H. Brezis

Quelques propriétés de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta+V$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

QUELQUES PROPRIETES DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER $-\Delta + V$

par H. BREZIS

Exposé n° VIII

17 Janvier 1978

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, pour simplifier. Soit $V(x)$ un potentiel réel ou complexe avec des singularités. On considère dans $H = L^2(\Omega)$ l'opérateur non borné $Au = -\Delta u + Vu$.

On cherche à définir convenablement $D(A)$ pour que, sous certaines conditions, A soit m-accrétif, autoadjoint etc...

Ce travail a été fait en collaboration avec T. Kato et les démonstrations détaillées se trouvent dans [2].

§ 1. LE CAS D'UN POTENTIEL REEL

On suppose que V est à valeurs réelles et

(1) $$V \in L^1_{loc}(\Omega)$$

Les résultats principaux sont les suivants :

Théorème 1 : On fait l'hypothèse (1) ainsi que

(2) $$V^- \in L^\infty(\Omega) + L^{n/2}(\Omega).$$

On pose $Au = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(A) = \{u \in H^1_0(\Omega) \; ; \; Vu \in L^1_{loc} \text{ et } -\Delta u + Vu \in L^2\}.$$

Alors

i) Il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $A + \lambda_0$ soit m-accrétif i.e. $-(A + \lambda_0)$ engendre un semi-groupe de contractions.

ii) $A^* = A$.

Théorème 1' : On suppose ici que $\Omega = \mathbb{R}^n$. On fait les hypothèses (1), (2) et

(3) $$V^- \in L^{n/2+\varepsilon}_{loc} \text{ lorsque } n = 3 \text{ ou } n = 4, \; \varepsilon > 0 \;^{\blacklozenge}.$$

♦ Plus précisément on suppose que pour tout borné B de $\mathbb{R}^n$ il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de B) tel que $V^- \in L^{n/2+\varepsilon}(B)$.

On pose $\tilde{A}u = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(\tilde{A}) = \{u \in L^2 \,;\, Vu \in L^1_{loc} \ \underline{\text{et}} \ -\Delta u + Vu \in L^2\}$$

Alors $\tilde{A} = A$.

Remarque 1 : Les théorèmes 1 et 1' ne sont pas entièrement nouveaux (cf. les travaux de B. Simon [7], T. Kato [3], [4], [5] et les bibliographies correspondantes) -sauf peut-être en ce qui concerne le théorème 1' lorsque $n = 3$ et $n = 4$.

Démonstration du théorème 1

Etape 1 : Il existe λ_o tel que

$$(4) \qquad \int V^-|u|^2 \leq \int |\text{grad } u|^2 + \lambda_o \int |u|^2 \quad \forall u \in H^1_o .$$

En effet on écrit $V^- = V_1 + V_2$ avec $V_1 \in L^\infty$ et $V_2 \in L^{n/2}$.

On a alors

$$\int V^-|u|^2 \leq \int |V_1||u|^2 + \int_{|V_2| \leq \delta} |V_2||u|^2 + \int_{|V_2| > \delta} |V_2||u|^2$$

$$\leq (\|V_1\|_{L^\infty} + \delta)\|u\|^2_{L^2} + \|V_2\|_{L^{n/2}(|V_2|>\delta)} \|u\|^2_{L^{2*}}$$

avec $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

Comme $V_2 \in L^{n/2}$, on conclut en choisissant δ assez grand, que $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ C_\varepsilon$ tel que

$$\int V^-|u|^2 \leq \varepsilon \|u\|^2_{L^{2*}} + C_\varepsilon \|u\|^2_{L^2}$$

et d'après Sobolev on a

$$(5) \qquad \int V^-|u|^2 \leq \varepsilon \|\text{grad } u\|^2_{L^2} + C_\varepsilon \|u\|^2_{L^2} .$$

Plus généralement on a aussi

(6) $\int V^-|u||v| \leq \varepsilon \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + C_\varepsilon \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \forall u,\ v \in H_o^1$

<u>Etape 2</u> : $A+\lambda I$ est surjectif $\forall \lambda > \lambda_o$. En effet, soit $f \in L^2$ et soit $V_n^+ = \begin{cases} V^+ & \text{si } V^+ \leq n \\ n & \text{si } V^+ > n \end{cases}$. Soit $u_n \in H_o^1$ l'unique solution de l'équation

(7) $$- \Delta u_n + V_n^+ u_n - V^- u_n + \lambda u_n = f$$

(noter que u_n existe d'après Lax-Milgram). Multipliant (7) par $\overline{u_n}$ on obtient

(8) $$\|u_n\|_{L^2} \leq C$$

(9) $$\int V_n^+ (u_n)^2 \leq C$$

(10) $$\|\text{grad } u_n\|_{L^2} \leq C$$

On peut donc extraire une sous-suite, notée encore u_n telle que $u_n \rightharpoonup u$ (faiblement) dans H_o^1 et $u_n \to u$ p.p.

D'après Fatou et (9) on a $V^+|u|^2 \in L^1$. Il en résulte que $Vu \in L^1_{loc}$; en effet

$$V^+|u| \leq V^+(1+|u|^2) \in L^1_{loc}$$

et

$$V^-|u| \leq V^-(1+|u|^2) \in L^1_{loc}$$

Il reste à passer à la limite dans (7) et à montrer que l'on a

$$- \Delta u + Vu + \lambda u = f \text{ au sens de } \mathcal{D}'.$$

Ceci se déduit du

Lemme 1 : $(V_n^+ - V^-)u_n \to Vu$ dans L^1_{loc} .

Démonstration : On applique le lemme de convergence de Vitali. Soit $\omega \subset\subset \Omega$; il faut vérifier que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que si $E \subset \omega$ et si $|E| < \delta$, alors

$$\int_E |V_n^+ - V^-| |u_n| < \varepsilon \qquad \forall n .$$

Or $\forall R > 0$ on a

$$V_n^+ |u_n| \leq \frac{1}{2R} V_n^+ |u_n|^2 + \frac{R}{2} V_n^+ .$$

et par conséquent

$$\int_E V_n^+ |u_n| \leq \frac{1}{2R} C + \frac{R}{2} \int_E V^+ .$$

On choisit d'abord R assez grand pour que $\frac{C}{R}$ et puis $\delta > 0$ assez petit pour que $R \int_E V^+ < \varepsilon$.

Par ailleurs on a

$$\int_E V^- |u_n| \leq \|V^-\|_{L^{n/2}(\omega)} \|u_n\|_{L^{2*}} |E|^{\frac{1}{2*}}$$
$$\leq C |E|^{1/2*}$$

Etape 3 : Pour tout $\lambda > \lambda_0$, $A + \lambda I$ est injectif . En effet, soit $u \in D(A)$ solution de

$$- \Delta u + Vu + \lambda u = 0$$

On utilise maintenant le lemme suivant dû à T. Kato qui joue un rôle crucial.

Lemme 2 [3] : Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, avec $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors

$$\Delta |u| \geq \mathrm{Re}[\Delta u \operatorname{sign} \bar{u}] \quad \text{dans } \mathcal{D}' ,$$

où $\operatorname{sign} \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|}$ pour $z \neq 0$ et $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Appliquant le lemme 2 on obtient

$$\Delta |u| \geq \mathrm{Re}\left[(Vu + \lambda u)\,\mathrm{sign}\,\bar{u}\right] = \mathrm{Re}\left[V|u| + \lambda |u|\right]$$

$$= V|u| + \lambda|u| \geq (-V^- + \lambda)|u| \ .$$

Donc il vient

$$\int |u|(-\Delta\zeta - V^-\zeta + \lambda\zeta) \leq 0 \qquad \forall\, \zeta \in \mathcal{D}_+$$

et par densité $\forall \zeta \in H^1_o$, $\zeta \geq 0$, on a

$$\int \mathrm{grad}\,|u|\,\mathrm{grad}\,\zeta - \int V^-|u|\,\zeta + \lambda \int |u|\zeta \leq 0 \ .$$

Choisissant en particulier $\zeta = |u|$, on déduit que $|u| = 0$.

<u>Etape 4</u> : $A + \lambda_o$ est accrétif.

<u>Démonstration</u> : Soit $f = Au + \lambda_o u$, soit $g = f + u$ et soit $u_n \in H^1_o$ la solution de

$$-\Delta u_n + V^+_n u_n - V^- u_n + (\lambda_o + 1)u_n = g \ .$$

D'après ce qui précède on sait que $u_n \rightharpoonup u$ dans H^1_0 .

Par ailleurs

$$\mathrm{Re}(g, u_n) \geq \int |u_n|^2$$

et donc à la limite $\mathrm{Re}\,(f,u) \geq 0$.

<u>Etape 5</u> : A est autoadjoint. Comme $A + \lambda_o$ est m-accrétif, il suffit de vérifier que A est symétrique, pour en déduire que A est autoadjoint. Soient $u, v \in D(A)$ et soit $\lambda > \lambda_o$. On pose

$$f_1 = Au + \lambda u \quad , \quad g = Av + \lambda v$$

Soient $u_n \in H^1_o$ et $v_n \in H^1_o$ les solutions respectives de

$$- \Delta u_n + V_n^+ u_n - V^- u_n + \lambda u_n = f$$

$$- \Delta v_n + V_n^+ v_n - V^- v_n + \lambda v_n = g$$

On sait que $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ dans H_o^1. Il est clair que

$$\int f \overline{v_n} = \overline{\int g u_n}$$

et par suite à la limite

$$(Au + \lambda u, v) = \overline{(Av + \lambda v, u)}$$

i.e. $$(Au, v) = (u, Av) .$$

<u>Remarque 2</u> : Lorsque Ω est un ouvert <u>régulier</u> on peut établir le fait suivant :
Soit $T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1_{loc}$ et soit $u \in H_o^1$. On suppose qu'il existe $\varphi \in L^1$ tel que $\mathrm{Re}\, T.\bar{u} \geq \varphi$ p.p. sur Ω. Alors $\mathrm{Re}\, T.\bar{u} \in L^1$ et

$$\mathrm{Re} \langle T, u \rangle_{H^{-1}, H_o^1} = \int \mathrm{Re}\, T\bar{u}\, dx.$$

Il est facile de montrer que $A + \lambda_o$ est accrétif. En effet soit $T = Vu$; on a $\mathrm{Re}\, T\bar{u} \geq - V^- |u|^2 \in L^1$ et donc $\mathrm{Re}\langle T, u\rangle = \int V |u|^2$. Par suite

$$\mathrm{Re}(-\Delta u + Vu + \lambda_o u, u) = \mathrm{Re} \langle -\Delta u + Vu + \lambda_o u, u \rangle =$$

$$\int |\mathrm{grad}\, u|^2 + \lambda_o \int |u|^2 + \int V |u|^2 \geq 0$$

Nous ne savons pas si cet argument est valable en général lorsque Ω n'est pas régulier.

<u>Démonstration du théorème 1'</u> : Il est clair que $A \subset \tilde{A}$. Soit $u \in D(\tilde{A})$ et posons $f = \tilde{A}u + \lambda u$. Soit $u^* \in D(A)$ l'unique solution de

$$f = Au^* + \lambda u^* .$$

On a par conséquent $\tilde{A}(u-u^*) + \lambda(u-u^*) = 0$ et il suffit de montrer que $\tilde{A} + \lambda I$ est injectif. Appliquant le lemme 2 on obtient

$$- \Delta |u| - V^- |u| + \lambda |u| \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

On conclut alors à l'aide du

<u>Lemme 3</u> : <u>On fait les hypothèses (1), (2) et (3)</u> . <u>Soit</u> $u \in L^2$ <u>tel que</u> $V^- u \in L^1_{loc}$ <u>et</u>

$$-\Delta u - V^- u + \lambda u \leq 0 \quad \underline{\text{au sens de}}\ \mathcal{D}' \ \underline{\text{avec}}\ \lambda > \lambda_o .$$

<u>Alors</u> $u \leq 0$ p.p.

<u>Remarque 3</u> : La conclusion du lemme 3 tombe en défaut si l'on ne fait pas l'hypothèse (3) : Ancona [1] a construit des exemples de fonctions $u \in L^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$, et de fonctions $V^- \in L^{n/2}$ telles que $V^- u \in L^1_{loc}$,

$$- \Delta u - V^- u + \lambda u = 0$$

et néanmoins $u \not\equiv 0$.

Pour établir le lemme 3 on étudie les propriétés de la solution du problème adjoint :

<u>Théorème 2</u> : <u>Soit</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. <u>On fait l'hypothèse (2)</u>. <u>Soit</u> $g \in L^2 \cap L^\infty$ <u>et soit</u> $\psi \in H^1_o$ <u>l'unique solution de</u>

(11) $$- \Delta \psi - V^- \psi + \lambda \psi = g \quad , \quad \lambda > \lambda_o$$

<u>Alors</u>

i) $g \geq 0 \Rightarrow \psi \geq 0$

ii) $\psi \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} L^p$

<u>Principe de la démonstration</u>

i) Multipliant (11) par $-\psi^-$ on a

$$\int |\text{grad}\, \psi^-|^2 + \lambda \int |\psi^-|^2 \leq \int V^- |\psi^-|^2$$

D'où il résulte que $\psi^- = 0$.

ii) Supposons $g \geq 0$, de sorte que $\psi \geq 0$. Multipliant (11) par $\psi^{p-1} (p \geq 2)$ on obtient

$$(12) \qquad (p-1) \int \psi^{p-2} |\operatorname{grad} \psi|^2 \leq \int g \psi^{p-1} + \int V^- \psi^p$$

[cette opération qui n'est pas licite puisque $\psi^{p-1} \notin H_o^1$ peut être justifiée par des troncatures].

On déduit de (12) que

$$\frac{4(p-1)}{p^2} \int |\operatorname{grad} \psi^{p/2}|^2 \leq \|g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}^{p-1} + \varepsilon \|\psi\|^p_{L^{\frac{2^*}{2}p}} + C_\varepsilon \|\psi\|^p_{L^p}$$

Par conséquent

$$\frac{C(p-1)}{p^2} \|\psi\|^p_{L^{\frac{2^*}{2}p}} \leq \|g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}^{p-1} + \varepsilon \|\psi\|^p_{L^{\frac{2^*}{2}p}} + C_\varepsilon \|\psi\|^p_{L^p}$$

et choisissant ε assez petit (dépendant de p) on voit que

$$\begin{aligned} \|\psi\|^p_{L^{\frac{2^*}{2}}} &\leq C_p (\|g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}^{p-1} + \|\psi\|^p_{L^p} \\ &\leq C'_p (\|g\|^p_{L^p} + \|\psi\|^p_{L^p}) . \end{aligned}$$

Ce procédé réitéré permet ainsi de montrer que $\psi \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} L^p$.

<u>Démonstration du lemme 3</u> : On a

$$(13) \qquad \int |u| (-\Delta\varphi - V^- \varphi + \lambda\varphi) \leq 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+$$

Utilisant un procédé de régularisation par convolution on voit aisément que (13) a encore lieu pour $\varphi \in H^2 \cap L^\infty$ avec $\operatorname{Supp} \varphi$ compact, $\varphi \geq 0$.

On choisit alors $\varphi = \zeta_k(x) \psi_n(x)$ où $\zeta_k(x) = \zeta_o(\frac{x}{k})$ avec $\zeta_o \in \mathcal{D}_+$, $\zeta_o(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et ψ_n est la solution de

$$\psi_n \in H_o^1$$

(14) $$-\Delta\psi_n - V_n^-\psi_n + \lambda\psi_n = g \in \mathcal{D}_+$$

De sorte que $\psi_n \in H^2 \cap L^\infty_{loc}$ et $\psi_n \geq 0$. On a

$$- \Delta\varphi - V^-\varphi + \lambda\varphi = -(\Delta\zeta_k)\psi_n - 2 \text{ grad } \zeta_k \text{ grad}\psi_n$$

$$- \zeta_k [\lambda\psi_n - V_n^- \psi_n - g] - V^-\zeta_k \psi_n + \lambda\zeta_k\psi_n$$

Reportant $\varphi = \zeta_k\psi_n$ dans (13) on a

$$\int g|u|\zeta_k \leq \frac{C}{k^2}\int|u|\psi_n + \frac{C}{k}\int|u||\text{grad}\psi_n| + \int|u|\zeta_k\psi_n(V^- - V_n^-)$$

$$\leq \frac{C}{k^2} + \frac{C}{k} + \int|u|\zeta_k\psi_n(V^- - V_n^-)$$

On fixe d'abord k et on fait $n \to \infty$. Dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$, l'hypothèse (3), jointe au théorème 2 garantit que $\|\psi_n\|_{L^\infty_{loc}}$ reste borné. On conclut alors à l'aide de Lebesgue que

$$\int g|u|\zeta_k \leq \frac{C}{k^2} + \frac{C}{k}$$

et puis que $\int g|u| \leq 0$ en faisant $k \to \infty$. Pour $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, on sait que $V_n^- - V^- \to 0$ dans $L^{n/2}$ et que $\|\psi_n\|_{L^p}$ reste borné pour tout $2 \leq p < \infty$.
On en déduit que $\int|u|\zeta_k\psi_n(V^- - V_n^-) \to 0$ et puis que $\int g|u| \leq 0$ en faisant $k \to \infty$.

§ 2 LE CAS DES POTENTIELS COMPLEXES

Soient $q, q' \in L^1_{loc}$ des fonctions à valeurs réelles. On pose

$$V = q + iq'$$

On fait les hypothèses

(15) $$q' \in L^{1+\varepsilon}_{loc} \quad \text{ou bien} \quad q^- \in L^{\frac{n}{2}+\varepsilon}_{loc} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

(16) $$q^- \in L^\infty + L^{n/2}$$

Les résultats principaux sont les suivants

Théorème 3 : On fait les hypothèses (15) et (16). On pose $A_o u = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(A_o) = \{u \in H_o^1 \ ; \ Vu \in L^1_{loc} \ , \ -\Delta u + Vu \in L^2\}$$

Alors A_o est fermable dans L^2 et il existe λ_o tel que $\bar{A}_o + \lambda_o$ soit m-accrétif.

Théorème 3' : On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$. On fait les hypothèses (15), (16) et $q^- \in L^{n/2+\varepsilon}_{loc}$ lorsque $n = 3$ ou $n = 4$. On définit $A_1 u = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(A_1) = \{u \in L^2 \ ; \ Vu \in L^1_{loc} \text{ et } -\Delta u + Vu \in L^2\} .$$

Alors A_1 est fermable et $\bar{A}_1 = \bar{A}_o$.

Les théorèmes 3 et 3' généralisent des résultats antérieurs de Nelson [6] et Kato [5]. Les démonstrations sont très voisines de celles indiquées précédemment ; on trouvera les détails dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ancona : A paraître.

[2] H. Brézis, T. Kato : A paraître.

[3] T. Kato : Schrödinger operators with singular potentials, Israel J. Math. 13 (1972) p.135-148.

[4] T. Kato : A second look at selfadjointness of the Schrödinger operator, Physical Reality and Math. Description, D. Reidel Publ. Co. 1974 p.193-201.

[5] T. Kato : On some Schrödinger operators with singular complex potentials, à paraître.

[6] E. Nelson : Feynman integrals and the Schrödinger equation, J. Math. Phys. 5 (1964) p.332-343.

[7] B. Simon : Essential selfadjointness of Schrödinger operators with positive potentials, Math. Ann. 201 (1973) p.211-220.