G. MÉTIVIER

Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 12, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

UNE CLASSE D'OPERATEURS NON HYPOELLIPTIQUES ANALYTIQUES.

par G. METIVIER

Exposé n° XI   23 Janvier 1979

§ 1. INTRODUCTION

Le travail présenté ici se situe dans le cadre de l'étude de l'hypoellipticité analytique (en abrégé h.e.a) d'une famille bien précise d'opérateurs (en gros, les sous-elliptiques avec perte d'une dérivée) : on peut dire que cette famille est celle qui vient "juste après" les elliptiques et le problème de l'h.e.a. s'y pose de façon naturelle.

Avant de commencer véritablement l'exposé, il semble bon de préciser très exactement le vocabulaire :

Définition 1 : On dira dans tout cet exposé, qu'un opérateur P est h.e.a. au voisinage d'un point x_o, si et seulement si il existe un voisinage Ω de x_o tel que pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\text{Sing supp}\, u \subset \text{Sing supp}\, Pu$$

Sing supp désigne ici le support singulier analytique.

Cependant, en général, quand on contredit l'h.e.a. on établit une propriété un peu plus forte, et on aura :

Définition 2 : P est non h.e.a. en x_o, s'il existe une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sur un voisinage de x_o, telle que Pu soit analytique au voisinage de x_o, sans que u soit analytique en x_o .

Notons alors que P n'est pas h.e.a. au voisinage de x_o s'il existe une suite $x_n \to x_o$ telle que P ne soit pas h.e.a. en x_n, pour tout n.

Ces nuances n'ont pas grande importance, cependant pour la correction des énoncés il importe d'être précis.

L'idée qui est sous-jacente à ce travail, et qui est due à Trèves [6], est de relier l'h.e.a. de P et les propriétés symplectiques de la variété caractéristique Σ de P. En effet, selon [6], si P est sous-elliptique avec perte d'une dérivée et si son symbole principal p s'annule exactement à l'ordre 2 sur une variété symplectique, alors P est h.e.a. Le résultat de Tartakoff [5] va dans le même sens puisque l'une de ses hypothèses signifie précisément que Σ est symplectique. A l'inverse, pour les exemples classiques d'opérateurs non h.e.a. de la forme $D_t^2 + \mathcal{A}(x,D_x)$

(Baouendi-Goulaouic [1] voir [3] pour des généralisations), la variété caractéristique Σ , pour peu que ce soit une variété, est non symplectique. Toutefois il faut rester prudent et ne pas vouloir relier trop fortement l'h.e.a et le fait que Σ soit symplectique : en effet, que dire si Σ n'est pas symplectique en un point isolé ? Que dire de l'opérateur :

$$D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + x_1^2 D_y^2 + (D_{x_3} - x_2^2 D_y)^2 \qquad ?$$

Il semble donc que l'h.e.a se décide sur des critères plus fins que le simple fait que Σ soit ou ne soit pas symplectique. Notons à ce propos que la conjecture de non h.e.a que formule Trèves dans [6] (et qui est confortée par tous les résultats qui suivent) est en effet beaucoup plus précise.

§ 2. RESULTATS. EXEMPLES

Dans tout ce paragraphe P désigne un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients analytiques sur un voisinage de $x_o \in \mathbb{R}^n$, et dont le symbole principal p est ≥ 0.

Nous établissons le non h.e.a de P sous trois hypothèses :

(H.1) Il existe un voisinage Ω de x_o, $\varepsilon > 0$ et une constante C, tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on ait :

$$\|\varphi\|_{H^\varepsilon(\Omega)} \leq C\{\|P^*\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\} .$$

P^* désigne l'adjoint formel de P et H^ε l'espace de Sobolev usuel d'ordre ε.

La seule justification de cette hypothèse (en dehors de son caractère technique) est qu'elle est satisfaite dans les applications que l'on a en vue :

i) si P est sous-elliptique avec perte d'une dérivée (et alors P^* l'est aussi),

ii) si P est un opérateur de Hörmander de la forme $\Sigma X_i^2 + X_o$ les X_i étant des champs de vecteurs réels, satisfaisant la condition de Hörmander.

On note $\Sigma = p^{-1}(0) \subset T^*\Omega\backslash 0$, et on se fixe un point $\rho_o = (x_o, \xi_o) \in \Sigma$ (P est supposé non elliptique en x_o !). On note p_o le Hessien de p en ρ_o ; p_o est une forme quadratique positive sur $T_{\rho_o}(T^*\Omega\backslash 0)$

et on introduit de façon naturelle son noyau $\Sigma_o = \mathrm{Ker}\ p_o$. Enfin on note σ la 2-forme canonique de $T^*\Omega\backslash 0$ et σ_o la forme symplectique qu'elle définit sur $T_{\rho_o}(T^*\Omega\backslash 0)$.

On suppose alors que :

(H.2) Par ρ_o passe une variété analytique $V \subset \Sigma$, isotrope pour σ, transverse à la fibre et "maximale" i.e. $T_{\rho_o} V$ est un sous-espace totalement isotrope maximal de $(\Sigma_o, \sigma_o|_{\Sigma_o})$.

(H.3) La restriction de σ_o à Σ_o est dégénérée.

Remarque 1 : Sous les hypothèses (H2) et (H3), et si Σ est une variété analytique, alors Σ est non symplectique en tout point de V.

Exemple 1 : On verra par la suite ce que signifient (H2) et (H3) dans le cas "lisse", mais il importe de vérifier tout de suite que ces hypothèses sont satisfaites pour des opérateurs qu'il serait dommage de négliger et pour lesquels Σ n'est pas une variété ; par exemple pour

$$a.D_t^2 + bD_x^2 + c\, x^2 D_y^2 + d\, t^2 D_z^2$$

a, b, c, d étant des fonctions analytiques. Au voisinage de $\rho_o = (0,(0,0,1,0))$ Σ est la réunion de deux morceaux de variété, l'un symplectique, et l'autre pas.

Théorème 1 : Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), P est non h.e.a en x_o.

Exemple 2 : le cas lisse. On suppose ici que Σ est une variété analytique et que p s'annule exactement à l'ordre 2 sur Σ. On a alors $\Sigma_o = T_{\rho_o}\Sigma$ et on vérifie aisément :

Lemme 1 : (H2) est impliqué par la conjonction des deux conditions.

(H'2) le rang de $\sigma|_\Sigma$ est constant au voisinage de ρ_o

(H"2) le noyau de $\sigma|_\Sigma$ en ρ_o $T_{\rho_o}\Sigma \cap (T_{\rho_o}\Sigma)^{\perp(\sigma_o)}$ est transverse à l'espace tangent à la fibre en ρ_o.

L'hypothèse (H'2) étant génériquement satisfaite, on a alors dans le cas "lisse" le corollaire suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soit P vérifiant (H.1) ; on suppose que p s'annule exactement à l'ordre 2 sur la variété Σ, et on suppose que Σ est non symplectique sur un voisinage de ρ_o et que $T_{\rho_o}\Sigma \cap (T_{\rho_o}\Sigma)^{\perp(\sigma)}$ est transverse à la fibre. Alors P n'est pas h.e.a au voisinage de x_o.

<u>Remarque 2</u> : L'hypothèse de transversalité est là en particulier pour éliminer les opérateurs du type :

$$D_x^2 + (x^2 + y^2)\, D_y^2$$

Ce théorème 2 situe nos résultats par rapport à Trèves [6] ; il est intéressant aussi de comparer à Tartakoff [5] :

<u>Exemple 3</u> : Considérons un opérateur P du type :

$$P = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + X_o + c$$

les X_i étant des champs de vecteurs réels analytiques, et supposons que les $X_i(x)$ $(i = 1,\dots,N)$ sont indépendants sur un voisinage de x_o ; on est alors dans la situation où Σ est une variété analytique, où p s'annule à l'ordre 2 sur Σ et en outre l'hypothèse (H"2) de transversalité est toujours satisfaite.

Dans [ ], les X_i sont au nombre de $N = n-1$, et T étant un champ transverse aux X_i $(i = 1,\dots,n-1)$, Tartakoff considère la matrice antisymétrique $c_{ij}(x)$ définie par :

$$[X_i,X_j](x) = c_{ij}(x)\, T(x)\ (\mathrm{mod}\, X_i(x)) \quad 1 \le i,j \le n-1$$

et un cas particulier des résulatts de [5] est que P est h.e.a dès que la matrice $[c_{ij}(x_o)]$ est non dégénérée.

P satisfaisant (H.1), le théorème 2 implique que P n'est pas h.e.a au voisinage de x_o, dès que la matrice $[c_{ij}(x)]$ est dégénérée sur tout un voisinage de x_o.

<u>Exemple 4</u> : <u>Coordonnées adaptées</u> : Il nous faut introduire ici quelques notations : on notera z la variable générique de $\mathbb{R}^n$, et on écrira $z = (t,x,y,z')$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$, $z' \in \mathbb{R}^\ell$ avec bien sûr

$n = m + \ell + 2$. On considère aussi un certain nombre de champs de vecteurs :

$$X_o = D_t \; ; \; X_j = D_{x_j} \quad \text{pour } j = 1,\dots,m \; ;$$
$$X_{p+j} = x_j D_y \quad \text{pour } j = 1,\dots,m$$
$$X_{2p+j} = D_{z'_j} \quad \text{pour } j = 1,\dots,\ell \; ,$$

et on considère au voisinage de 0 un opérateur de la forme :

$$(*) \qquad P = \sum_{\substack{0 \le i \le 2m+\ell \\ 0 \le j \le 2m+\ell}} a_{ij}(z)\, X_i X_j + P^1(z, D_z)$$

les a_{ij} étant des fonctions analytiques, et P^1 étant un opérateur d'ordre 1, à coefficients analytiques.

Quitte à modifier P^1, on peut supposer que $a_{ij} = a_{ji}$. On considère alors l'hypothèse suivante :

(H.4) La matrice $(a_{ij}(0))_{\substack{o \le i \le 2m \\ o \le j \le 2m}}$ est réelle et définie positive.

Il est alors intéressant de noter :

<u>Lemme 2</u> : P satisfait les hypothèses (H2) et (H3) si et seulement si il existe des coordonnées telles que P s'écrive sous la forme (*), (H.4) étant satisfaite, et p étant positif.

Le théorème 1 résulte alors en fait du :

<u>Théorème 3</u> : Soit P l'opérateur (*) ; on suppose que (H.1) et (H.4) sont satisfaites ; alors P n'est pas h.e.a en 0.

Nous esquissons au paragraphe IV une démonstration de ce théorème mais auparavant nous devons expliciter le premier point qui est fondamental : traduire l'h.e.a en inégalités.

§ . C. N et S D'HYPOELLIPTICITE ANALYTIQUE POUR P VERIFIANT (H.1)

Dans ce paragraphe on suppose seulement que P est un opérateur différentiel, sans restriction sur l'ordre, et sans supposer que p doive rester réel positif (une extension aux pseudodifférentiels ne pose aucune difficulté majeure).

On suppose cependant que P vérifie (H.1) ; on a alors

Théorème 4 : Sous l'hypothèse (H1), P est h.e.a au voisinage de x_o si et seulement si il existe un voisinage Ω de x_o, tel que pour tous $\omega' \subset\subset \omega \subset \Omega$ il existe des constantes C et L telles que quel que soit l'entier k :

i) $\{u \in \mathcal{D}'(\omega),\ Pu \in H^k(\omega)\} \Rightarrow u \in H^k(\omega')$ et

ii) $\|u\|_{H^k(\omega')} \leq C L^k \{|||Pu|||_{H^k(\omega)} + k!\,\|u\|_{L^2(\omega)}\}$

On écrit $u \in H^k(\omega')$ pour dire bien sûr que $u|_{\omega'} \in H^k(\omega')$. D'autre part on a muni les espaces de Sobolev H^k des normes

$$|||f|||_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} k^{k-|\alpha|} \|D^\alpha f\|_{L^2} .$$

Remarque 3 : Il existe une version similaire du même type pour P h.e.a en x_o : il suffit de changer la quantification en : il existe $\omega \supset\supset \omega' \ni x_o$ et des constantes...

Remarque 4 : On déduit du théorème un corollaire du type : si P vérifie (H.1) et est h.e.a , alors P est hypoelliptique C^∞, et hypoelliptique Gevrey d'ordre s, pour tout s.

De façon plus générale si P vérifie (H.1) et est hypoelliptique Gevrey d'ordre s, on a un un résultat semblable en remplaçant dans ii) k! par $(k!)^s$.

Indications pour la démonstration : L'hypothèse (H.1) nous sert uniquement à dire que quitte à restreindre Ω, P possède un inverse à droite R continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

R opère de L^2 dans L^2, de l'analytique dans l'analytique par hypothèse, et donc utilisant les foncteurs d'interpolation de Goulaouic [2] R opère de H^k_{loc} dans H^k_{loc} ; un contrôle précis des constantes donne l'estimation ii) avec RPu à la place de u. On obtient ii) en disant que $u - RPu \in \operatorname{Ker} P$ et en utilisant à nouveau l'h.e.a de P.

<u>Remarque 5</u> : L'idée d'interpolation a déjà été utilisée dans [3] ; Ici dans la démonstration effective du théorème, on a été amené à réécrire les foncteurs d'interpolation (en utilisant la transformation de Fourier) essentiellement pour contrôler leur norme dans les espaces de Sobolev. Noter aussi que cette démonstration permet d'obtenir des résultats micro-locaux.

<u>Remarque 6</u> : L'avantage des inégalités ii) par apport aux inégalités dans le complexe (cf. Oleinik [4]) est qu'elles ne font intervenir (chacune) qu'un nombre fini de dérivations et leur maniabilité semble beaucoup plus grande, comme on va le voir maintenant.

<u>Application</u> : Supposons que l'on ait construit une famille de fonctions u_ρ vérifiant des estimations du type :

$$\|Pu_\rho\|_{H^k(\omega)} \leq C_1 \rho^{2k} L^k e^{-\varepsilon\rho} \qquad \text{pour } k \leq \sigma\rho$$

$$|D_y^k u_\rho(x_o)| \geq C_2 \rho^{2(k-k_o)} \qquad \text{pour } k \leq \sigma\rho$$

$$\|u_\rho\|_{L^2(\omega)} \leq C_3 e^{\lambda\rho}$$

(C_1, C_2, C_3, k_o, L, σ, ε, λ étant des constantes, D_y étant une dérivation).

Alors P n'est pas h.e.a au voisinage de x_o (ni en x_o) .

En effet, si l'on avait les inégalités ii), on aurait des inégalités du type :

$$\rho^{2(k-k_1)} \leq C L^k \rho^{2k} e^{-\varepsilon\rho} + k'.C\ L^k e^{\lambda\rho} \qquad \text{pour } k \leq \sigma\rho\ .$$

Choisissant $k = [\sigma'\rho]$ pour $\sigma' < \sigma$, et faisant tendre ρ vers $+\infty$ on a :

$$k!L^k e^{\lambda\rho} . \rho^{-2(k-k_1)} \mapsto 0$$

et

$$L^k e^{-\varepsilon\rho} \rho^{2k_1} \qquad \to 0 \quad \text{si } \sigma' \text{ est assez petit .}$$

On aboutit donc à une contradiction, prouvant la non-h.e.a de P, au $\mathcal{V}(x_o)$ et aussi la non-h.e.a en x_o, avec la remarque 3.

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Nous allons esquisser la démonstration dans le cas où P est de la forme :

$$(**) \qquad P(z,D_z) = a(z)D_t^2 + b(z)D_x^2 + C(z)x^2D_y^2 + P^2(z,D_{z'}) + P^1(z,D_z)$$

où $z = (t,x,y,z') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-3}$, P^2 est un opérateur d'ordre 2 (dans les seules dérivations $D_{z'}$) et P^1 est d'ordre 1 (dans toutes les dérivations).

On cherche une solution (approchée) de $Pu = 0$ sous la forme

$$(***) \qquad u(z) = u(t,x,y,z') = e^{i\rho^2 y}U(z,\rho t,\rho x)$$

U étant une fonction de $(z,\bar{t},\bar{x})$ définie sur $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ecrivant $(Pu)(z) = \rho^2 e^{i\rho^2 y}(\mathcal{P}_\rho U^\cdot)(z,\rho t,\rho x)$, on trouve

$$\mathcal{P}_\rho = \mathcal{P}^o + \frac{1}{\rho}\mathcal{P}_2 + \frac{1}{\rho^2}\mathcal{P}_3$$

avec

$$\mathcal{P}^o = a(z)D_{\bar{t}}^2 + b(z)D_{\bar{x}}^2 + c(z)\bar{x}^2 + \lambda(z)$$

$$\mathcal{P}_2 = 2a(z)D_{\bar{t}}D_t + b(z)D_{\bar{x}}D_x + c(z)\bar{x}\,x\,D_y + P^1(z;(D_{\bar{t}}\,,\,D_{\bar{x}},0,0))$$

$$\mathcal{P}_3 = P(z,D_z)\ .$$

($\lambda(2)$ est le coefficient de D_y dans P^1) . Figeant dans $\mathcal{P}^o$ les coefficients en 0, on écrit

$$\mathcal{P}^o = \mathcal{P}_o + \mathcal{P}_1$$

avec

$$\mathcal{P}_o = a(0)\,D_{\bar{t}}^2 + b(0)D_{\bar{x}}^2 + c(0)\bar{x}^2 + \lambda(0)$$

Finalement, on a décomposé $\mathcal{P}_\rho$ en

$$\mathcal{P}_\rho = \mathcal{P}_o + \mathcal{P}'_\rho$$

On construit une solution de $\mathcal{P}_\rho U \sim 0$ en partant de $\mathcal{P}_o U_o = 0$ et en résolvant ensuite les équations de transport $\mathcal{P}_o U_k = -\mathcal{P}'_\rho U_{k-1}$.

On part donc d'une fonction U_o de la forme :

$$U_o(z,\bar{t},\bar{x}) = e^{\delta_o \bar{t}}\, e^{-\sigma_o \bar{x}^2/2} ,$$

où $\sigma_o = \left(\frac{c(0)}{b(0)}\right)^{1/2} > 0$, $\delta_o^2 = \lambda(0) + \sigma_o$ $(\delta_o \in \mathbb{C})$.

Le point suivant est de résoudre l'équation de transport $\mathcal{P}_o U = F$. La forme de U_o montre qu'il faut considérer des espaces fonctionnels contenant des fonctions à croissance exponentielle. On fixe $\delta > |\mathrm{Re}\,\delta_o|$, δ différent de tous les nombres $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda(0) + (2\nu+1)\sigma_o}$ $(\nu \in \mathbb{N})$, et on a :

<u>Lemme 3</u> : si $e^{-\delta|\bar{t}|}F \in L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe U solution de $\mathcal{P}_o U = F$ telle que $e^{-\delta|\bar{t}|} T U \in L^2(\mathbb{R}^2)$ où T est l'un des opérateurs :

$$1, D_{\bar{x}}, \bar{x}, D_{\bar{x}}^2, \bar{x}^2, \bar{x}D_{\bar{x}}, D_{\bar{x}}\bar{x}, D_{\bar{t}}, D_{\bar{t}}^2 .$$

<u>Indication</u> : On développe suivant les polynômes de Hermite dans $L^2(\mathbb{R}_x)$ et on est ramené à intégrer des équations différentielles :

$$(****) \qquad (D_t^2 + \mu)u = f$$

dans des espaces à poids exponentiel $e^{\delta|\bar{t}|}$.

Si $\delta < \mathrm{Re}\sqrt{\mu}$, le noyau de (****) étant à décroissance exponentielle en $e^{-\sqrt{\mu}t}$, opère par convolution dans les espaces à poids considérés : on a une résolution "de type elliptique".

Si $\delta > \mathrm{Re}\sqrt{\mu}$, on résoud (****) comme un problème de Cauchy en $t = 0$, et on vérifie que la solution est encore dans l'espace désiré.

<u>Remarque 7</u> : Cette résolution de l'équation $\mathcal{P}_o U = F$ mélange les méthodes "problèmes aux limites" et "problèmes de Cauchy". La résolution par problème de Cauchy est naturelle puisque c'est ainsi qu'on opère pour les opérateurs $D_t^2 + \mathcal{A}(x, D_x)$, (et c'est ainsi qu'on peut déterminer U_o). D'autre part, si on se limitait à cette résolution on ferait apparaître par la

suite des solutions à croissance exponentielle de plus en plus grande ce qui nous empecherait de conclure.

En fait on a besoin d'estimations plus précises sur la solution U de $\mathcal{P}_o U = F$; connaissant des majorations de $D_{\bar{t}}^{j} F$ et $D_{\bar{x}}^{\ell} F$, il nous faut aussi les mêmes estimations sur $D_{\bar{t}}^{\delta} U$ et $D_{\bar{x}}^{\ell} U$; on ne détaille pas ici les calculs. Enonçons seulement le résultat :

<u>Proposition</u> : Il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et une suite de fonctions U_k analytiques sur $\Omega \times \mathbb{R}^2$, vérifiant :

$$\mathcal{P}_o U_k = -\mathcal{P}'_\rho U_{k-1} = F_{k-1}$$

De plus, il existe des constantes δ, s_o, C_o, C_1, L telles que pour tout $s < s_o$, tout entier k, tout $\rho \geq 1$, tout $z \in \Omega$ et tout $(F, \bar{x}) \in \mathbb{R}^2$ on ait :

$$|D_{\bar{t}}^{j} D_{\bar{x}}^{\ell} D_z^{\alpha} U_k(z, \bar{t}, \bar{x})| \leq C_o e^{\delta|\bar{t}|} |\alpha|! \sqrt{\ell !}\, L^{|\alpha|+\ell+j} . s^{-|\alpha|} .$$

$$\times \{C_1(s + |z| + \frac{k}{\rho^s} + \frac{k^2}{\rho^2 s^2})\}^k$$

et les mêmes estimations pour F_k .

Les différentes factorielles et exponentielles de α, ℓ, j expriment la norme de U_k dans un espace de Banach de fonctions analytiques ; le point important est de voir que si s est assez petit, $|z|$ petit et ρ assez grand devant k on a

$$\|U_k\| \leq C_o \varepsilon^k \qquad (\varepsilon < 1)$$

et

$$\|F_k\| \leq C_o \varepsilon^k$$

"Redescendant", on définit u_k à partir de U_k par la formule (***), et, σ étant un paramètre à définir, on pose :

$$u_\rho(z) = \sum_{k \leq \sigma\rho} u_k(z)$$

Notant f_k la fonction déduite de F_k par la formule (***), on remarque alors que :

$$Pu_\rho = f_{k_o}$$

l'indice k_o étant le dernier à intervenir dans la somme qui définit u_ρ ; on tire alors des estimations de la proposition, après un bon choix des paramètres, des estimations du type :

$$\|Pu_\rho\| \leq C_o \; e^{-\varepsilon'\rho}$$

qui sont primordiales pour l'application du théorème 4, comme on l'a mentionné au paragraphe précédent.

En fait, on vérifie précisément les inégalités que l'on a écrites au paragraphe 3, et on conclut à la non h.e.a de P.

<u>Remarque 8</u> : Tout opérateur (*) ne peut pas en général se mettre sous la forme (**) par un simple changement de variables. La technique habituelle est d'utiliser les transformations canoniques ; on a évité (ou résolu) cette difficulté en utilisant ici une méthode d'addition de variables : en ajoutant p variables dans l'opérateur (*) (transformant $x_j D_y$ en $D_{x'_j} + x_j D_y$ et par un changement de toutes les variables on se ramène à un opérateur $\tilde{P}$ de la forme (**) ; on fait alors la construction dans U_k pour P, en vérifiant en fait des majorations plus précises que celles écrites ici et qui nous permettent ensuite d'intégrer suivant les variables ajoutées.

Les démonstrations des résultats annoncés ici, seront publiées ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Non analytic hypoellipticity for some degenerate operators ; Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972).

[2] C. Goulaouic : Prolongement de foncteurs d'interpolation et application ; Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), p.1-98.

[3] G. Métivier : Propriétés des itérés et ellipticité; Comm. in Partial Differential Equations ; 3, (1978), p.827-876.

[4] O. A. Oleinik : On the analyticity of solutions of partial differential equations ; Astérisque, 2-3, (1973), p.272-285.

[5] D. S. Tartakoff : The analytic hypoellipticity of $\Box_b$...,

[6] F. Trèves : Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators...; Comm. in Partial Differential Equations, 3, (1978), p.475-642.
