p.121-156.

[9] A. Lichnewsky : J. Math. Pures at Appl., 53, 1974, p.397-425 et 57, 1978, p.231-254.

[10] I. Ekeland et R. Temam : Convex analysis and variational problems. North Holland. Amsterdam 1976.

[11] J. Serrin : Phil. Trans. Royal. Soc. London, A, 264, 1969, p.413-496.