Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Grubb

Estimations du reste dans l'étude des valeurs propres des problèmes aux limites pseudo-différentiels elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 14, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1978-1979

ESTIMATIONS DU RESTE DANS L'ETUDE DES VALEURS PROPRES DES PROBLEMES AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIELS ELLIPTIQUES

par G. GRUBB

Exposé n° XIV

20 Février 1979

§ 1. INTRODUCTION

Rappelons d'abord quelques résultats bien connus pour les problèmes différentiels. Soit $\bar{\Omega}$ une variété compacte C^∞ de dimension n, de bord Γ (de dimension n-1) et d'intérieur Ω ; on choisit, pour simplifier, des coordonnées $x = (x', x_n)$ dans un voisinage de Γ (avec $x' \in \Gamma$, $x_n \in [0,1[$) et des densités dx et dx' sur $\bar{\Omega}$ resp. Γ. Soit A un opérateur différentiel (o.d.) sur $\bar{\Omega}$, fortement elliptique d'ordre $\ell > 0$ et formellement auto-adjoint ; en général, A peut être un "système", i.e. $q \times q$-matriciel ou opérant dans un fibré vectoriel complexe hermitien E de dimension $q \geq 1$ sur $\bar{\Omega}$. On considère une réalisation A_B de A, auto-adjointe dans $L^2(E)$ et de domaine $D(A_B) \subset H^\ell(E)$ (espace de Sobolev d'ordre ℓ). Puisque l'injection $H^\ell(E) \hookrightarrow L^2(E)$ est compacte, le spectre de A_B est discret et consiste en une suite croissante de valeurs propres positives $\lambda_j^+(A_B)$ (répétées selon les multiplicités) tendant vers $+\infty$, plus un nombre fini ou infini de valeurs propres ≤ 0 ; dans le cas infini c'est une suite $\lambda_j^-(A_B)$ tendant vers $-\infty$ (autrement, on peut ajouter une constante à A_B pour le rendre positif). On s'intéresse à des estimations asymptotiques du nombre $N^\pm(t;A_B)$ de valeurs propres positives, resp. négatives, dans l'intervalle $[-t,t]$, pour $t \to \infty$.

Par un technique qui marche également bien si A est scalaire ou un système, Agmon [1] a montré, dans le cas où $A_B > 0$ (et $D(A_B^k) \subset H^{k\ell}(E)$ pour un entier k tel que $k\ell > n$),

$$(1.1) \qquad N^+(t;A_B) = c_A t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\delta)/\ell}) \quad \text{pour } t \to \infty ,$$

pour tout $\delta < \frac{1}{2}$; ici c_A est une constante dérivée de la partie principale $a^o(x,D)$ de A. Métivier a obtenu (1.1) avec $\delta = \frac{1}{2}$ (voir [17]), sous des hypothèses de régularité modestes, par une autre méthode qui semble marcher bien pour les systèmes aussi. Pour le cas non inférieurement borné, nous avons montré dans [9] (quand A_B est définie par une condition au bord différentielle ou (tangentiellement) pseudo-différentielle) :

$$(1.2) \qquad N^-(t;A_B) = \mathcal{O}(t^{(n-1)/\ell}) \text{ pour } t \to \infty ,$$

(en effet une estimation plus précise, voir [9]); et Pham The Lai a montré dans [19] que (1.1) avec $\delta < \frac{1}{2}$ est vrai aussi quand A_B est non inférieurement borné (il traite également des cas non auto-adjoints).

Agmon montre en effet (1.1) comme conséquence d'un résultat plus structuré, portant sur la fonction spectrale $e(t;x,y)$ de A_B (c'est le noyau du projecteur $\mathcal{E}_t (t \in \mathbb{R})$ dans la décomposition spectrale de A_B, voir e.g. [1]) . Pour tout $\delta < \frac{1}{2}$,

$$(1.3) \qquad e(t;x,x) = c_A(x) t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\delta)/\ell} d_1(x)^{-\delta}) \text{ pour } t \to \infty ,$$

uniformément pour $x \in \Omega$; ici c_A est dérivée de $a^o(x,\xi)$, et on met $d_1(x) = x_n$ au voisinage de Γ, $d_1(x) = 1$ ailleurs. Quand A est un système, (1.3) est valable avec $\mathrm{tr}\, e$ au lieu de e (la trace matricielle). Des résultats pareils mais non uniformes en x sont dûs à Agmon-Kannai [2] et Hörmander [15].

(1.3) peut être amélioré quand $a^o(x,D)$ est à coefficients constants, voir e.g. [1], [22]. Pour les opérateurs à coefficients variables, les meilleurs résultats ont été obtenus pour les opérateurs scalaires , i.e. $\dim E = 1$. Dans ce cas, l'introduction de la technique des opérateurs intégraux de Fourier par Hörmander [16] lui a permis de montrer

$$(1.4) \qquad e(t;x,x) = c_P(x) t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\delta)/\ell}) \text{ pour } t \to \infty$$

avec $\delta = 1$, pour la réalisation dans L^2 d'un opérateur elliptique positif pseudo-différentiel P sur une variété compacte sans bord, ce résultat est le meilleur possible dans le cas général. Le pas fondamental dans la démonstration est la construction d'une fonction de phase $\psi(x,y,\xi)$ adaptée particulièrement bien à $p^o(x,\xi)$; ψ remplace l'exponent $\langle x-y,\xi \rangle$ dans la définition d'une paramétrix de $D_t + P^{1/\ell}$. Ensuite, Brüning [5] a montré comment une combinaison des résultats de Hörmander [15], [16] et d'Agmon entrainent la validité de (1.3) pour tous $\delta \leq 1$, pour les réalisations auto-adjointes positives A_B d'un opérateur différentiel scalaire ; cela donne en particulier

$$(1.5) \qquad N^+(t;A_B) = c_A t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-1)/\ell} \operatorname{Log} t) \quad \text{pour } t \to \infty .$$

(Nous remarquons que si A_B est scalaire, différentiel, autoadjoint et non inférieurement borné, le comportement de $N^-(t;A_B)$ est réglé par (1.2), et $N^+(t;A_B)$ se comporte comme (1.1) pour tout $\delta < 1$, ce qui se montre à l'aide de nos propositions 2.1 et 2.2 plus bas).

La technique pour montrer (1.4) avec $\delta = 1$ sur une variété sans bord doit marcher aussi pour certains systèmes, i.e. ceux auxquels la construction d'une fonction de phase peut être étendue. C'est le cas pour les systèmes où les valeurs propres de la matrice $p^0(x,\xi)$ sont simples (comme signalé dans Hörmander [16]) ; on doit pouvoir inclure aussi les cas où ces v.p. sont de multiplicité constante (traités par Chazarain [6], Petkov [18]). A notre connaissance, de tels études n'ont pas été réalisées en détail. Nous avons montré dans [13] pour les systèmes pseudo-différentiels généraux , auto-adjoints elliptiques mais non nécessairement > 0, par utilisation d'estimations pour les classes $S^m_{\rho,\delta}$ $(\rho = 1-\delta)$:

$$(1.6) \qquad N^{\pm}(t;P) = c_p^{\pm}\, t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\delta)/\ell}) \quad \text{pour } t \to \infty ,$$

pour tout $\delta < \frac{1}{2}$; ici les constantes $c_p^{\pm}$ dépendent des valeurs propres positives, resp. négatives, de $p^0(x,\xi)$ (et une estimation analogue est valable pour les fonctions spectrales $e^{\pm}$ de $P^{\pm} = \frac{1}{2}(|P| - P)$).

Dans le travail présenté ici, nous étudions les questions spectrales pour les systèmes pseudo-différentiels avec des conditions aux limites . Une motivation a été l'étude des problèmes elliptiques de Douglis-Nirenberg différentiels, où les problèmes pseudo-différentiels apparaissent par une réduction naturelle (cf.[10]).

§ 2. PRELIMINAIRES

Nous supposons désormais que P est un opérateur pseudo-différentiel (o.ps.d.) classique opérant dans un fibré $\tilde{E}$ sur un voisinage Σ de $\bar{\Omega}$ (tel que $\tilde{E}|_{\bar{\Omega}} = E$), P étant fortement elliptique d'ordre $\ell > 0$ et formellement autoadjoint. Nous pouvons supposer Σ compacte (de dimension n et sans bord), et $P > 0$ sur Σ (donc inversible). Pour définir P sur Ω on introduit l'opérateur r^+ de restriction, $r^+ : v \mapsto v|_{\Omega}$, et l'opérateur e^+ "d'extension par zéro hors de Ω", et on met :

$$(2.1) \qquad P_{\Omega} u = r^+ P e^+ u \; , \quad \text{quand } u \in L^2(E).$$

Une première différence entre les o.d. et les o.ps.d. est que quand S et S' sont des o.ps.d.,

$$(2.2) \qquad L(S,S') = (SS')_{\Omega} - S_{\Omega} S'_{\Omega} = r^+ S(I - e^+ r^+) S' e^+$$

est 0 si S est un o.d., mais $\neq 0$ en général.

Pour définir des problèmes aux limites il est convenable d'avoir des hypothèses supplémentaires sur P près de Γ. Mais une réalisation particulière peut toujours être définie ; c'est la "réalisation de Dirichlet" P_γ, définie comme l'extension de Friedrichs de $P_\Omega|_{C_0^\infty(\Omega,E)}$. Un premier resultat a été montré dans Grubb [10], [11]

$$N^+(t;P_\gamma) = c_P t^{n/\ell} + o(t^{n/\ell}) \text{ pour } t\to\infty \,, \tag{2.3}$$

où

$$c_P = \int_\Omega c_P(x)dx \;, \text{ avec } c_P(x) = \frac{1}{n(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1} \mathrm{tr}[p^o(x,\xi)^{-n/\ell}]d\omega \,. \tag{2.4}$$

On se sert là du fait que c_P dépend continûment de $p^o(x,\xi)$, et $\lim_{t\to\infty} N^+(t;P_\gamma)t^{-n/\ell}$ a aussi une certaine dépendance continue de P, grâce au principe de min-max ; donc il suffit de montrer (2.3) pour certains opérateurs plus faciles. Cependant, les estimations plus fines du reste $N^+(t;P_\gamma) - c_P t^{n/\ell}$ ne permettent plus de changer $p^o(x,\xi)$, et nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires.

Nous supposons désormais que $\ell = 2m$ (m entier >0) et que P ait la propriété de transmission de Boutet de Monvel [4] à Γ. Alors P_Ω est continu de $H^s(E)$ dans $H^{s-\ell}(E)$ pour tout $s>-\frac{1}{2}$, et on peut montrer que

$$D(P_\gamma) = H^\ell(E) \cap H_0^m(E) = \{u\in H^\ell(E)\,|\,\gamma u = 0\} \,,$$

où $\gamma = \{\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}\}$ (ici $\gamma_k : u \mapsto (D_{x_n}^k u)|_\Gamma$). La propriété de transmission nous permet aussi d'étudier d'autres réalisations de P_Ω. Rappelons qu'il est montré dans [4] comment on associe à P_Ω des "opérateurs de Green"

$$\begin{pmatrix} P_\Omega + G & K \\ T & Q \end{pmatrix} \text{ allant de } \begin{matrix}\Omega\\ \times \\ \Gamma\end{matrix} \text{ dans } \begin{matrix}\Omega\\ \times \\ \Gamma\end{matrix} \;;$$

ici T est un opérateur de trace, K un opérateur de Poisson (envoyant des sections sur Γ en des sections sur Ω), Q un o.ps.d. sur Γ (T, K et Q opèrent dans des fibrés de dimensions diverses, éventuellement zéro), et G est un <u>opérateur de Green singulier</u> (o.g.s.) (équivalent à une somme $\sum_{j=0}^{\infty} K_j T_j$ avec décroissance rapide). Le composé de deux opérateurs de Green est encore un opérateur de Green ; voir d'ailleurs [4] pour le calcul.

Dans ce cadre, le système "non homogène"

$$\begin{pmatrix} P_\Omega \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ est inversible , d'inverse } \quad (R_o \quad K_o),$$

où K_o est un opérateur de Poisson, et

$$R_o = (P^{-1})_\Omega + G_o ,$$

G_o étant un o.g.s. Ici, R_o coïncide avec l'inverse de $P_\gamma : D(P_\gamma) \to L^2(E)$. Plus généralement, nous pouvons considérer des choix de G et T, où

$$\begin{pmatrix} P_\Omega + G \\ T \end{pmatrix} \text{ est inversible, } \quad \text{d'inverse } \quad (R_T \quad K_T) ;$$

alors si R_T est auto-adjoint et envoit $L^2(E)$ dans $H^\ell(E)$, nous définissons la réalisation $(P+G)_T$ comme l'inverse de $R_T : L^2(E) \to R_T(L^2(E))$; $(P+G)_T$ opère comme $P_\Omega + G$ sur un domaine avec $Tu = 0$. Par la théorie de [4],

$$R_T = (P^{-1})_\Omega + G_T$$

pour un certain o.g.s. G_T, et donc

$$(P+G)_T^{-1} - P_\gamma^{-1} = G_T - G_o$$

est un o.g.s. d'ordre $-\ell$ (et de classe 0, i.e. défini sur $L^2(E)$ entier). L'étude des v.p. de $(P+G)_T$ sera réduit à l'étude de P_γ par les deux propositions suivantes.

<u>Proposition 2.1</u> : Soit $\widetilde{G}$ un o.g.s. dans Ω d'ordre $-r$ $(r>0)$ et de classe 0. Alors les valeurs propres $\lambda_j(|\widetilde{G}|)$ de $|\widetilde{G}| = (\widetilde{G}^*\widetilde{G})^{1/2}$ vérifient

$$\lambda_j(|\widetilde{G}|) = \mathcal{O}(j^{-r/(n-1)}) \qquad \text{pour } j \to \infty .$$

Ce phénomène a été observé d'abord dans [9] pour un cas particulier ([9], th. 8.4 et 8.11) ; c'est prouvé dans le langage présent dans [10] pour le cas où $\widetilde{G}$ est une somme finie $\sum_{j \leq J} K_j T_j$ ([10], prop. 3.5, voir aussi lemme 2.5) ; et pour $\widetilde{G}$ général il résulte d'un passage à la limite sans complications (indiqué dans [14]).

<u>Proposition 2.2</u> : Soient A_1 et A_2 autoadjoints dans un espace de Hilbert H, d'inverses compacts ; soit $A_1 > 0$ et posons $A_2^{-1} - A_1^{-1} = \widetilde{G}$. Soit $\sigma > \rho > 0$, soit $\theta < \sigma$ et soit $c_0 > 0$. Si A_1 et $\widetilde{G}$ vérifient

$$N^+(t;A_1) = c_0 t^\sigma + \mathcal{O}(t^\theta) \text{ pour } t\to\infty ,$$

$$\lambda_j(|\widetilde{G}|) = \mathcal{O}(j^{-1/\rho}) \qquad \text{pour } j\to\infty ;$$

alors

$$N^+(t;A_2) = c_0 t^\sigma + \mathcal{O}(t^{\theta'}) \qquad \text{pour } t\to\infty ,$$

$$N^-(t;A_2) = \mathcal{O}(t^\rho) \qquad \text{pour } t\to\infty ,$$

où $\theta' = \max\{\theta,\rho(1+\sigma)/(1+\rho)\}$.

Ce résultat est inspiré d'un théorème de Ky Fan[8] (qui traite le reste $o(t^\sigma)$ au lieu de $\mathcal{O}(t^\theta)$) et est démontré comme [13, prop. 6.1 et lemme 6.2]. Nous l'utilisons ici avec $\sigma = n/\ell$, $\theta = (n-\delta)/\ell$ et $\rho = (n-1)/\ell$. Alors, quand $\delta < 1$, on a que $\theta' = \theta$ si ℓ est suffisamment grand.

Grâce aux propositions 2.1 et 2.2, la validité d'une estimation comme (1.1) avec un $\delta < 1$, pour une seule réalisation positive, suffit pour conclure la validité de (1.1)-(1.2) avec le même δ pour tout autre réalisation $(P+G)_T$ du genre étudié ici ; on tire parti de ce qu'il existe un lien simple entre $N^\pm(t;(P+G)_T)$ et $N^\pm(t;(P+G)_T^k)$, et que $(P+G)_T^k$ est une réalisation du même genre, de P^k (on a, par exemple, que $(P^k)_\Omega - (P_\Omega + G)^k$ est un o.g.s., car $(P^k)_\Omega - (P_\Omega)^k$ l'est [cf.(2.2)], et les composés de P_Ω et G sont des o.g.s.). Donc il suffit de considérer P_γ , et on a le droit de supposer ℓ aussi large qu'on veut.

§ 3. <u>LA RESOLVANTE</u>

Notre étude du spectre est fondée sur une analyse de la résolvante. Introduisons les deux résolvantes exactes

$$R_\lambda = (P_\gamma - \lambda I)^{-1} \qquad \text{(opérateur sur } \Omega \text{)} , \tag{3.1}$$

$$Q_\lambda = (P - \lambda I)^{-1} \qquad \text{(opérateur sur } \Sigma\text{)} , \tag{3.2}$$

elles sont définies pour $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Dans le calcul de Boutet de Monvel nous avons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$,

(3.3) $$\begin{pmatrix} P_\Omega - \lambda I \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ est inversible, d'inverse } (R_\lambda \quad K_\lambda),$$

et

(3.4) $$R_\lambda = Q_{\lambda,\Omega} + G_\lambda \quad ,$$

où G_λ est une famille d'o.g.s. d'ordre $-\ell$, paramétrisée par λ. Nous étudions le noyau de R_λ dans des régions (avec $\delta \geq 0$, $c > 0$)

(3.5) $$V_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq 1, \ \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0 \ \text{ ou } |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq c|\lambda|^{1-\delta/\ell}\} \ ,$$

afin de pouvoir utiliser un théorème "taubérien" de Pleijel pour obtenir une estimation de $\mathrm{tr}\, e(t;x,x) - c_p(x)t^{n/\ell}$. R_λ était étudiée par une construction explicite dans le cadre de Boutet de Monvel dans [10] et [12], pour des régions V_0 (des "secteurs" de $\mathbb{C}$). Nous avions envisagés d'étendre cette étude aux régions V_δ avec $0 < \delta < \frac{1}{2}$, ce qui devrait donner

(3.6) $$N(t;P_\gamma) - c_p t^{n/\ell} = \mathcal{O}(t^{(n-\delta)/\ell}) \text{ pour } t \to \infty, \ \delta < \tfrac{1}{2} \ .$$

Une telle étude donnerait aussi des résultats comme ceux d'Eskin [7] pour le cas scalaire différentiel -mais elle n'est plus nécessaire pour obtenir (3.6), car nous avons trouvé une méthode plus simple, liée à la démonstration d'Agmon [1].

Nous considérons les deux termes $Q_{\lambda,\Omega}$ et G_λ séparément. Soit $\ell > n$, alors ils ont des noyaux $K(Q_{\lambda,\Omega})(x,y)$ et $K(G_\lambda)(x,y)$ continus en x,y (définis au moins localement). Le noyau de $Q_{\lambda,\Omega}$ est la restriction à $\bar\Omega \times \bar\Omega$ du noyau de Q_λ, et nous avons pour ce dernier, comme conséquence de [13] (voir [13,th.5.3] pour la définition des $c_k(x)$) :

<u>Théorème 3.1</u> : Soit $\varepsilon \in]0,\frac{1}{4}]$, et soit r entier ≥ 0. Alors si $\ell \geq \varepsilon^{-1}(n+r+5)$, on a

(3.7) $$\left| K(Q_\lambda)(x,x) - \sum_{k=0}^{r} c_k(x)(-\lambda)^{-1+\frac{n-r}{\ell}} \right| \leq c|\lambda|^{-1+\frac{n-r-1}{\ell}} \ ,$$

uniformément pour $x \in \Sigma$ et $\lambda \in V_{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

Ici $(-\lambda)^{\alpha}$ est la détermination positive pour $\lambda \in \mathbb{R}_-$, définie pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$.

Il reste à étudier G_λ. Dans le cas où P est différentiel, on a une connaissance explicite du symbole de G_λ (voir e.g. Seeley [21]), qui peut être décrit à l'aide du polynôme en ξ_n, $\det(p^0(x',0,\xi',\xi_n) - \lambda I)$. Quand P est un o.ps.d. on a, plus abstraitement, l'existence de G_λ plus quelques propriétés qualitatives, dont il faut tirer les informations désirées.

Agmon a obtenu sa démonstration de (3.6) dans le cas o.d. en montrant l'estimation suivant pour tout $M \geq 0$ [1,lemme 4.2] :

$$
(3.8) \qquad |K(G_\lambda)(x,x)| \leq c_M \frac{|\lambda|^{n/\ell}}{d(\lambda)} \left(\frac{|\lambda|^{1-1/\ell}}{d_1(x)d(\lambda)} \right)^M \quad \text{pour } |\lambda| \geq 1, \lambda \notin \mathbb{R}_+
$$

(ici $d(\lambda) = \mathrm{dist}(\lambda, \mathbb{R}_+)$; $d_1(x)$ était défini après (1.3)); ensuite il a combiné (3.7) et (3.8) dans une utilisation astucieuse d'un théorème "taubérien" de Pleijel ([1], démonstration du th.3.1). Il n'utilise pas une connaissance explicite de G_λ mais plutôt ses propriétés, en particulier que $(P_\Omega - \lambda I)G_\lambda = 0$.

Dans notre cas ,

$$
\begin{aligned}
(P_\Omega - \lambda I)G_\lambda &= (P_\Omega - \lambda I)R_\lambda - (P_\Omega - \lambda I)Q_{\lambda,\Omega} \\
&= I - (P - \lambda I)_\Omega Q_{\lambda,\Omega} = L(P - \lambda I, Q_\lambda) \neq 0 \text{ en général}
\end{aligned}
$$

(voir (3.2) - (3.4) et (2.2)). Ici, $L(P - \lambda I, Q_\lambda)$ est un o.g.s., avec la propriété (cf.(2.2))

$$
(3.9) \qquad L(P - \lambda I, Q) = L(P - \lambda I, \psi Q)
$$

pour tout $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ tel que $\psi = 1$ sur $\Omega \setminus \Sigma$. Utilisant (3.9) et (3.2)-(3.4), on montre :

<u>Lemme 3.2</u> : Quand $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ avec $\psi = 1$ sur $\Omega \setminus \Sigma$ et $\varphi\psi = 0$,

$$
(3.10) \qquad \varphi G_\lambda(\varphi u) = \varphi R_\lambda [(P-\lambda I)\psi Q_\lambda \varphi]_\Omega u \quad \text{pour } u \in L^2(E) .
$$

Pour estimer $K(G_\lambda)(x,x)$ dans un point $x_0 \in \Omega$ il suffit de considérer $K(\varphi G_\lambda \varphi)$ avec φ tel que $\varphi(x_0) = 1$. Alors on voit que $\psi Q_\lambda \varphi$ dans (3.10) doit être dans un sens négligeable, parce que $\psi\varphi = 0$. En précisant cela, on trouve que pour avoir une bonne estimation en $|\lambda|$, on fait intervenir les dérivées de φ et ψ, qui croissent avec $d_1(x_0)^{-1}$, ce qui explique un peu le rôle de $|\lambda|$ et $d_1(x)$ dans (3.8). Nous avons par exemple, si on remplace Q_λ par sa partie principale $Q_\lambda^o = Op((p^o(x,\xi)-\lambda I)^{-1})$ (en coordonnées locales, où ψ et φ sont des fonctions de x_n)

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} \psi Q_\lambda^o \varphi &= \psi\varphi\, Q_\lambda^o + \psi[Q_\lambda^o,\varphi] \\ &= 0 + \psi(x_n) Op(\partial\xi_n(p^o(x,\xi) - \lambda I)^{-1} \varphi'(x_n,y_n)) , \end{aligned}$$

où $\varphi'(x_n,y_n)$ est $\mathcal{O}(d(x_o)^{-1})$, et

$$\partial\xi_n(p^o(x,\xi) - \lambda I)^{-1} = -(p^o(x,\xi) - \lambda I)^{-1}(\partial\xi_n p^o(x,\xi))(p^o(x,\xi)-\lambda I)^{-1}.$$

Puisque $|p^o(x,\xi) - \lambda I| \geq c(|\xi|^\ell + d(\lambda))$ pour un $c > 0$, nous obtenons que le symbole de $(P - \lambda I)\psi Q_\lambda^o \varphi$ est d'ordre $\sim$

$$(3.12) \qquad (|\xi|^\ell + |\lambda|)|\xi|^{\ell-1}(|\xi|^\ell + d(\lambda))^{-2} d_1(x_o)^{-1} \leq c(\xi) \frac{|\lambda|}{d(\lambda)^2 d_1(x_o)}$$

Ici on peut faire une observation intéressante. Il faut <u>éviter</u> de faire le calcul (3.11), mais utiliser plutôt la présence de $P - \lambda I$ dans la formule (3.10) :

$$(3.13) \qquad \begin{aligned} (P - \lambda I)\psi Q_\lambda \varphi &= \psi(P - \lambda I)Q_\lambda \varphi + [P,\psi]\, Q_\lambda \varphi \\ &= 0 + [P,\psi]\, Q_\lambda \varphi \quad ; \end{aligned}$$

le symbole de ce dernier opérateur est d'ordre $\sim$

$$(3.14) \qquad |\xi|^{\ell-1} d_1(x_o)^{-1}(|\xi|^\ell + d(\lambda))^{-1} \leq c(\xi) \frac{1}{d(\lambda) d_1(x_o)} .$$

(3.14) est meilleur que (3.12); par exemple si $d(\lambda) = |\lambda|^{1-\delta/\ell}$, (3.12) est $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+2\delta/\ell} d_1(x_o)^{-1})$ et (3.14) est $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+\delta/\ell} d_1(x_o)^{-1})$. (La différence d'un $|\lambda|^{-\delta/\ell}$ est essentiel dans l'affaire d'estimation du reste!) Le résultat final est

<u>Théorème 3.3</u> : Soit $\ell > n$ et soit $M \in [0,\ell]$. Pour tout $\sigma > 0$ il existe une constante c_σ telle que

$$(3.15) \qquad |K(G_\lambda)(x,x)| \leq c_\sigma \frac{|\lambda|^{n/\ell}}{d(\lambda)} \left(\frac{|\lambda|^{1-1/\ell}}{d_1(x)^{1+\sigma} d(\lambda)}\right)^M ,$$

pour $x \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\lambda| \geq 1$.

Ici, le cas $M = 1$ peut être montré par utilisation de (3.13) comme grossièrement indiqué plus haut ; le cas $M = 0$ est facile ; et les cas M entier > 1 sont montrés par l'utilisation d'une famille de fonctions φ_j $(j = 2,\ldots,M-1)$ "entre" $\varphi_1 = \varphi$ et $\varphi_M = 1 - \psi$, et encore des commutateurs (cette technique est très clairement expliquée dans Beals [3, lemme 6]) ; finalement les cas M non entiers sont inclus par interpolation. La puissance $d_1(x)^{\sigma}$ vient du fait qu'on n'a pas une formule de Leibnitz <u>finie</u> dans le calcul de $[P,\varphi]$. (Notre démonstration du théorème donne, dans le cas des o.d., une formule (3.15) pour tout $M \geq 0$, et avec $\sigma = 0$, donc redémontre l'estimation d'Agmon pour la réalisation de Dirichlet.)

Finalement, (3.7) et (3.15) peuvent être utilisés, pour ℓ suffisamment large, dans une démonstration exactement comme celle d'Agmon [1, pp. 174-175], ce qui donne :

<u>Théorème 3.4</u> : Soit $\varepsilon \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$, soit $\sigma > 0$, et supposons que $\ell > \max\{\varepsilon^{-1}(2n+5), 2(n+1)(2n+5)\}$. Il existe une constante c telle que la fonction spectrale $e(t;x,y)$ de P_γ vérifie

$$|\operatorname{tr} e(t;x,x) - c_P(x)t^{n/\ell}| \leq c\, t^{(n-\frac{1}{2}+\varepsilon)/\ell}\, d_1(x)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon-\sigma}, \tag{3.16}$$

pour $t \geq 1$ et $x \in \Omega$.

Avec les manipulations indiquées plus haut, utilisant les propositions 2.1 et 2.2, nous avons enfin

<u>Théorème 3.5</u> : Soit P un o.ps.d. classique fortement elliptique et auto-adjoint dans $\tilde{E}$, ayant la propriété de transmission à Γ, et soit $(P+G)_T$ une réalisation auto-adjointe dans $L^2(E)$ (comme introduit plus haut). Alors les nombres $N^{\pm}(t;(P+G)_T)$ de valeurs propres positives, resp. négatives, dans $[-t,t]$ vérifient, pour tout $\delta < \frac{1}{2}$,

$$N^{+}(t;(P+G)_T) = c_P t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\delta)/\ell}) \quad \text{pour } t \to \infty ; \tag{3.17}$$

$$N^{-}(t;(P+G)_T) = O(t^{(n-1)/\ell}) \quad \text{pour } t \to \infty ; \tag{3.18}$$

où c_P est défini par (2.4).

Les résultats principaux ont été annoncés dans une note aux C. R. Acad. Sc. (t.287, pp. 1017-1020, novembre 1978) ; et les démonstrations plus détaillées ont été incluses dans le manuscrit [14], pour les actes du "Semester on Partial Differential Equations" qui s'est tenu en 1978 au Centre Banach, Varsovie.

§ 4. REMARQUES

Soulignons que les inégalités (3.15) sont indépendants du choix de V_δ (car ils sont valables pour $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\lambda|\geq 1$),et la démonstration marche pour les systèmes P généraux. Donc on pourra obtenir (3.16) avec $\frac{1}{2}-\varepsilon$ remplacé par un δ plus grand, aussitôt qu'on a la validité de (3.7) pour un tel δ.

Dans le cas différentiel, cela a été fait (pour tout $\delta < 1$) par Agmon [1] pour les systèmes où $a^o(x,D)$ est à coefficients constants, et par Robert [20] pour les opérateurs généraux scalaires . Ce dernier analyse le noyau de Q_λ dans V_δ avec $\delta < 1$, par une construction de paramétrix de $P-\lambda I$ faisant intervenir une fonction de phase adaptée (comme celle de Hörmander [16]), qui permet d'éviter certaines dérivations du symbole de Q_λ, donc est plus économique en $|\lambda|$. (Naturellement, un principe pareil est entendu dans [16]). Notons l'analogie avec la discussion de la démonstration du théorème 3.3 plus haut, où il était important de placer certaines commutations sur P (indépendant de λ) au lieu de Q_λ, afin d'éviter des dérivations coûteuses. En plus, on se sert dans le théorème 3.3 de la structure exacte des opérateurs .

Pour les o.ps.d. scalaires on doit pouvoir généraliser la construction de Robert [20], afin d'améliorer (3.16)-(3.18). Dans cette direction nous n'avons encore fait qu'une estimation un peu grossière, qui entraîne la validité de (3.17)-(3.18) pour tous $\delta < \frac{2}{3}$.

La méthode de Robert [20] pour les o.d. scalaires entraîne (1.1) avec $\delta < 1$, tandis que la méthode de Brüning [5] est fondée directement sur [16] et entraîne une meilleure estimation (1.5). Vue du fait que [16] traite déjà les o.ps.d., il est naturel de chercher une généralisation de [5]. Cependant, nous ne croyons pas là à un bon résultat, car Brüning utilise certaines estimations exponentielles de $K(Q_\lambda)(x,y)$ et $K(G_\lambda)(x,y)$ qui ne paraissent pas valables pour les o.ps.d. généraux (regarder par ex. les o.ps.d. à symbole rationnel étudiés dans [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : Asymptotic formulas with remainder estimates..., Arch. Rat. Mech. Anal. 28 (1968), 165-183.

[2] S. Agmon et Y. Kannai : On the asymptotic behavior of spectral functions...., Istrael J. Math. 5 (1967), 1-30.

[3] R. Beals : Asymptotic behavior of the Green's function..., J. Functional Analysis 5 (1970), 484-503.

[4] L. Boutet de Monvel : Boundary problems for pseudo-differential operators, Acta Math. 126 (1971), 11-51 .

[5] J. Brüning : Zur Abschätzung der Spektralfunktion elliptischer Operatoren, Math. Z. 137 (1974), 75-85.

[6] J. Chazarain : Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier 24 (1974), 173-202.

[7] G. Eskin : Asymptotics near the boundary of spectral functions..., Israel J. Math. 22 (1975), 214-246.

[8] K. Fan : Maximum properties and inequalities..., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 37 (1965), 760-766.

[9] G. Grubb : Properties of normal boundary problems..., Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (Ser. IV) (1974), 1-61. Voir aussi : Le spectre négatif..., C. R. Acad. Sc. 1972.

[10] G. Grubb : Spectral asymptotics for Douglis-Nirenberg elliptic systems and pseudo-differential boundary problems, Comm. P. D. E. 2 (1977), 1071-1150.

[11] G. Grubb : Sur les valeurs propres des problèmes aux limites pseudo-différentiels, C. R. Acad. Sc. 286 (1978), 199-201.

[12] G. Grubb : Sur la résolvante d'un problème aux limites pseudo-différentiel, Exposé XIV, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-78.

[13] G. Grubb : Remainder estimates for eigenvalues and kernels of pseudo-differential elliptic systems, à paraître dans Math. Scand.

[14] G. Grubb : On the spectral theory of pseudo-differential elliptic boundary problems, Preprint n°33 (December 1978), Copenhagen Univ. Math. Dept. Pour une publication du Centre Banach, Varsovie. Voir aussi : Estimation du reste... C. R. Acad. Sc. 287 (1978), 1017-1020.

[15] L. Hörmander : On the Riesz means of spectral functions..., Recent Advances 2, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University 1966, 155-202.

[16] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator, Acta Math. 121 (1968), 193-218.

[17] G. Métivier : Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 51-52 (1977), 125-219.

[18] V. Petkov : Propagation of singularities for pseudo-differential operators, Akad. der Wiss. DDR, Berlin 1977.

[19] Pham The Lai : Comportement asymptotique du noyau de la résolvante ..., Israel J. Math. 23 (1976), 221-250.

[20] D. Robert : Développement asymptotique du noyau résolvant d'opérateurs elliptiques, Osaka J. Math. 15 (1978), 233-243. Voir aussi Thèse, Nantes, 1977.

[21] R. Seeley : The resolvent of an elliptic boundary problem, Amer. J. Math. 91 (1969), 889-920.

[22] R. Seeley : A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$, Adv. Math. 29 (1978), 244-269.