D. Robert

Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

LATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone . 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

PROPRIETES SPECTRALES D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

par D. ROBERT

Exposé n° V

13 Décembre 1977

INTRODUCTION

Commençons par donner quelques exemples illustrant le type d'opérateur que nous allons considérer :

- a) $-\Delta + |x|^2$ (Hermite). Plus généralement : $-\Delta + V$ où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est C^∞ vérifiant : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\alpha = (\alpha_a, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que :

$$|D^\alpha V(x)| \leq C_\alpha . V(x) \langle x \rangle^{-\delta|\alpha|} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n .$$

On a posé : $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$; $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ et

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

- b) $(1 + x^2).(1 - \dfrac{d^2}{dx^2})$

- c) $\displaystyle\sum_{|\alpha| + |\beta| \leq M} a_{\alpha\beta} x^\alpha . D^\beta$ où $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ et $a(x,\xi) = \displaystyle\sum_{|\alpha| + |\beta| \leq M} a_{\alpha\beta}\, x^\alpha . \xi^\beta$

est un polynôme elliptique en (x,ξ) et positif. Plus généralement $a(x,\xi)$ est un polynôme hypoelliptique en (x,ξ) prenant ses valeurs dans un cône propre de $\mathbb{C}$ de sommet 0.

On peut remarquer que l'exemple b) n'est pas hypoelliptique en (x,ξ).

Soit A l'unique réalisation dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (i.e. le seul prolongement fermé comme opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$) de l'un des opérateurs précédents. On se propose d'étudier la résolvante $(A - \lambda)^{-1}$, les puissances complexes A^z, λ et $z \in \mathbb{C}$ ainsi que le comportement asymptotique des valeurs propres de A.

Nous suivrons le plan suivant :

§ 1. Réalisation dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et résolvante.

§ 2. A^z et application

§ 3. Comportement des valeurs propres du problèmes de Dirichlet sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Les démonstrations détaillées des résultats annoncés ici paraîtrons ailleurs.

§ 1. REALISATION DANS $L^2(\mathbb{R}^n)$ ET RESOLVANTE

Pour décrire les propriétés des opérateurs que nous considérons nous nous plaçons dans le cadre des opérateurs pseudodifférentiels de R. Beals [1]. On se donne trois fonctions continues :
ϕ (le poids en ξ), φ (le poids en x) et μ (l'ordre) : $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}_+$. On introduit la classe de symboles :

$$S^{\mu}_{\phi,\varphi} = \{p \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}) : \sup_{\mathbb{R}^{2n}} [e^{-\mu}.\phi^{|\alpha|}.\varphi^{|\beta|}|\partial^{\alpha}_{\xi} D^{\beta}_{x} p|] < +\infty \text{ pour tout } \alpha \text{ et } \beta\}$$

Sous des hypothèses techniques convenables ([1]) on obtient une bonne théorie pour les opérateurs pseudodifférentiels associés à p par la formule habituelle :

(1) $\quad p(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}.p(x,\xi).\hat{u}(\xi)d\xi \quad$ pour $u \in \mathcal{S}$,

espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u .

En particulier on peut prendre :

$$\phi(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{\delta_1}, \quad \varphi(x,\xi) = \langle x\rangle^{\delta_2} ; \ \delta_1, \delta_2 > 0 \ \text{ et}$$

$\mu = k.\mathrm{Log}\,\phi + h.\mathrm{Log}\,\varphi = (k,h)$ où k et h sont réels, ou encore

$$\phi(x,\xi) = \varphi(x,\xi) = (1 + |x| + |\xi|)^{\delta_1}.$$

Ces exemples ne vérifient pas les propriétés imposées dans [1]. Cependant les résultats de [1] subsistent ([3]).

Dans tout ce qui suit nous supposerons que (ϕ,φ) vérifie : il existe c, $\theta > 0$ telles que :

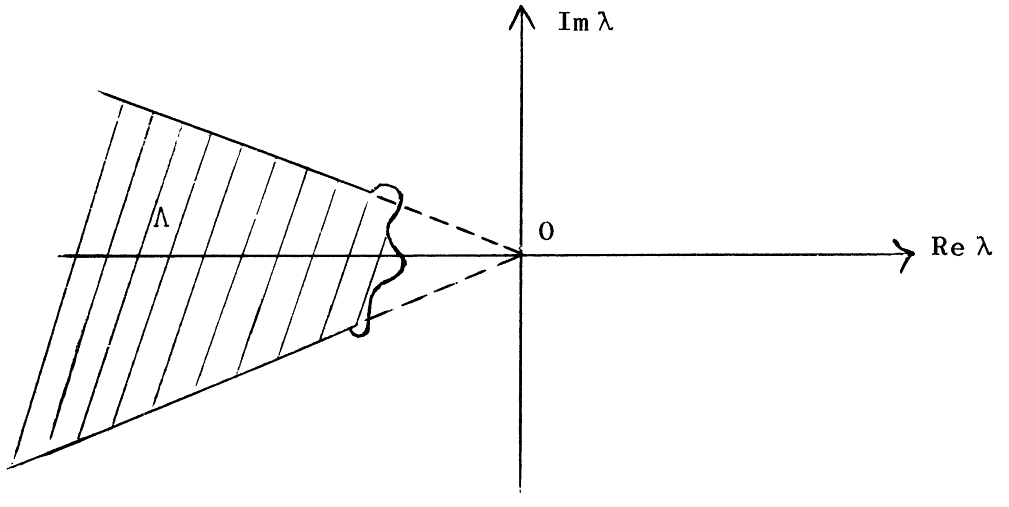
$$\phi.\varphi \geq C(1 + |x| + |\xi|)^{\theta} \quad \text{pour tout } (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

On désigne par $\mathcal{L}^{\mu}_{\phi,\varphi}$ la classe des opérateurs définis par (1) pour $p \in S^{\mu}_{\phi,\varphi}$.
Soit $a(x,D) \in \mathcal{L}^{\mu_o}_{\phi,\varphi}$. On suppose que $a(x,D) = a_o(x,D) + a_1(x,D)$ où a_o, $a_1 \in \mathcal{L}^{\mu_o}_{\phi,\varphi}$ vérifient :

$$(E_o)\quad \begin{cases} |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_o| \le C^{(o)}_{(\alpha,\beta)}\ |a_o|\ \phi^{-|\alpha|}.\varphi^{-|\beta|} \\ |\partial_\xi^\alpha D_x^\beta a_1| \le C^{(1)}_{(\alpha,\beta)}\ |a_o|.\phi^{-|\alpha|-1}.\varphi^{-|\beta|-1} \end{cases}, \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^{2n}$$

$$(E_1)\qquad C_1.e^{\mu_1} \le |a_o| \quad ; \quad C_1 > 0$$

(E_2) Il existe une région ouverte Λ du plan complexe du type :



et des constantes C, C> 0 telles que :

$$\begin{cases} |a_o(x,\xi) - \lambda| \ge c|\lambda| \\ |a_o(x,\xi) - \lambda| \ge c.|a_o(x,\xi)| \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $|x| + |\xi| \ge C$.

<u>Remarques</u> : a) (E_o) et (E_1) sont des conditions d'hypoellipticité du type Hörmander.

b) (E_2) est satisfaite si l'on suppose par exemple que $a_o(x,\xi)$ prend toutes ses valeurs dans un cône propre de $\mathbb{C}$ ne rencontrant pas $]-\infty\ ,\ 0[$.

Sous les hypothèse précédentes on a le :

<u>Théorème 0</u> : a) $a(x,D)$ admet une et une seule réalisation A dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En particluier si $a(x,D)$ est formellement autoadjoint, il est essentiellement autoadjoint.

b) Il existe $\lambda_o > 0$ tel que pour $\lambda \in \Lambda$ et $|\lambda| \ge \lambda_o$ $(A-\lambda)^{-1}$ existe .

c) Toute demi-droite D contenue dans Λ est un rayon de croissance minimale pour $(A-\lambda)^{-1}$ i.e. on a :

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{L^2;L^2} = O(\frac{1}{|\lambda|}) \text{ pour } |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in D.$$

Indications sur la démonstration : On construit une paramétrix à gauche et à droite pour $a(x,D)-\lambda$ par approximations successives. Pour tout entier $N \geq 0$ et $\lambda \in \Lambda$; $\lambda \neq 0$ on construit des opérateurs :

$$B_{N,\lambda} = b_{o,\lambda}+\dots+ b_{N,\lambda} \quad \text{et} \quad C_{N,\lambda} = c_{o,\lambda}+\dots+ c_{N,\lambda} \quad \text{avec :}$$

(d) $\quad (a(x,D)-\lambda).B_{N,\lambda} = 1 + R_{N,\lambda}$.

(g) $\quad C_{N,\lambda}(a(x,D)-\lambda) = 1 + S_{N,\lambda}$.

Les symboles de $b_{j,\lambda}$ et $c_{j,\lambda}$ sont donnés par les formules de récurrence :

$$b_{o,\lambda} = c_{o,\lambda} = (a_o-\lambda)^{-1}$$

$$b_{j+1,\lambda} = -(a_o-\lambda)^{-1} \sum_{\substack{|\alpha|+i+k=j+1 \\ 0\leq k\leq j,\ i=0,1}} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha a_i . D^\alpha b_{k,\lambda}$$

$$c_{j+1,\lambda} = -(a_o-\lambda)^{-1} \sum_{\substack{|\alpha|+i+k=j+1 \\ 0\leq k\leq j,\ i=0,1}} \frac{1}{\alpha!}\, D^\alpha a_i . \partial^\alpha c_{k,\lambda}$$

Pour N assez grand on prouve alors que :

$$\|R_{N,\lambda}\|_{L^2,L^2} = O(\frac{1}{|\lambda|}) \text{ et } \|S_{N,\lambda}\|_{L^2,L^2} = O(\frac{1}{|\lambda|}) \text{ lorsque } |\lambda| \to +\infty,$$

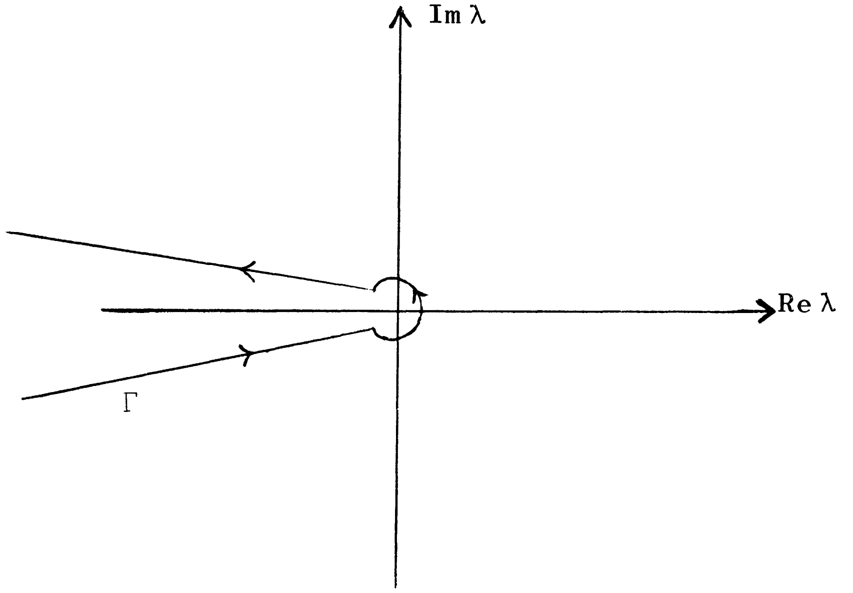
$\lambda \in \Lambda$. Le théorème 0 en résulte .

Exemples : 1) $a(x,\frac{d}{dx}) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + x^4$ est essentiellement autoadjoint autoadjoint de domaine : $D(A) = \{u \in H^2(\mathbb{R}),\ x^4.u \in L^2(\mathbb{R})\}$

2) Les exemples cités en introduction vérifient clairement les hypothèses du théorème 0.

§ 2. ETUDE DE A^z

On conserve les hypothèses du I. On suppose de plus que $]-\infty, 0] \subset \Lambda$. Pour $\operatorname{Re} z < 0$ on pose : $A^z = \frac{i}{2\pi} \cdot \int_\Gamma \lambda^z (A-\lambda)^{-1} d\lambda$ où Γ est un contour du type :



Pour z quelconque on pose : $A^z = A^{z-\ell} . A^\ell$ où $\ell \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} z < \ell$. A^z ne dépend ni de ℓ ni de Γ ([5]).

Enfin posons : $a_{j,z} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z b_{j,z}(x,\xi) d\lambda$ pour $\operatorname{Re} z < 0$. on a :

Théorème 1 : a) $\begin{cases} A^z \in \mathcal{L}^{\operatorname{Re} z . \mu_1} & \text{si } \operatorname{Re} z \leq 0 \\ A^z \in \mathcal{L}^{\operatorname{Re} z . \mu_0} & \text{si } \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$

b) $\sigma(A^z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,z}$ pour $\operatorname{Re} z < 0$

où $\sigma(A^z)$ désigne le symbole de A^z.

c) $a_{0,z} = a_0^z$ et

$$a_{j,z} = \sum_{h=1}^{2j} \frac{z(z-1)\dots(z-h+1)}{h!} . \gamma_{j,h} \cdot a_0^{z-h}$$

où $\gamma_{j,h} \in \mathcal{L}^{h.\mu_1 - (j,j)}$.

<u>Théorème 2</u> : On suppose de plus que $|a_o(x,\xi)| \geq C_1(1+|x|+|\xi|)^{\delta_1}$ où C_1, $\delta_1 > 0$. On a alors :

a) Il existe $r_o > 0$ tel que pour $\operatorname{Re} z < -r_o$, A^z est nucléaire.

b) Si $K^{(z)}$ est le noyau-distribution associé à A^z on a :

$$\operatorname{Tr} A^z = \int_{\mathbb{R}^n} K^{(z)}(x,x)\,dx \quad \text{et} \quad z \mapsto \operatorname{Tr} A^z$$

est holomorphe dans le demi-plan : $\{\operatorname{Re} z < -r_o\}$.

c) Pour $x \neq y$, $z \mapsto K^{(z)}(x,y)$ se prolonge en une fonction entière.

L'intérêt de l'étude de $\operatorname{Tr} A^z$ est renforcé par la :

<u>Proposition</u> (Seeley [5]) : Soit A un opérateur fermé de l'espace hilbertien X de domaine D(A) dense dans X. Supposons qu'il existe $r_o > 0$ tel que $(A^*.A+I)^{-r_o}$ et $(A^*A+I)^{-r_o}$ soient nucléaires. On a alors :
$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Tr}(A^*A+I)^z - \operatorname{Tr}(AA^*+I)^z$ pour $\operatorname{Re} z \leq -r_o$.

Nous allons poursuivre l'étude de $\operatorname{Tr} A^z$ sur le cas particulier suivant : soient $h=(h_1,\dots,h_n)$ et $k=(k_1,\dots,k_n)$ deux multiindices d'entiers ≥ 1. On suppose que $a = \sum_{j=o}^{N} a_j$ où a_j est quasi-homogène ; c'est à dire :

$$a_j(\rho^{h_1}.x_1,\dots,\rho^{h_n}.x_n,\rho^{k_1}.\xi_1,\dots,\rho^{k_n}.\xi_n) = \rho^{m-j}a_j(x,\xi)$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\rho > 0$. On suppose de plus que a_o est quasi-elliptique en (x,ξ) i.e. $(x,\xi) \neq 0$ entraîne $a_o(x,\xi) \neq 0$. (det $a_o(x,\xi) \neq 0$ pour un système).

Posons : $I(z) = \operatorname{Tr}(A^z)$. On a les résultats :

<u>Théorème 3</u> : a) I est holomorphe dans le demi-plan :

$$\{\operatorname{Re} z < -\frac{\Sigma(h_i+k_i)}{m}\}$$

b) I a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, ses pôles sont simples et appartiennent à la suite :

$$z_j = \frac{j}{m} - \frac{1}{m}.\sum_{i=1}^{n}(h_i+k_i)$$

c)

$$\operatorname{Res}(I,z_j) = \frac{m}{i(2\pi)^{n+1}} \cdot \int_{S_{h,k}} \int_\Gamma \lambda^{z_j}\, b_{j,\lambda}(\sigma)\, d\lambda\, d\sigma$$

où $S_{h,k} = \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} ,\ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{2/h_i} + |\xi_i|^{2/k_i} = 1 \}$

<u>Théorème 4</u> : I est holomorphe en 0 et :

$$I(0) = \frac{1}{m.(2\pi)^n} \cdot \int_{S_{h,k}} \int_0^{+\infty} b_{\Sigma(h_i+k_i),-t}(\sigma)\, dt . d\sigma$$

<u>Remarques</u> : (1) les $b_{j,\lambda}$ intervenant dans les théorèmes 3 et 4 sont définis par :

$$\begin{cases} b_{o,\lambda}(x,\xi) = \chi(x,\xi).(a_o(x,\xi) - \lambda)^{-1} \\ b_{j+1,\lambda}(x,\xi) = (a_o - \lambda)^{-1} \displaystyle\sum_{\substack{i+k+(\alpha|h+k)=j+1 \\ 0 \le k \le j}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha a_i . D^\alpha b_{k,\lambda} \end{cases}$$

où : $\chi(x,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Sigma|x_i|^{2/h_i} + |\xi_i|^{2/k_i} \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \quad\text{———————} \ge 1 \end{cases}$; $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

(2) Compte tenu de la proposition précédente le théorème 4 permet d'exprimer l'indice de A en fonction de son symbole. Dans le cas d'un opérateur elliptique sur une variété compacte cette remarque est à la base de l'une des démonstrations du théorème d'indice de Atiyah et Singer.

§ 3. <u>COMPORTEMENT DES VALEURS PROPRES DU PROBLEME DE DIRICHLET</u>

Dans ce paragraphe on suppose pour simplifier que a(x,D) est différentiel d'ordre $m \ge 1$ et que les hypothèses générales (E_o), (E_1), (E_2) sont satisfaites. On suppose de plus :

(H_1) Il existe c_1, $\delta_1 > 0$ telles que :

$$c_1(1+|x|+|\xi|)^{\delta_1} \leq a_o(x,\xi) \quad \text{pour tout } (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Comme dans [4] on construit la réalisation de Dirichlet A_Ω de $a(x,D)$ dans Ω de la manière suivante : A désignant l'unique réalisation dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de $a(x,D)$, on pose : $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$.

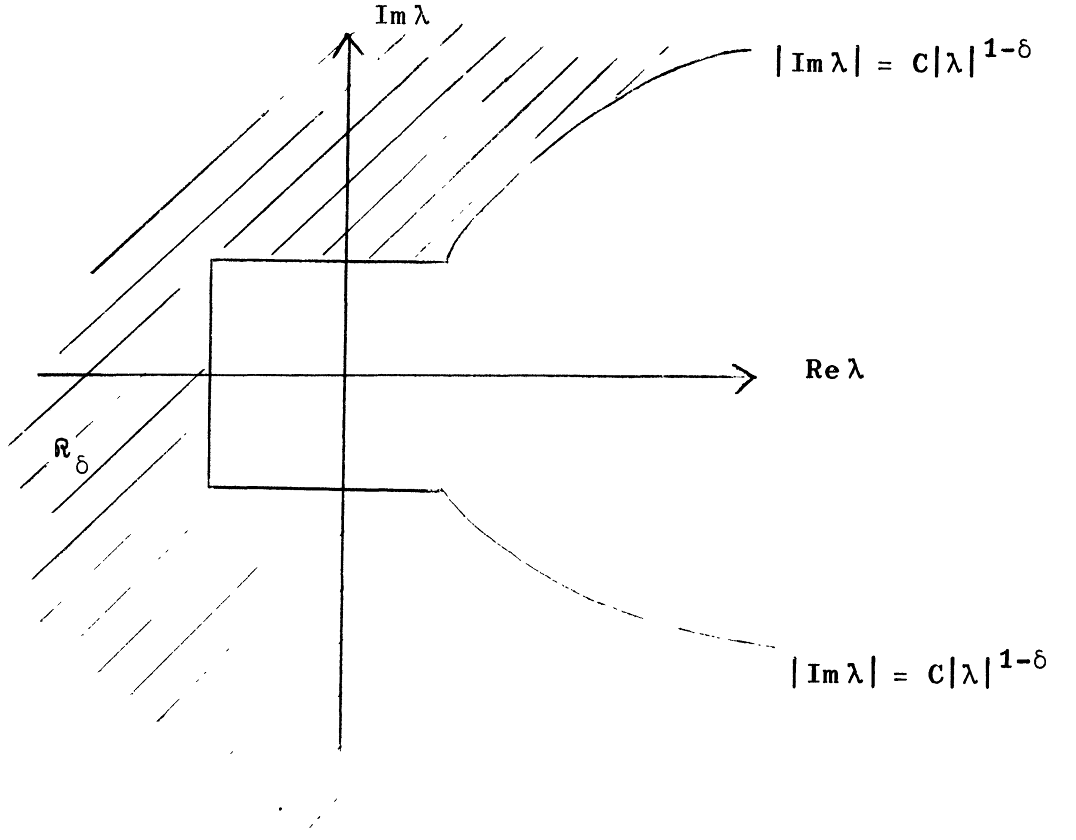
Quitte à faire une translation sur A on peut toujours supposer que $B > 0$. On désigne alors par $V(\Omega)$ le complété de $C_o^\infty(\Omega)$ pour la norme du graphe de $B^{1/2}$. Posons : $\alpha(u,v) = (a(x,D)u,v)_{L^2}$ pour u et $v \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. On constate que α se prolonge en une forme sesquilinéaire continue et coercive sur $V(\Omega)\times V(\Omega)$. A_Ω est alors l'opérateur engendré par le triplet variationnel : $(\alpha, V(\Omega), L^2(\Omega))$ et le lemme de Lax-Milgramm.

Introduisons le réel :

$$\delta = \sup\{\rho>0 : \text{il existe } C>0 \text{ vérifiant } a_o^\rho \leq C.\phi.\varphi \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^{2n}\}$$

<u>Exemple</u> : Si $a(x,\xi)$ est elliptique en (x,ξ) de degré 2m alors $\delta = \frac{1}{2m}$. En général on a : $0 < \delta < \frac{1}{m}$.

<u>Proposition</u> : Il existe une région $\mathcal{R}_\delta$ du plan complexe du type :



telle que $(A_\Omega - \lambda)^{-1}$ existe pour tout $\lambda \in \mathcal{R}_\delta$. De plus $(A_\Omega - \lambda)^{-1}$ est compacte.

Soit alors $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ la suite des valeurs propres de A_Ω, rangées suivant les modules croissants, répétées selon leur multiplicité algébrique. Pour étudier le comportement asymptotique de la suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ posons : $N(t) = \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq t} 1$. Nous allons comparer $N(t)$ à :

$$N_\Omega(t) = (2\pi)^{-n}.\int_\Omega dx \int_{a_o(x,\xi)\leq t} d\xi \quad \text{lorsque } t \to +\infty .$$

Théorème : On a : $N(t) = N_\Omega(t)(1+o(1))$ $t \to +\infty$ sous l'une des trois hypothèses suivantes :

(i) $\Omega = \mathbb{R}^n$ et il existe C, $t_o > 0$ tels que N_Ω soit absolument continue sur $]t_o, \infty[$ et $N'_\Omega(t) \leq C.\dfrac{N_\Omega(t)}{t}$ pour $t > t_o$.

(ii) (1) Il existe une famille croissante d'ouverts $(\Omega_r)_{r\geq 1}$, $\Omega_r \subset\subset \Omega$ et des constantes C_1, $\eta > 0$ telles que :

$$\int_{\Omega-\Omega_r} dx \int_{a_o(x,\xi)\leq t} d\xi \leq C_1.r^{-\eta}.N_\Omega(t) \quad \text{pour } t \geq 1 \quad \text{et} \quad r \geq 1$$

(2) Il existe $\alpha \in]0,1[$; γ, $C > 0$ tels que :

$$t'^{-\alpha} N_\Omega(t') \leq \gamma.t^{-\alpha}.N_\Omega(t) \quad \text{pour } t' \geq t \geq C$$

(iii) (1) $\Omega = \mathbb{R}^n - K$, K compact et il existe un voisinage ouvert Ω_1 de K, des constantes C_1, $\eta > 0$ tels que :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{a_o(x,\xi)\leq t} d\xi \leq C_1.t^{-\eta}.N_\Omega(t) \quad \text{pour } t \geq 1$$

(2) = (2) de (ii).

Remarque : Sous l'hypothèse (i) on a le résultat plus précis : $N(t) = N_\Omega(t)(1+O(t^{-\theta\delta}))$ pour tout $\theta \in]0,1/2[$.

Exemples : 1) Si Ω est borné régulier et a_o uniformément elliptique on retrouve la formule de Garding.

2) Ω borné régulier et a_o formellement hypoelliptique de

force constante $P(\xi)$ avec $P(\xi) \geq C|\xi|^d$, $d > n$ alors (ii) est vérifiée.

3) Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ (i) est vérifiée dès que $a_o(x,\xi)$ est polynomiale en (x,ξ). Cela résulte du fait qu'il existe γ réel > 0, h rationnel > 0 et k entier $0 \leq k \leq 2n-1$ tels que :

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t^{-h} . (\mathrm{Log}\, t)^{-k} . \int_{a_o(x,\xi) \leq t} dx\, d\xi \right] = \gamma$$

Ce dernier point étant un corollaire du théorème de résolution des singularités de Hironaka.

4) $\Omega = \mathbb{R}^n - K$; $a_o(x,\xi) = P(\xi) + V(x)$ où V vérifie les propriétés de l'exemple a) de l'introduction et P est hypoelliptique à coefficients constants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators. Duke Math. J. 42 (1975) 1-42.

[2] R. Beals : A characterization of pseudodifferential operators and applications. Duke Math.J. 44 (1977).

[3] R. Beals : Communication personnelle .

[4] H. Kumano-Go and C. Tsutsumi : Complex powers of hypoelliptic pseudo-differential operators with applications. Osaka J. Math. 10 (1973) 147-174.

[5] R. T. Seeley : Complex power of an elliptic operator . Singular Intégral Proc. Symposia Pure Math. 10 A.M.S. (1967) 288-307.

[6] S. A. Smagin : Fractional powers of an hypoelliptic operator in $\mathbb{R}^n$. Soviet Math. Dokl.14 (1973) n° 2.585-588.

[7] V. N. Tulovskiǐ and M. A. Šubin : On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in $\mathbb{R}^n$. Math. USSR Sbornik 21- (1973) n°4 , 565-583.
