SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. VAILLANT

Systèmes hyperboliques à multiplicité constante

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 11, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

SYSTEMES HYPERBOLIQUES A MULTIPLICITE CONSTANTE

par J. VAILLANT

Exposé n° XI

23 Janvier 1979

INTRODUCTION

Cet exposé résume un article à paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, écrit en collaboration avec R. Berzin (cf. aussi la note [5]).

L'objet de cet article est de donner des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'hyperbolicité pour les systèmes, lorsque la multiplicité des caractéristiques est constante ; dans cet exposé la notion d'hyperbolicité est, en bref, la suivante : un opérateur est hyperbolique, lorsque le problème de Cauchy est bien posé en $\mathcal{C}^\infty$. En ce qui concerne les conditions suffisantes nous avons utilisé la technique des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander et Duistermaat (1972) sous la forme utilisée par Chazarain (1974) ; en ce qui concerne les conditions nécessaires celles des développements asymptotiques de Strang et Flaschka (1969, 1971), Ivrii et Petkov (1973, 1974). Nous nous sommes souciés particulièrement d'obtenir ces conditions par des procédés de calcul qui puissent se généraliser et pour des systèmes d'ordre non nécessairement égal à 1 et c'est là qu'est essentiellement notre contribution.

Les systèmes présentent de nombreuses difficultés de calcul; de plus si les coefficients sont C^∞, la non-intégrité de l'anneau des fonctions C^∞, et les variations de rang de la matrice caractéristique sont parmi les causes de la difficulté à obtenir des conditions à la fois nécessaires et suffisantes. Nous donnons une condition suffisante simple d'hyperbolicité (D), elle exprime en bref que l'opérateur matriciel h composé avec un opérateur a dont la matrice caractéristique est celle des cofacteurs A de la partie principale H de h se décompose bien. Elle rejoint ainsi les définitions du cas scalaire et du cas des coefficients constants.

Pour les raisons invoquées précédemment la démonstration des conditions nécessaires sera plus facile si nous transformons la condition (D) précédente : elle entraîne des conditions algébriques polynomiales, ne dépendant que de h, exprimant que l'on peut trouver dans une carte locale les parties homogènes de a et les opérateurs du second membre de la condition (D). Nous vérifions directement dans les cas de caractéristiques de multiplicité ≤ 3 que les conditions algébriques obtenues sont intrinsèques et sont bien nécessaires ; nous montrons aussi directement que ces conditions de Lévi sont suffisantes. La distinction des divers cas nécessite des hypothèses supplémentaires de "constance du rang" qui sont commodes à exprimer pour les systèmes d'ordre t en utilisant des anneaux locaux naturels. La technique de calcul est celle utilisée par Vaillant pour les opérateurs à coefficients constants (1964), à caractéristiques doubles (1968) et les opérateurs fortement hyperboliques (1971) puis par Berzin (1972) (1975) pour certains des cas envisagés dans ce mémoire.

Les conditions algébriques que nous obtenons systématiquement coïncident avec les conditions sur les systèmes d'ordre 1 de Petkov (1973) (1975) qui expriment la possibilité d'obtenir la paramétrix et de Demay (1974). Elles nous conduisent à la construction d'invariants polynomiaux d'un emploi plus agréable que les expressions des conditions de Lévi précédemment introduites.

Nous citerons en outre particulièrement les auteurs dont les travaux nous ont été utiles. A. Lax (1956), Leray et Ohya (1964), Mme Choquet (1966) Mizohata, Ohya et Ohya (1968, 1972), Chaillou (1969), De Paris (1972) Gourdin (1976), Kajitani, preprint (1977).

§ 1. GENERALITES

X' est une variété réelle compacte C^∞ de dimension n ; on note : $x' = (x^1, x^2, \dots x^n)$ un point de X'. T^+ est un réel strictement positif et $X = [0, T^+] \times X'$; on note $x = (x^0, x') = (x^0, x^1, \dots, x^\alpha, \dots, x^n)$ un point de X. Un point de l'espace cotangent $T^*(X)$ est noté : (x, ξ), avec : $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_n)$. On posera :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} = \partial^\alpha .$$

$h = (h^A_B)$ est un opérateur différentiel matriciel à m lignes, m colonnes : $1 \leq A, B \leq m$, linéaire, de classe C^∞ sur X ; son ordre est : $t \geq 1$; $H^A_B(x, \xi)$ est le symbole principal de h^A_B si celui-ci est d'ordre t, et 0 sinon ; si $H = (H^A_B)$ on suppose que le déterminant de H est réel et n'est jamais identiquement nul. Dans une carte locale, h s'écrit :

$$h(x, \partial) = H(x, \partial) + H^*(x, \partial) + H^{**}(x, \partial) + \dots ,$$

$H^*(x, \xi)$ est homogène en ξ, d'ordre t-1 ; $H^{**}(x, \xi)$ est homogène en ξ d'ordre t - 2.

On suppose que $\det H$ se factorise sous la forme :

$$\det H = (H')^{\nu} H_1 \ldots H_s \ldots H_{\sigma} = (H')^{\nu} H''$$

ν est entier strictement positif ; H', $H_1, \ldots, H_{\sigma}$ sont $\mathcal{C}^{\infty}$ en x, polynômiaux en ξ tels que :

a) le degré de H' est constant, soit τ_o ; le degré de chaque H_s est constant soit τ_s.

b) $H'H''$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction $N = (1,0)$, c'est à dire que pour tout (x,ξ'), $\xi' \neq 0$, l'équation en ξ_o : $H'H''(x,\xi_o,\xi') = 0$ admet $\left(\sum_{s=o}^{s=\sigma} \tau_s\right)$ racines distinctes réelles.

A désigne la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de H de sorte que :

$$HA = AH = \det H \, I,$$

I matrice unité d'ordre m.

<u>Définition 1</u> : Le problème de Cauchy pour h est bien posé dans X si et seulement si :

a) pour tout T, $0 \leq T < T^+$, pour toute fonction (vectorielle) $f \in C^{\infty}(X)$, pour tout $g_{\tau} \in C^{\infty}(\{T\} \times X')$, $0 \leq \tau \leq t-1$, il existe $u \in C^{\infty}(X)$ telle que :

$$hu = f \quad \text{et} \quad (\partial_o)^{\tau} u|_{x^o = T} = g_{\tau} .$$

b) pour tous T, T', $0 \leq T < T' \leq T^+$, pour toute distribution $u \in D'(X)$, on a l'implication :

si $hu = 0$ dans $X^-_{T'}$ et $\operatorname{supp} u \subset \bar{X}^+_T$ où :

$X^+_T = X \cap \{x^o > T\}$ et $X^-_{T'} = X \cap \{x^o < T'\}$, alors $u = 0$ dans $X^-_{T'}$.

§ 2. <u>DEFINITION 2</u> : h vérifie la condition (D) si et seulement si :

a) il existe un opérateur différentiel linéaire matriciel a de symbole principal A, il existe des opérateurs différentiels linéaires h' et h'' de symboles principaux H' et H'', et des opérateurs différentiels linéaires matriciels $\ell_1, \ldots, \ell_{\nu}$ tels que :

$$h \circ a = h''(h')^{\nu} I + \ell_1 (h')^{\nu-1} + \ldots + \ell_r (h')^{\nu-r} + \ldots + \ell_{\nu}$$

et pour tout $r \geq 0$:

$$\text{ordre}\,[h\circ a - h''(h')^{\nu}I - \dots - \ell_r(h')^{\nu-r}] < mt - r$$

(avec $\ell_o \equiv h''I$).

b) il existe de même a' de symbole principal A tel que $a'\circ h$ admette une décomposition du type précédent .

<u>Théorème 1</u> : Si h vérifie la condition (D) le problème de Cauchy est bien posé dans X.

La démonstration consiste essentiellement en la construction d'une paramétrix pour h et son adjoint [3] [4] .

<u>Remarques</u> :

1) La condition (D) s'exprime aisément sous la forme donnée par Strang dans le cas scalaire ; en bref, si φ vérifie : $H'(x,\text{grad}\,\varphi(x)) = 0$, et si $Y \in C_o^{\infty}(X)$ et est vectoriel :

$$e^{-i\omega\varphi(x)}\, h\circ a(e^{i\omega\varphi}Y)(x) = O(\omega^{mt-\nu}), \text{ si } \omega \to \infty \;.$$

2) On peut la généraliser au cas d'un opérateur muni d'ordres de Leray-Volevic, à l'aide de la matrice caractéristique associée .

3) On peut la généraliser en prenant pour a et a' des opérateurs différentiels en x^o et pseudo-différentiels en x' dont les symboles sont dans chaque carte développables en symboles homogènes.

4) On peut imposer aux opérateurs ℓ_r d'être "scalaires" , $h\circ a$ étant alors diagonal .

On suppose dans toute la suite que, pour tout x, H' est un polynôme irréductible.

§ 3. <u>SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES</u>

Pour chaque x, il sera commode alors de considérer l'anneau localisé Φ de celui des polynômes par rapport à l'idéal engendré par H', c'est-à-dire l'anneau principal des fractions rationnelles dont le dénominateur n'est pas divisible par H' [26]. On rappelle que ses idéaux sont engendrés par les puissances de H'.

Définition 3 : h vérifie la condition (H.F) si et seulement si : pour tout x, la matrice H(x,ξ) est équivalente dans Φ à une matrice dont tous les facteurs invariants sont engendrés par H' :

$$H \sim \begin{bmatrix} H' & & & & & & & \\ & H' & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & H' & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\b\\c\\d \end{matrix}}\right\} \nu$$

Remarque : Il résulte de [28], pages 30 et 31, que, pour tout x, tout $\xi' \neq 0$ et toute racine caractéristique $\xi_o^\rho(x,\xi')$ de H', la matrice H est équivalente, dans l'anneau localisé de celui des polynômes à une variable ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi_o^\rho$, à une matrice dont tous les facteurs invariants sont engendrés par $\xi_o - \xi_o^\rho$.

On retrouve alors facilement l'équivalence de la condition (HF) dans le cas d'un système d'ordre 1 $(t = 1)$ avec celles de diagonalisation utilisées par exemple par Petkov [24] et Demay [10].

Théorème 2 : Si h vérifie la condition (HF), le problème de Cauchy pour h et X est bien posé quels que soient les termes non principaux de h.

La démonstration est facile car si h vérifie (HF), elle vérifie (D).

Exemple : $H(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_o & 0 & 0 \\ 0 & \xi_o & 0 \\ 0 & 0 & \xi_o \end{pmatrix}$, $H^*(x)$ quelconque $\mathcal{C}^\infty$.

§ IV SYSTEMES A CARACTERISTIQUES DOUBLES NON FORTEMENT HYPERBOLIQUES

Définition 4 : h vérifie la condition (DO) si et seulement si :

4a) Pour tout x, dans l'anneau localisé Φ :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

4b) Il existe donc pour chaque x au moins un cofacteur A^B_A non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun non nul avec H' ; on convient que ce soit A^1_1 .

Remarque : Alors pour tout x et toute racine caractéristique $\xi^\rho_o(x,\xi')$ de H', H est équivalente dans l'anneau localisé des polynômes en ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi^\rho_o$ à la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\xi_o - \xi^\rho_o]^2 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et nos conditions impliquent celles de Petkov et Demay pour t = 1. Une partition de l'unité permettrait facilement d'affaiblir l'hypothèse 4b) en ce qui concerne le choix du cofacteur A^1_1 indépendamment de x et $\xi^\rho_o(x,\xi')$; nous l'avons fait dans le seul but d'économiser les notations et une fois cet affaiblissement fait, nos hypothèses pour t = 1 coïncideraient avec celles de [24] et [10] ; nous ne répéterons pas cette remarque dans les autres cas .

Proposition 1 : Si h vérifie (D) on a dans une carte quelconque la relation :

(1) $\quad A[\sum_{\alpha=o}^{\alpha=n} \partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A - IH'' \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H']$ est divisible par H'.

Remarque : Une hypothèse de décomposition dans les conditions des remarques du paragraphe 2 (Remarque 3, 4) conduirait à la même relation.

Nous donnerons maintenant d'autres formulations de la relation (1) à l'aide du sous-caractéristique et de crochets construits à partir de la matrice caractéristique. On notera ρ une mesure positive sur X, on pourrait aussi bien faire agir les opérateurs sur les densités d'ordre $\frac{1}{2}$). On notera $U \equiv V$ la relation :

U-V est divisible par H' (dans l'anneau des polynômes en ξ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ en x).

<u>Lemme 1</u> : Les matrices :

$$C = \sum_\alpha (\partial^\alpha H \cdot \partial_\alpha A - \partial_\alpha H \cdot \partial^\alpha A)$$

et

$$D = \sum_\alpha (\partial^\alpha A \cdot \partial_\alpha H - \partial_\alpha A \cdot \partial^\alpha H)$$

sont des fonctions sur $T^*(X)$ et définissent ainsi des invariants ; on a

$$A.C \equiv D.A \quad .$$

<u>Lemme 2</u> : La matrice $K = H^* - \frac{1}{2\rho} \sum_\alpha \frac{\partial^2(\rho H)}{\partial x^\alpha \partial \xi_\alpha} = H^* - \frac{1}{2\rho} \sum \partial^\alpha_\alpha(\rho H)$

est l'invariant matrice sous-caractéristique ; c'est la matrice des symboles d'ordre t-1 des demi-différences des h^A_B et de leurs opérateurs adjoints formels .

<u>Conséquence</u> : Les matrices :

$$R = K \cdot A + \frac{1}{2} C \ , \quad S = A \cdot K + \frac{1}{2} D$$

définissent des invariants et $A \cdot R \equiv S \cdot A$.

On posera :

$$L = A \cdot R \equiv S \cdot A \ .$$

<u>Lemme 3</u> :

$$L \equiv A \cdot [\sum_\alpha \partial^\alpha H . \partial_\alpha A + H^* . A - H'' \cdot \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I]$$

$$\equiv [\sum_\alpha \partial^\alpha A . \partial_\alpha H + A . H^* - H'' \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I] \cdot A \ .$$

(modulo H').

Lemme 4 : L divisible par H' $\Leftrightarrow$ L_1^1 divisible par H' .

Lemme 5 : L'invariant $L(\hat{h})$ relatif à l'adjoint de h est l'opposé de la transposée de L(h) .

Définition 5 : h vérifie la condition (L) si et seulement si $L^{\bullet}$ est divisible par H'.

Conséquence : Si h vérifie (D) , h vérifie (L) .

Théorème 3 : Si h vérifie (DO), une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé est que h vérifie (L).

La condition suffisante résulte de la construction d'une paramétrix pour h, ainsi que pour son adjoint. Les symboles du développement asymptotique considéré se calculent par intégration d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 le long des bicaractéristiques. La condition nécessaire s'obtient par une méthode de développements asymptotiques du type de [16].

Ex :

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_0 \\ \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} \quad , \qquad H^*(x) = \begin{pmatrix} H^{*1}_{\ 1} & H^{*1}_{\ 2} \\ H^{*2}_{\ 1} & H^{*2}_{\ 2} \end{pmatrix} (x)$$

Il faut, pour que L soit vérifiée, que $H^{*1}_{\ 1}(x) \equiv 0$.

§ 5. SYSTEMES A CARACTERISTIQUES TRIPLES. PREMIER CAS

Définition 6 : h vérifie la condition (TR 1) si et seulement si :

6a) Pour tout x, dans l'anneau localisé Φ :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^2 & & & & & \\ & H' & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

A est donc divisible par H' ; on pose $\frac{A}{H'} = B$.

6b) Il existe donc au moins un cofacteur d'ordre $m-2$ non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un, tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun non nul avec H' ; on convient que ce soit A_{12}^{12} .

Il existe au moins un élément de B non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun avec H' ; on convient que ce soit B_1^1, ce qui est possible, d'après l'identité de Jacobi.

<u>Remarque</u> : Alors pour tout x et toute racine caractéristique $\xi_0^\rho(x,\xi')$ de H', H est équivalente dans l'anneau localisé de celui des polynômes en ξ_0 par rapport à l'idéal $\xi_0 - \xi_0^\rho$ à la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\xi_0-\xi_0^\rho]^2 & & & & & 0 \\ & \xi_0-\xi_0^\rho & & & & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et nos conditions impliquent les conditions, à l'aide de la forme de Jordan, pour $t=1$ utilisées par Petkov.

<u>Proposition 2</u> : Si h vérifie (D) et TR1a) on a dans une carte quelconque les relations :

$$"B[\sum_\alpha \partial^\alpha H\partial_\alpha B + H^*B - H''\sum_\alpha \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I] \text{ est divisible par } H'(x,\xi)"$$

et

$$"\frac{[\sum_\alpha \partial^\alpha B\partial_\alpha H + BH^* - H''\sum_\alpha \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I]B[\sum_\alpha \partial^\alpha H\partial_\alpha B + H^*B - H''\sum_\alpha \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I]}{H'}$$

est divisible par H'".

<u>Lemme 7</u> : Les matrices :

$$\overset{\circ}{C} = \sum_{\alpha} (\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \partial_{\alpha}H\partial^{\alpha}B)$$

et

$$\overset{\circ}{D} = \sum_{\alpha}(\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H - \partial_{\alpha}B\partial^{\alpha}H)$$

définissent des invariants ; on a : $B\overset{\circ}{C} \equiv \overset{\circ}{D}B$.

<u>Conséquence</u> : On posera :

$$\overset{\circ}{R} = KB + \frac{1}{2}\overset{\circ}{C}$$

$$\overset{\circ}{S} = BK + \frac{1}{2}\overset{\circ}{D}$$

Ces matrices invariantes sont telles que :

$$B\overset{\circ}{R} \equiv \overset{\circ}{S}B .$$

<u>Lemme 8</u> : On posera :

$$\overset{\circ}{L} = B\overset{\circ}{R} \quad , \quad \overset{\circ}{L}' = \overset{\circ}{S}B .$$

On a :

$$\overset{\circ}{L} \equiv \overset{\circ}{L}' \equiv B[\sum_{\alpha} \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B + H^{*}B - H''\sum_{\alpha} \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I] \equiv [\sum_{\alpha}\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H + BH^{*} - H''\sum_{\alpha}\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I]B$$

<u>Lemme 9</u> : [$\overset{\circ}{L}$ divisible par H'] $\Leftrightarrow$ [$\overset{\circ}{L}{}_1^1$ divisible par H'] .

<u>Lemme 10</u> : Si $\overset{\circ}{L}(h)$ est divisible par H', $\overset{\circ}{L}(\hat{h})$ l'est aussi .

On posera, si $\overset{\circ}{L}$ est divisible par H' :

$$\overset{\circ}{M} = \frac{\overset{\circ}{S}B\overset{\circ}{R}}{H'} .$$

On obtient dans ces conditions le :

Lemme 11 :

$$\overset{\circ}{M} \equiv \frac{[\sum_\alpha \partial^\alpha B \partial_\alpha H + BH^* - H''\sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I] B [\sum_\alpha \partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - H'' \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I]}{H'}$$

On définit :

$$Q^D = \overset{\circ}{S}{}^D_A \, A^{1A}_{12} \qquad \text{et} \qquad P_C = A^{12}_{1B} \, \overset{\circ}{R}{}^B_C$$

où l'on a utilisé la convention de sommation où A^{1A}_{12} , A^{12}_{1B} sont des cofacteurs d'ordre m-2 (ainsi A^{1A}_{12} s'obtient en rayant la 1ère et la Aème ligne de H, la 1ère et la 2ème colonne de H et en mettant le signe convenable ; si $A = 1$, $A^{1A}_{12} = 0$).

Lemme 12 : $A^{12}_{12} \, B^1_1 \, \overset{\circ}{M}{}^D_C \equiv Q^D P_C H''$.

Lemme 13 : $(\overset{\circ}{M} \equiv 0) \Leftrightarrow (\overset{\circ}{M}{}^1_1 \equiv 0)$.

Conséquence : Si $\overset{\circ}{L} \equiv 0$, pour que $\overset{\circ}{M} \equiv 0$, il faut et il suffit que :

$$Q^1 P_1 \equiv 0 \ .$$

Lemme 14 : Si $\overset{\circ}{L} \equiv 0$, si $P_1(h)$, [resp.$Q^1(h)$] est divisible par H', alors $Q^1(\hat{h})$, [resp. $P_1(\hat{h})$] est divisible par H'.

Définition 7 : h vérifie la condition $(\overset{\circ}{L} - \overset{\circ}{M})$ si et seulement si :
$(\overset{\circ}{L})$: $\overset{\circ}{L}$ est divisible par H' .
$(\overset{\circ}{M})$: $\overset{\circ}{M}$ est divisible par H'.

Conséquence : Si h vérifie (D) et (TR1), alors h vérifie $(\overset{\circ}{L} - \overset{\circ}{M})$.

Théorème 4 a) : Si h vérifie (TR1) et $\overset{\circ}{L}$, si de plus P_1(resp.Q^1),est divisible par H' et si Q^1 (resp.P_1) n'a aucun zéro réel commun avec H', alors le problème de Cauchy est bien posé .

Ce théorème résulte de la construction d'une paramétrix pour h (resp. son adjoint). Dans le cas $P_1 \equiv 0$, les symboles se calculent à partir d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 le long des bicaractéristiques; dans le cas $Q^1 \equiv 0$, à partir d'un système de deux équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et 2.

Théorème 4b) : S'il existe un point y et une fonction de phase réelle φ définie dans un voisinage de y vérifiant $H'(x,\mathrm{grad}\,\varphi(x)) = 0$ dans ce voisinage et telle que :

$$[\mathring{L}_1^1(x,\mathrm{grad}\,\varphi(x)) \not\equiv 0 \quad \text{ou} \quad P_1\, Q_1^1.(x,\mathrm{grad}\,\varphi(x)) \not\equiv 0] \;,$$

alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé au voisinage de ce point.

Exemple :

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_o & \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_o & 0 \\ 0 & 0 & \xi_o \end{pmatrix} \qquad ;$$

dans cet exemple, c'est A_{23}^{13} et B_2^1 qui sont les cofacteurs non divisibles par H' .

$$\overset{*}{H}_{(x)} = (\overset{*}{H}{}^A_B)(x) \;;\; 1 \le A,B \le 3$$

La condition $(\mathring{L})$ s'écrit : $\overset{*}{H}{}^2_1(x) \equiv 0$

La condition $(\mathring{M})$ s'écrit : $(\overset{*}{H}{}^3_1\, \overset{*}{H}{}^2_3)(x) \equiv 0$.

Remarques : 1) Dans tous les cas de ce paragraphe, les conditions $(\mathring{L},\mathring{M})$ ne dépendent que des termes principaux et sous principaux de h, bien que la caractéristique soit triple.

2) L'expression des résultats est simplifiée si les coefficients sont analytiques.

§ 6. SYSTEMES A CARACTERISTIQUES TRIPLES. DEUXIEME CAS

Définition 8 : h vérifie la condition (TR2) si et seulement si :

8a) pour tout x, dans l'anneau localisé Φ :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^3 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

8b) Il existe donc au moins un cofacteur d'ordre (m-1) non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un, tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun avec H' ; on convient que ce soit A_1^1 .

Remarques : Alors pour tout x et toute racine caractéristique $\xi_o^\rho(x,\xi')$ de H', H est équivalente dans l'anneau localisé de celui des polynômes en ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi_o^\rho$ à la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\xi_o - \xi_o^\rho]^3 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et nos conditions impliquent les conditions exprimées,à l'aide de la forme de Jordan, pour t = 1, par Petkov.

Proposition 3 a) : Si h vérifie (D) et TR 2a) , on a dans une carte quelconque la relation :

$$\text{"}A[\sum_\alpha \partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I]$$

est divisible par H'^2 ".

On note alors $\tilde{\Lambda}$ le quotient de l'expression précédente par H'^2 .

Proposition 3 b) : Dans les mêmes conditions, on a :

$$\text{"}\mathcal{N} = -[\sum_\alpha \partial^\alpha H\, \partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\sum_\alpha \partial^\alpha H'\, \partial_\alpha H'I]\,\tilde{\Lambda} +$$
$$+ H'H''\sum_\alpha \partial^\alpha A\, \partial_\alpha[\sum_\beta \partial^\beta H\, \partial_\beta A + H^*A - 3H'H''\sum_\beta \partial^\beta H'\partial_\beta H'I]$$
$$+ H'H''A[\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \partial^{\alpha\beta} H\, \partial_{\alpha\beta} A + \sum_\alpha \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^{**}A]$$
$$- AH'(H'')^2[\sum_\alpha \partial^\alpha H'\partial^\beta H'\partial_{\alpha\beta} H' + \sum_{\alpha\beta} \partial^{\alpha\beta} H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + \sum_{\alpha\beta} \partial H'\partial^\alpha_\beta H'\partial_\alpha H']$$

est divisible par $(H')^2$ ".

On pose L = AR, comme au paragraphe 4 .

<u>Lemme 15</u> : Dans le paragraphe 6 :

$$L \equiv A(H^*A + \sum_\alpha \partial^\alpha H \partial_\alpha A - 3\sum_\alpha \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'H'H''I) \equiv [\sum_\alpha \partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^* - 3\sum_\alpha \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'H'H''I]A$$

modulo $(H')^2$.

<u>Lemme 16</u> : Si L(h) est divisible par $(H')^2$, alors $L(\hat{h})$ est divisible par $(H')^2$.

<u>Lemme 17</u> : Soit h un opérateur tel que $\nu = 3$ et tel que L soit divisible par $(H')^2$; soit h',h",a, des opérateurs de symboles principaux H', H", A ; notons $\tilde{\tilde{\lambda}}$ un opérateur ayant pour symbole principal le quotient par $(H')^2$ du symbole principal de l'opérateur $a(ha - h''(h')^3)$; alors le symbole sous-principal de l'opérateur :

$$h''h'a(ha - h''(h')^3) - \tilde{\tilde{\lambda}}ha + [3h''(h'a - ah') + h'(h''a - ah'')]ha$$

est congru modulo $(H')^2$ à $\mathcal{N}$.

On note N ce symbole sous-principal ; modulo $(H')^2$, il ne dépend que de H, H^*, H^{**} ; c'est une matrice de polynômes.

<u>Lemme 18</u> : On suppose que L est divisible par $(H')^2$; alors :

"N divisible par $(H')^2$ "

implique la condition "scalaire" :

$$\text{"}\mathcal{V} = -\tilde{\Lambda}^1_1 \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' A^1_1 - \Big[\sum_\alpha \partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^*\Big]^1_A A^{1A}_{1C} \Big[\sum_\alpha \partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A\Big]^C_1$$

$$+ A^1_1 \Big[\sum_\alpha \partial^\alpha A \partial_\alpha \big(\sum_\beta \partial^\beta H \partial_\beta A + H^* A - 3H'H'' \sum_\beta \partial^\beta H' \partial_\beta H' I\big)\Big]^1_1$$

$$+ A^1_1 \Big[A\big(\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} A + \sum_\alpha \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^{**} A\Big]^1_1$$

$$- (A^1_1)^2 \big(\sum_{\alpha\beta} \partial^\alpha H' \partial^\beta H' \partial_{\alpha\beta} H' + \sum_{\alpha\beta} \partial^{\alpha\beta} H' \partial_\alpha H' \partial_\beta H' + \sum_{\alpha\beta} \partial^\beta H' \partial^\alpha_\beta H' \partial_\alpha H'\big) H''$$

est divisible par H'".

<u>Lemme 19</u> : Lorsque L est divisible par $(H')^2$, si l'on a pour h la condition : ($\mathcal{V}$ divisible par H'), alors on a la condition analogue pour l'adjoint.

<u>Définition 9</u> : h vérifie la condition $((L)^2 - N)$ si et seulement si :

$(L)^2$: L est divisible par $[H']^2$.

(N) : $\mathcal{V}$ est divisible par H' .

Ces conditions sont intrinsèques.

<u>Conséquence</u> : Si h vérifie la condition (D) et la condition (TR 2) alors h vérifie $((L)^2 - N)$.

<u>Théorème 5</u> : Si h vérifie (TR 2) une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé est que h vérifie $((L)^2 - N)$.

La condition suffisante résulte de la construction d'une paramétrix pour h (resp. son adjoint). Les symboles se calculent par intégration d'équations différentielles ordinaires d'ordre 3 le long des bicaractéristiques.

<u>Exemple</u> :

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix} \quad ;$$

on a alors A^1_2 non divisible par H' .

$$H^*(x) = (H^{*A}_B)(x) \ , \quad 1 \le A, B \le 3 \ .$$

La condition (L) s'écrit :

$$\begin{cases} {H^*}_1^3(x) \equiv 0 \\ {H^*}_1^2(x) + {H^*}_2^3(x) \equiv 0 \end{cases}$$

La condition (M) s'écrit :

$$({H^*}_2^3 {H^*}_1^1)(x) + ({H^*}_3^3 {H^*}_1^2)(x) + \frac{\partial {H^*}_1^2}{\partial x^o}(x) \equiv 0$$

Remarque : Dans tous les cas la propagation des singularités, par les flots bicaractéristiques, s'obtient, par exemple, à l'aide de l'expression de la paramétrix .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Berzin : C. R. Acad. Sc. Paris, 275, série A, 1972, p.1091.

[2] R. Berzin : C. R. Acad. Sc. Paris, 280, série A, 1975, p.443.

[3] R. Berzin et J. Vaillant : Bull. Sc. Math., 2e série, 102, 1978 .

[4] R. Berzin et J. Vaillant : Séminaire Leray, Collège de France, 1976-77.

[5] R. Berzin et J. Vaillant : C. R. Acad. Sc. Paris, 287, série A, 1978, p.643.

[6] J. Chaillou : Thèse Sc. Math., Paris, 1969.

[7] L. Gårding : Acta Math. 85 (1951) p.1-62.

[8] J. Chazarain : Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, n°1, 1974, p.173-202.

[9] Mme Y. Choquet-Bruhat : J. Math. Pures et Appl., 48, 1969, p.117 à 158.

[10] Y. Demay : J. Math. Pures et Appl., 56, 1977, p.393 à 422.

[11] J. C. De Paris : J. Math. Pures et Appl., 51, 1972, p.231-256.

[12] J. J. Duistermaat et L. Hörmander : Acta Math., 128, 1972.

[13] H. Flaschka et G. Strang : Adv. in math. 6, n°3 (1971), 347-379.

[14] D. Gourdin : J. of Math. of Kyoto Univ., Vol. 17, n°3, 1977, p. 539 à 566.

[15] L. Hörmander : Acta Math. 127, 1971.

[16] V. Ivrii et V. M. Petkov : Uspehi Math. Nauk. 29, 5 (1974), 3-70.

[17] J. Leray et Y. Ohya : Colloque sur l'analyse fonctionnelle 2 - 1964- liège, p.145-152, C.N.R.B.

[18] J. Leray : Math. Ann. 162 (1966), p.228-236 .

[19] J. Leray et Y. Ohya : Math. Ann. 170 (1967) p.167-205.

[20] S. Mizohata et Y. Ohya : R. I. M. S. Vol. 4, n°2 (1968), Kyoto University.

[21] S. Mizohata et Y. Ohya : Jap. J. of Math. Vol. 40 (1971).

[22] Y. Ohya : Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972).

[23] V. M. Petkov : Doklody, t. 209, 1973, p.795-797.

[24] V. M. Petkov : Travaux du séminaire I. G. Petrovsky, 1975, p.211-236, Moscou.

[25] V. M. Petkov : Equations et systèmes à caractéristiques multiples, Séminaire d'analyse numérique, 1975.

[26] J. Vaillant : Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, n°2, 1965, p.225-311.

[27] J. Vaillant : J. Math. Pures et Appl. 47, 1968, p.1 à 40.

[28] J. Vaillant : J. Math. Pures et Appl. 50, 1971, p.25 à 51.