Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

B. Lascar

Le noyau de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte comme intégrale de chemins

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 1, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1977-1978

LE NOYAU DE L'EQUATION DES ONDES SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE COMPACTE COMME INTEGRALE DE CHEMINS

par B. LASCAR

Exposé n° I

15 Novembre 1977

Soit M une variété riemannienne compacte, la solution du problème de Cauchy pour la demi-équation des ondes :

$$\begin{cases} (1/i \quad \partial/\partial t + \Delta^{1/2})u(x,t) = 0 \\ u(x,0) \quad = f(x) \end{cases}$$

est donnée par un noyau $e(t,x,y)$ que la théorie d'Hörmander-Duistermaat (voir également [3]) permet de décrire comme un élément de $I^{-1/4}(M\times M\times \mathbb{R},\Lambda)$ où Λ est la variété Lagrangienne associée au flot géodésique.

Le problème est d'obtenir une représentation aussi géométrique que possible de $e(t,x,y)$ liée aux géodésiques de M. Pour ce faire Y. Colin de Verdière dans [2] propose la fonction phase $\varphi(\theta,\gamma,t) = \theta(E^{1/2}(\gamma) - t)$ définie sur $\mathbb{R}_*^+ \times \Omega(M) \times \mathbb{R}_*^+$; où $\Omega(M)$ est l'espace des chemins de classe H^1 sur M, $E(\gamma)$ étant l'énergie ; qui est non dégénérée à un sens raisonnable qu'il propose. Le calcul des variations montre facilement que $\Lambda_\varphi = \Lambda_{\mathbb{R}_*^+}$.

L'ennui est qu'alors on est sur un fibré de dimension infinie; et Colin de Verdière montre comment on peut se réduire à la dimension finie en étudiant $e(t,x,y)|_{]0,T[}$ où $T < +\infty$ est arbitraire. L'objet de notre travail est ainsi de donner un sens précis à une formule :

$$e(t,x,y)|_{]0,+\infty[} = \int_0^{+\infty} d\theta \int_{\Omega_{x,y}(M)} e^{i\theta(E^{1/2}(\gamma)-t)} a(\theta,t,d\gamma)$$

$\Omega_{x,y}(M)$ est l'espace des chemins d'origine $x \in M$ et d'extrémité $y \in M$; on verra que $\forall(\theta,t) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ $a(\theta,t,d\gamma)$ est une mesure bornée sur $\Omega_{x,y}(M)$ que nous décrivons plus précisément.

Un problème du même genre est posé par l'équation de Schrödinger avec un terme de potentiel en physique théorique et des formules comme celle ci-dessus s'appellent des intégrales de Feynmann; on pourra trouver dans S. Albeverio et R. Hoëgh-Krohn [1] une approche rigoureuse de ce problème au moins dans le cas où $M = \mathbb{R}^q$ et où $V(x)$ est un potentiel qui s'exprime comme la transformée de Fourier d'une mesure à décroissance exponentielle.

On peut noter que notre approche est radicalement différente de celle de [1]. Nous aurons besoin d'un théorème de phase stationnaire en dimension infinie, ceci fait ainsi l'objet de la 1ere partie. Nous appliquons ensuite ce résultat à la construction du noyau de l'équation des ondes.

§ 1. UN THEOREME DE PHASE STATIONNAIRE SUR UN ESPACE DE HILBERT.

Soit $E' \xhookrightarrow{i'} X' \simeq X \xrightarrow{i} E$ (i,X,E) un triplet d'espaces hilbertiens réels séparables, i injective, de Hilbert-Schmidt et à image dense, X est identifié à son dual, E' est ainsi un sous-espace de E ; la dualité (x,y) entre E' et E prolonge le produit scalaire (x,y) de X. La norme de X est $|x|$, celle de E $\|x\|$, celle de E' $\|x\|'$. On note ν_t la mesure de Radon sur E image par i de la mesure cylindrique gaussienne de variance t; on note ν'_t la mesure sur $X' \simeq X$ obtenue en radonifiant dans X' la mesure cylindrique gaussienne de E'.

Décomposant $i = \ell \circ j$ où $j : X \to X$ est de Hilbert-Schmidt symétrique positive, ℓ est isométrique $X \to E$; on obtient ainsi une base hilbertienne dans X $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteur propre de j; $a_n > 0$; $j(e_n) = 1/a_n \, e_n$; $\sum_n 1/a_n^2 < +\infty$; $\|x\|^2 = \sum_n x_n^2/a_n^2$ si $|x|^2 = \sum_n |x_n|^2$. Si E et F sont deux espaces de Banach, si E est réflexif et si E' vérifie la propriété d'approximation métrique on peut identifier $E' \hat{\otimes}_\pi F$ avec les applications nucléaires de $E \to F$.

On notera $C_b^\infty(E,F)$ l'espace des fonctions indéfiniment Fréchet différentiables dont les dérivées d'ordre quelconque sont uniformément bornées.

Le but de ce paragraphe est d'étudier le comportement asymptotique d'intégrales de la forme

$$I(\theta) = \int_E e^{-i\,\theta/2(A\alpha,\alpha)}\, a(\alpha,\theta)\, d\nu(\alpha)$$

où A est une forme quadratique définie positive sur E, ou encore $A : E \to E'$; $a(\alpha,\theta)$ devant vérifier des hypothèses appropriées. On note qu'en dimension finie on sait que $I(\theta) \sim \theta^{-n/2} \sum_j a_j \quad \theta^{-j+m}$ donc "$I(\theta)$ doit être d'ordre $-\infty$ en dimension ∞".

Nous voulons faire remarquer que notre résultat est tout à fait distinct de celui de Albeverio et Hoëgh-Krohn [1] puisque ceux-ci étudient des formes : $\tilde{\int} e^{i\theta|\alpha|^2/2}\, a(\alpha)d\alpha$ qui est une écriture formelle pour $\int e^{-i\theta^{-1}|\alpha|^2/2}\, d\mu(\alpha)$ si $\mathcal{F}(\mu) = a$, μ est une mesure ainsi $\int e^{-i\theta^{-1}|\alpha|^2/2}\, d\mu(\alpha) \sim O(1)$ qδ $\theta \to \infty$ alors qu'en dimension finie on a : $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\theta|\alpha|^2/2}\, a(\alpha)\, d\alpha = (2\pi\theta/i)^{-n/2} \int e^{-i\theta^{-1}\frac{|\alpha|^2}{2}}\, \hat{a}(\alpha) d\alpha$ et il y a donc déjà $\theta^{n/2}$ de différence.

Les hypothèses sur $a(\alpha,\theta)$ sont exprimées dans la définition :

Définition 1.1 :

$$T^{m,\rho}(E\times\mathbb{R}^+) = \{a(\alpha,\theta) \in C^\infty(E\times\mathbb{R}^+)\ ,\ \sup_{\theta\in\mathbb{R}^+}\|\partial_\theta^p D_\alpha^j\, a(\alpha,\theta).h\|_o \le C\|h\|^j(1+|\theta|)^{m-p+\rho j/2}$$

$$\forall\ h\in E,\ \theta\in\mathbb{R}^+,\ (j,p)\in\mathbb{N}^2\}.$$

On a noté pour $f \in C_b^o(E)$ qui est la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ sur E' $\|f(\alpha)\|_o = \sup_{i\in I}\|\mu_i\|$ où $\mu_i = \mathcal{F}^{-1}(f(\alpha)|_{E_i})$ μ_i est une mesure bornée sur $E'/E_i^o \simeq E_i'$, E_i décrit les sous-espaces de dimension finie de E.

Dans ces conditions l'image par i' de la mesure $\mu(\theta,d\eta)$ est une mesure de Radon bornée sur X qui a des moments d'ordre quelconque.

Remarque : 1) Lorsque $\dim E < +\infty$, si $a(\alpha,\theta)$ est à support compact en α et $a \in S^m_{1,\rho/2} \Rightarrow a \in T^{m,\rho}$.

2) Lorsque $\dim E = +\infty$, la condition $a(\alpha,\theta) \in T^{m,\rho}$ implique essentiellement que $a(\alpha,\theta)$ n'est pas à support borné ; il est prouvé dans [9] que $a(\alpha) = \varphi(\|\alpha\|^2)$ $\|a(\alpha)\|_o < +\infty \Rightarrow \varphi$ analytique.

Ceci va se révéler très génant pour isoler le comportement au voisinage des points critiques mais on va étudier ce qui se passe dans $T^{m,\rho}$.

La méthode consiste à faire un Parseval dans $I(\theta)$ avec d'une part $a(\alpha,\theta)$ et d'autre part $e^{-i\theta/2(A\alpha,\alpha)}\nu$. On obtient

$$I(\theta) = (\det(I+i\theta A)^{-1/2})\int_X \exp(-1/2((I+i\theta A)^{-1}\eta,\eta))\,\mu(\theta,d\eta)$$

$\mu(\theta,d\eta) = \mathcal{F}^{-1}(a(\alpha,\theta))$, $\det(I+i\theta A)^{-1/2}$ est le déterminant de Fredholm de l'application nucléaire dans $X(I+i\theta(i'Ai))^{-1/2}$, $I+i\theta A$ est inversible dans $\mathcal{L}(X^c)$. La justification de ce point demande un peu de soin car lorsque l'on écrit

$$I(\theta) = \int_E e^{-i\frac{\theta}{2}(A\alpha,\alpha)}\left(\int_X e^{-i\eta.\alpha}\,\mu(\theta,d\eta)\right)d\nu(\alpha)$$ le $\eta.\alpha$ de la 2ème intégrale est défini seulement comme une variable aléatoire $|\mu|(\theta,d\eta)$ mesurable obtenue en prolongeant par continuité à E l'application $X \mapsto L^p_{|\mu|(\theta,d\eta)}(X)$ qui à $\alpha \in X$ associe la fonction $\eta \to (\alpha.\eta)$. C'est une difficulté que l'on trouve fréquemment en dimension infinie ; il faut considérer des prolongements $\nu\otimes|\mu|(\theta,d\eta)$ mesurables convenables.

De toutes façons on a vu que $I(\theta)$ est d'ordre $-\infty$ en θ et on introduit ainsi $f^{-1}(\theta) = \det(I+i\theta A)^{-1/2} = \prod_{j=1}^{\infty}(1+i\theta\lambda_j)^{-1/2}$ si $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ sont les valeurs propres dans X de i'Ai . Développant $\exp(-1/2((I+i\theta A)^{-1}\eta,\eta))$

on est amené à estimer des intégrales de la forme.

<u>Lemme 1</u> : Soit $L_1,\dots,L_q$ des opérateurs de $\mathcal{L}(X^c)$ auxquels on associe par $i\,L_j\,i' = \hat{L}_j$ des opérateurs de $E^c \hat{\otimes}_\pi E^c$ on a l'inégalité :

$$\int_{X'} |(L_1\eta,\eta)|\dots|(L_q\eta,\eta)|\;|\mu|(\theta,d\eta) \le C\|D_\alpha^{2q}a(\alpha,\theta)\|_o\;\|\hat{L}_1\|_{E^c\hat{\otimes}E^c}\dots\|\hat{L}_q\|_{E^c\hat{\otimes}_\pi E^c}$$

La preuve est simple mais ce lemme est très utile en dimension infinie car il permet si μ est gaussienne par exemple d'associer aux opérateurs de Hilbert-Schmidt dans X des fonctions de $L^p_\nu(E,X)$.

<u>Lemme 2</u> : 1) $\lim\limits_{\theta\to+\infty} \|(I+i\theta A)^{-1}\|_{E\hat{\otimes}_\pi E} = 0$ quand $\theta\to\infty$

2) Mais si E est nucléaire on a $\|(I+i\theta A)^{-1}\|_{E\hat{\otimes}_\pi E} \le C\,(1+|\theta|)^{-1/2}$

<u>Preuve</u> : 1) Il est facile de voir que l'hypothèse sur A entraine $\|(I+i\theta A)^{-1}\|_{E\hat{\otimes}E} \le \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_j}{(1+\theta^2\lambda_j^2)^{1/2}}$ car $(I+i\theta A)^{-1} = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(1+i\theta\lambda_j)^{-1}\,\varepsilon_j\otimes\varepsilon_j$

où les ε_j sont orthonormés dans X.

2) Si $X \hookrightarrow E$ est nucléaire $\|(I+i\theta A)^{-1}\|_{E\hat{\otimes}E} \le C\|(I+i\theta)A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,E)}$

et $\|(I+i\theta A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,E)} \le \left(\sup\limits_j \dfrac{\lambda_j}{1+\theta^2\lambda_j^2}\right)^{1/2}$ car A est défini <u>positif</u> dans E

On a donc :

<u>Théorème 1</u> :On suppose que $X \overset{i}{\hookrightarrow} E$ est nucléaire. Soit A défini positif sur E, $a(\alpha,\theta) \in T^m(E\times\mathbb{R}^+)$. L'intégrale $I(\theta) = \int e^{-i\theta/2(A\alpha,\alpha)}a(\alpha,\theta)d\nu(\alpha) = f^{-1}(\theta)\,c(\theta)$ avec $c(\theta) \in S^m(\mathbb{R}^+)$ et on a le développement asymptotique

$$c(\theta) - \sum_{j=o}^{N-1}(-i)^j/2^j\,j\,!\,D_\alpha^{2j}a(0,\theta).(\mathrm{sym}_{2j}(I+i\theta A)^{-1\otimes j}) \in S^{m-N/2}(\mathbb{R}^+) \quad \forall N$$

Comme il nous faut considérer des intégrales $I(\theta)$ où on a une condition de support sur $a(\alpha,\theta)$ on étudie :

$I(\theta) = f(\theta)\int \mathcal{Z}(\alpha)\, a(\alpha,\theta)\, e^{-i\,\theta/2(A\alpha,\alpha)} d\nu(\alpha)$ où $\mathcal{Z}(\alpha) \in C_b^\infty(E)$ $\mathcal{Z} \equiv 1$ sur $\|\alpha\| < r$

supp $\mathcal{Z} \subset \{\alpha \,\|\alpha\| < 2r\}$ où $r \in \mathbb{R}_*^+$ est arbitraire. On fait alors l'hypothèse :

(H) : La forme quadratique sur X induite par A s'exprime par :

$(A\alpha,\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\alpha_j|^2$ où les ε_j sont orthonormés dans X et on a :

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\varepsilon} < +\infty$ avec $0 < \varepsilon < 1/2$.

Sous (H) on a aisément : $\begin{cases} |f(\theta)| \leq \exp(1/2\varepsilon\ \theta^{\varepsilon}(\sum_j \lambda_j^{\varepsilon})) \\ \|(I + i\theta A)^{-1}\|_{E \hat{\otimes} E} \leq C\ \theta^{-1+\varepsilon}(\sum_j \lambda_j^{\varepsilon}) \end{cases}$

On suppose également que $a(\alpha,\theta) \in T^{m,\rho}$ avec $1-(\rho + \varepsilon) = s > 0$ et on prouve alors :

<u>Lemme 3</u> : Sous l'hypothèse (H) si $a(\alpha,\theta) \in T^{m,\rho}$ avec $s = 1-(\rho+\varepsilon) > 0$

$I(\theta) = \int a(\alpha,\theta) e^{-i/2(A\alpha,\alpha)} d\nu(\alpha) = c(\theta)\, f^{-1}(\theta)$ avec $c(\theta) \in S^m(\mathbb{R}^+)$ et on a le développement $c(\theta) - \sum_{j=o}^{N-1} c_j(\theta) \in S^{m-sN}(\mathbb{R}^+)$ $c_j(\theta)$ s'exprime comme au théorème 1.

Posant $\psi(\alpha,\theta) = \chi(\theta)\int_o^{+\infty} \psi(t) e^{-\theta^{\rho}\|\alpha\|^2 t/2} dt$ avec $\psi(t) \in C_o^\infty(\mathbb{R}^+)$ supp $\psi \subset]c,+\infty[$ $c > 0$ $\int_o^{+\infty} \psi(t)dt = 1$; $\chi(\theta) \equiv 0$ pour $|\theta| \leq 1$ $\chi(\theta) \equiv 1$ pour $|\theta| > 2$, on voit que $\psi(0,\theta) = \chi(\theta)$ et que $\psi(\alpha,\theta) \in T^{o,\rho}$.

Ceci permet d'obtenir la proposition qui nous sera utile dans la suite.

<u>Proposition 1</u> : Supposons sous (H) satisfaite avec $\varepsilon < 1/2$. $\forall r > 0$, $\forall\ c(\theta) \in S^m(\mathbb{R}^+)$ $\exists\ a(\alpha,\theta) \in T^{m,\rho}(X,E)$ telle que

$$f(\theta)\int \mathcal{Z}(\alpha)\, e^{-i\,\theta/2\,(A\alpha,\alpha)} a(\alpha,\theta)\, d\nu(\alpha) = c(\theta) \text{ modulo } S^{-\infty}(\mathbb{R}^+)$$

où $\mathcal{Z}(\alpha) \in C_b^\infty(E)$ supp $\mathcal{Z} \subset Br$.

On aura également besoin de versions avec paramètres de ce résultat qui s'obtiennent d'une façon analogue.

§ 2. LE NOYAU DE L'EQUATION DES ONDES

On a : $\Omega(M) = \{\gamma : [0,1] \to M$ de classe $H^1\}$ $\pi : \Omega(M) \mapsto M\times M$ associe à $\gamma \to (\gamma(0),\gamma(1))$, on rappelle que $\Omega(M) \subset C(M)$ (chemins continus cette condition est essentielle pour que $\Omega(M)$ soit bien défini).

On a $E(\gamma) = \int_0^1 g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$ g désigne la métrique riemannienne de M. On peut munir $\Omega(M)$ d'une structure de C^∞ variété différentielle que nous allons rappeler.

$\mathcal{E} = [0,1]\times M$ fibré sur $[0,1]$ (muni de sa structure de variété à bord compacte) $H^1([0,1],M) = \Omega(M)$ est l'espace de sections globales de classe H^1.

$VT\mathcal{E}$ est l'espace des vecteurs tangents verticaux de $\mathcal{E}$
$VT\mathcal{E} = \{(t,x,v) \in [0,1] \times TM\}$ qui est un fibré vectoriel sur $\mathcal{E}$.

$VT\mathcal{E}$ est muni d'une structure riemannienne par
$(t,x,v).(t,x,v') = g_x(v,v')$. On en déduit une application Exp : $VT\mathcal{E} \to \mathcal{E}$
$(t,x,v) \to (t,\exp_x v)$ au voisinage de la fibre nulle.

Soit $\gamma_o \in \Omega(M)$ une section de $\mathcal{E}$; $VT(\mathcal{E},\gamma_o) = \{(t;\gamma_o(t),v)$ $v \in T_{\gamma_o(t)}M$ $t \in [0,1]\}$ est aussi un fibré vectoriel sur $[0,1]$ mais seulement de classe H^1. $H^1(VT(\mathcal{E},\gamma_o))$ est donc un espace vectoriel.

$K(\gamma_o) = \{\alpha \in H^1(VT(\mathcal{E},\gamma_o)),\ \|\alpha(t)\| < \varepsilon \quad t\in[0,1]\}$ est un ouvert de $H^1(VT(\mathcal{E},\gamma_o))$.
Si $\varepsilon<\rho$ l'application $\alpha \overset{\varphi_{\gamma_o}}{\longmapsto} \operatorname{Exp}\alpha$ réalise une bijection de K_{γ_o} sur

$S_\varepsilon(\gamma_o) = \{\gamma \in \Omega(M) \ \sup\limits_{t\in(0,1)} \overline{\gamma(t)\gamma_o(t)} < \varepsilon\}$. Les applications φ_{γ_o} permettent de définir la structure différentielle de $\Omega(M)$.

On peut montrer dans ces conditions que $\gamma \to E(\gamma)$ est C^∞ $\Omega(M)\to \mathbb{R}^+$.
Λ est associée au flot géodésique. Si $\varphi(\theta,\gamma,t) = \theta(E^{1/2}(\gamma)-t)$, Colin de Verdière montre que $C_\varphi = \{(\theta,\gamma,t)\,|\,\gamma$ géodésique de longueur $t\}$ car :
$(d_vE)(\gamma).\delta\gamma = 2\int_0^1 g(\frac{D}{dt}\delta\gamma,\dot\gamma)dt = 0 \quad \forall\ \delta\gamma \in VT_\gamma\Omega(M)$ $(\delta\gamma(0) = \delta\gamma(1) = 0)$
implique $\gamma \in C^\infty$ et $\frac{D}{dt}\dot\gamma = 0$ ($\frac{D}{dt}$ dérivée covariante le long de γ).

Il est facile alors de voir que $(dE)(\gamma).\delta\gamma = g(\delta\gamma(1),\dot\gamma(1)) - g(\delta\gamma(0),\gamma(0))$ et donc

$$[i_\varphi(\theta,\gamma,t) = (\gamma(0),-\theta\, E^{-1/2}(\gamma)(\dot\gamma(0))^\# ;\ \gamma(1),\ \theta E^{-1/2}(\gamma)(\dot\gamma(1))^\#,t,-\theta)]$$

soit $i_\varphi(C_\varphi) = \Lambda_{\mathbb{R}^+_*}$ (on a noté $\#$: $TM \to T^*M$ associé à la métrique). On va s'inspirer pour augmenter le nombre des variables de l'étude chemins géodésiques par morceaux de Milnor [7] et également de Y. Colin de Verdière [2].

Lemme 2.1 : Soit $K_T(M) = \{$espace des géodésiques de longueur $\leq T$ sur $M\}$ $K_T(M)$ est une partie compacte de $\Omega(M)$, $\forall\, T > 0$.

Preuve : Soit ρ le rayon d'injectivité de M, $t_1 \in \,]0,1[$ tel que $Tt_1 < \rho$ l'application $e_{o,t_1}(\gamma) = (\gamma(0),\gamma(t_1))$ est une bijection bicontinue de $K_T(M)$ sur $\{(x_o,x_1) \in M^2,\ \overline{x_o x_1} \leq t_1 T\}$. On se sert du fait que $\gamma(0)$ et $\gamma(t_1)$ ne sont pas conjugués le long de γ.

On définit comme [2] :

Définition 2.1 : 1) Soit $M_o^{N+1} = \{\tilde{x} = (x,x_1,\ldots,x_{N-1},y) \in M^{N+1}$ tels que $\overline{x_i x_{i+1}} < \rho\}$ on fait correspondre bijectivement à $\tilde{x}$ un chemin de $\Omega(M)$ géodésique par morceaux par : $w(\tilde{x})(i/N) = x_i$ $0 \leq i \leq N$ $w(\tilde{x})$ est sur $]i/N,\ i+1/N[$ la géodésique minimisante $\widehat{x_i x_{i+1}}$ parcourue avec la vitesse $N\overline{x_i x_{i+1}}$.

2) $\tilde{\Omega}^N(M) = \{\gamma \in \Omega(M) \,|\, \gamma(0),\ldots,\gamma(1) \in M_o^{N+1}$ et tels que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} d(\gamma(t), w(\gamma(0), w(\gamma(0),\gamma(1/N),\ldots,\gamma(1))(t)) < \rho\} .$$

Si $T/N < \rho$ $\tilde{\Omega}^N(M)$ est un voisinage dans $\Omega(M)$ de $K_T(M)$, car étant donné deux points x_o et x_1 $\overline{x_o x_1} < \rho$ la géodésique $t \mapsto \exp_{x_o}(N t \exp_{x_o}^{-1}(x_1))$ dépend continuement de x_o et x_1. On fixe maintenant $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $T/N < \rho$.

Soit U ouvert (supposé assez petit de M) $\tilde{\Omega}_U^N(M) = \{\gamma \in \tilde{\Omega}^N(M) . \gamma(0) \in U\}$ On définit dans $\tilde{\Omega}_N^N(M)$ une application α_U de la manière suivante.

Soit $w(\gamma)(t) = w(\gamma(0),\ldots,\gamma(1))(t)$, $\exp^{-1}_{w(\gamma)(t)}(\gamma(t)) \in T_{w(\gamma)(t)}M$ (et même à la boule de rayon ρ) est bien défini ; $\tau_{w(t)x} X \in T_x M, X \in T_{w(t)}M$, $x = \gamma(0)$, est défini par transport parallèle successifs le long de $\widehat{w(t)\, w(\frac{i-1}{N})}$, $\widehat{w(\frac{i-1}{N})\, w(\frac{i-2}{N})}$... jusqu'à $w(0) = x$ si $t \in [\frac{i}{N},\frac{i-1}{N}]$. On posera donc $\alpha_U(\gamma) = (w(\gamma), s(\gamma(0)).\tau_{w(t)\gamma(0)}(\exp^{-1}_{w(\gamma)(t)}(\gamma(t)))$ où $s(x)$ pour $x \in U$ est une application repère orthonormée $T_x M \to \mathbb{R}^q$. On note que $\alpha_U(\gamma) \in W_N^U \times T_o$ où $T_o = \{\gamma' \in H^1([0,1],\mathbb{R}^q)$, $\gamma'(0) = \gamma'(1/N) \ldots = \gamma'(1) = 0$ $\|\gamma'(t)\| < \rho\}$ est un ouvert de l'espace hilbertien T.

Proposition 2.1 : L'application $\alpha_U : \tilde{\Omega}_U^N(M) \mapsto W_N^U \times T_o$ est un C^∞ difféomorphisme. On notera ainsi β_U l'application réciproque.
On utilise pour ce faire les cartes sur $\Omega(M)$ définies plus haut. Ceci permet donc d'utiliser sur $\tilde{\Omega}_U^N(M)$ la carte α_U. On étudie la fonction $(E \circ \beta_v)(w,\gamma')$. (On note β au lieu de β_U).

Proposition 2.2 : 1) $\forall\, w \in W_N^U$ $\quad d_{\gamma'}(E \circ \beta)(w,0) = 0$

2) Soit $w_o \in K_T(U)$, $d^2_{\gamma',\gamma'}(E \circ \beta)(w_o,0)$ est définie positive sur T.

Démonstration : Pour 1) on utilise $d_{\gamma'}(E\circ\beta)(w,0) = (d_v E)(w).\ (d\beta)(w,0)(0,.)$. Comme $(d\beta)(w,0)(0,.)$ réalise un isomorphisme topologique de T sur l'espace des champs de vecteurs de classes H^1 au dessus de w nuls aux points i/N, $d_{\gamma'}(E \circ \beta)(w,0) = 0$ résulte de la formule de la variation première (voir Milnor [7]).

Pour 2) $\quad (d_v E)(w_o) = 0$ et $\quad w_o \in C^\infty$. Vu ce qui précède il suffit de voir que $d_v(d_v E)(w_o)$ est un isomorphisme positif $VT_{w_o}\Omega(M) \to VT_{w_o}(\Omega(M))'$ or

$$-\frac{1}{2} d_v(d_v E)(w_o)(\delta\gamma, \delta\gamma_1) = \int_o^1 g(\delta\gamma_1, [(\frac{D}{dt})^2 + R(\dot w_o, .)\dot w_o]\delta\gamma)dt$$

pour $\delta\gamma$ et $\delta\gamma_1 \in C^\infty(VT(\mathcal{E}, w_o))$, le résultat se déduit alors de résultats de J. Milnor [7], et de la théorie du problème elliptique.

Proposition 8.3 : Soit $\gamma^o \in K_T(U)$, $E(\gamma^o) \neq 0$ il existe un voisinage W_o de γ^o, un voisinage U_o de 0 dans T_o et une application C^∞, $W_o \times U_o \mapsto W_o \times T_o$ $(w,\gamma') \xrightarrow{\tilde\phi} (w, \phi(w,\gamma'))$ telle que :

(i) $\tilde\phi$ est un C^∞ difféomorphisme sur $W_o \times U_o$

(ii) $E^{1/2} \circ \beta(w,\gamma') = E^{1/2} \circ \beta(w,0) + (A^o(w).\phi(w,\gamma'), \phi(w,\gamma'))$

Ceci se déduit du lemme de Morse.

On termine en prouvant que : pour $\lambda(t) \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ $\operatorname{supp}\lambda \subset]0,T[$

$$\lambda(t)e(t,x,y) = \sum_{\nu \in \text{ensemble fini}} \int_o^{+\infty} d\theta \int_{(W_N)_{x,y}} \lambda(t)\, a_\nu(t,w,\theta) e^{i(E^{1/2}(w)-t)\theta} dw_{x,y} + $$

$$+ k(t,x,y)\lambda(t)$$

avec les conditions suivantes : $\begin{cases} a_\nu(t,w,\theta) \in C^\infty(\mathbb{R} \times M^{N+1} \times \mathbb{R}^+_*) \\ \text{supp conique } a_\nu(t,w,\theta) \subset\subset\ ]0,T[\, \times W_\nu \times \mathbb{R}^+_* \end{cases}$

$k(t,x,y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times M \times M)$.

A l'aide de la proposition 1, on écrit

$$a_\nu(t,w,\theta) \equiv \int \tilde{a}_\nu(t,w,\xi,\theta)\, e^{i\,\theta/2(A_\nu P_w\xi, P_w\xi)} dv(\xi)$$

(modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}\times M\times M\times \mathbb{R}^+_*)$)

avec $\begin{cases} a_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^+, C^\infty_b(\mathbb{R}\times M^{N+1}\times T)) \\ \text{supp conique } a_\nu \subset \,]0,T[\, \times W_\nu \times Br/2 \times \mathbb{R}^+_* \end{cases}$

L'application $w \to P_w$ est C^∞ $W_\nu \to GL(T)$, on note $P : (w,\gamma') \to (w,P_w\gamma')$. Posant ainsi $\tilde{\Omega}_\nu = W_\nu \times B_{r/2}$ (ouvert de $M^{N+1} \times T$), $\lambda_\nu = P_\nu^{-1} \circ \tilde{\Phi}_\nu \circ \beta_\nu$ réalise un difféomorphisme d'un ouvert $\Omega_\nu(M) \to \tilde{\Omega}_\nu$. Soit T^ν la mesure sur $[\Omega_\nu(M)]_{x,y}$ définie par $\lambda_\nu^{-1}((dw)_{x,y} \otimes \nu)$ et $\begin{cases} a_\nu(t,\gamma,\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}\times \Omega(M)\times \mathbb{R}^+_*) \\ \text{supp conique } a_\nu \subset \,]0,T[\, \times \Omega_\nu(M)\times \mathbb{R}^+_* \end{cases}$

on a écrit :

$$\lambda(t)\, e(t,x,y) = \sum_{\nu\in \text{partie finie}} \int_0^{+\infty} d\theta \int_{(\Omega(M))_{x,y}} a_\nu(t,\gamma,\theta)\, e^{i\theta(E^{1/2}(\gamma)-t)} dT^\nu(\gamma)$$

$$+ \tilde{k}(t,x,y).$$

On écrit sur $]0,+\infty[$, $1 = \sum_n \lambda_n(t)$ avec $\lambda_n(t) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^+)$ supp $\lambda_n \subset]0,+\infty[$ la somme étant localement finie sur $]0,+\infty[$. On montre ensuite que l'on peut également écrire le noyau C^∞ sous une forme analogue.
Pour exprimer le résultat obtenu il est nécessaire d'introduire une définition :

<u>Définitions</u> : 1) Soit (F,M,π) un fibré differentiel sur une variété riemannienne compacte M de dimension q. On désigne par

$$\mathcal{A} = \{(\Omega_\nu, \lambda_\nu, \tilde{\Omega}_\nu, \mu_\nu)_{\nu\in N}\}$$

où Ω_ν est un famille indexée par $\nu \in N$ d'ouverts de F, les λ_ν sont des C^∞ difféomorphismes $\Omega_\nu \xrightarrow{\lambda_\nu} \tilde{\Omega}_\nu$ où $\tilde{\Omega}_\nu$ est un ouvert de $M\times E_\nu$ où E_ν est un espace hilbertien réel séparable, λ_ν préserve les fibres ; enfin μ_ν est une mesure gaussienne sur E_ν.

On a alors sur chaque Ω_ν une mesure bornée $T^\nu = \lambda_\nu^{-1}(dx\otimes \mu_\nu|_{\tilde{\Omega}_\nu})$.

2) Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on désigne par :

$C^\infty_{(\mathfrak{a})}(X\times F) = \{a(x,d\gamma) : x\in X \mapsto M(F)$ (espace des mesures de Radon bornées sur F)| $a(x,d\gamma)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$a(x,d\gamma) = \sum_{\nu\in N} a_\nu(x,\gamma)T^\nu(d\gamma)$$

où $a_\nu(x,\gamma) \in C^\infty(X\times F)$ $\operatorname{supp} a_\nu \subset X\times\Omega_\nu$, on suppose en outre que $\forall\, x\in X$ les fonctions $\gamma \to a_\nu(x,\gamma)$ sont bornées et en x elles sont nulles sauf pour un nombre fini des indices$\}$ que localement

3) On fait remarquer que lorsque F est compact de dimension finie (les espaces E_ν sont alors de dimension finie) $C^\infty_{(\mathfrak{a})}(X,F) =$ $\{$mesures sur F de la forme $a(x,\gamma)\,d\mu(\gamma)$ où $a(x,\gamma)\in C^\infty(X\times F)$ $\operatorname{supp} a\subset X\times\bigcup_\nu\Omega_\nu\}$ μ étant une mesure lebesguienne arbitraire sur F. On peut ainsi considérer un élément de $C^\infty_{(\mathfrak{a})}$ comme une mesure "C^∞" supportée par un voisinage de $\bigcup_{\nu\in N}\Omega_\nu$.

4) $X\times F\times\mathbb{R}^+_*$ est ainsi un fibré conique au-dessus de $X\times M$. On désigne par $(\mathfrak{a},f)$ le couple formé par un ensemble $\mathfrak{a}$ défini plus haut et d'une famille de poids sur $\mathbb{R}^+$: $f_\nu^{1/2}(\theta) = \prod_{j=1}^\infty (1+i\theta\lambda_j^\nu)^{1/2}$ avec $\lambda_j^\nu > 0$ et $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^\nu < +\infty$ quand $\dim E_\nu = +\infty$, seuls N_ν des λ_j^ν sont $\neq 0$ lorsque $\dim E_\nu = N_\nu$.

L'espace des symboles de type $o<\rho<1$ et de degré $m+(f)/2$ est

$$S^{m+f/2}_{(\mathfrak{a}),\rho}(X\times F\times\mathbb{R}^+_*) = \{a(x,\theta,d\gamma)\in C^\infty_{(\mathfrak{a})}(X\times\mathbb{R}^+_*\times F)\,|$$

on a une écriture :

$$a(x,\theta,d\gamma) = \sum_{\nu\in N} a_\nu(x,\gamma,\theta)\,T^\nu(d\gamma)$$

avec des conditions sur les supports coniques cette fois et en outre si $\tilde{a}_\nu(x,\lambda_\nu^{-1}(\gamma),\theta) = a_\nu(x,\gamma,\theta)$, $\tilde{a}_\nu(x,y,\alpha,\theta)\in f_\nu^{+1/2}(\theta)\,S^m_{\rho 1-\rho}(X\times M\times E_\nu\times\mathbb{R}^+_*)\}$.

On rappelle ainsi qu'une fonction $a(x,y,\alpha,\theta)\in S^m_{\rho\,1-\rho}(X\times M\times E\times\mathbb{R}^+_*)$ si dans une carte locale quelconque de M on a une fonction qui vérifie des estimations :

$$\sup_{\substack{x \in K \subset\subset X \\ y \in L \subset\subset \mathcal{U}}} |D_x^\lambda D_y^\mu D_\alpha^\ell a(x,y,\alpha,\theta).h| \leq C \|h\|^\ell (1+|\theta|)^{m-(1-\rho)\ell+\rho(|\lambda|+|\mu|+\ell)},$$

$\forall h \in E$, $\alpha \in E$, $\theta \in \mathbb{R}^+$.

Dans ces conditions lorsque F est un fibré dont la dimension des fibres est N la classe $S^{m+f/2}_{(\mathcal{a}),\rho}(X \times F \times \mathbb{R}^+_*)$ est effectivement $S^{m+N/2}_{1-\rho,\rho}(X \times F \times \mathbb{R}^+_*)$ (au sens de [5]) $X \times F \times \mathbb{R}^+_*$ étant un fibré conique sur $X \times M$.

La donnée d'une mesure de $C^\infty_{(\mathcal{a})}(X \times F)$ détermine $\forall\, y \in M$, $\forall x \in X$ une mesure sur F_y par :

$$\varphi \in C_b^o(F_y) \to \sum_{\nu \in N} \int_{\lambda_\nu(\Omega_\nu \cap F_y)} \varphi \circ \lambda_\nu^{-1}(y,\xi)\, \tilde{a}_\nu(x,y,\xi)\, d\mu_\nu(\xi)$$

On vérifie en effet que cette expression ne dépend que de la mesure $a(x,d\gamma) \in C^\infty_{(\mathcal{a})}$.

<u>Théorème</u> : Soit $e(t,x,y)$ le noyau de l'équation des ondes d'une variété riemannienne M compacte de dimension q. On peut trouver une famille $\mathcal{a}$ d'ouverts $\Omega_\nu(M)$ de $\Omega(M)$ dont la réunion est un voisinage de l'espace des géodésiques de M ; des C^∞ difféomorphismes $\lambda_\nu : \Omega_\nu \to \tilde{\Omega}_\nu$ où $\tilde{\Omega}_\nu$ est un ouvert de $M^2 \times (\mathbb{R}^q)^{N_\nu -1} \times E_\nu$, $E_\nu = \{\gamma' \in H^1([0,1], \mathbb{R}^q) \,|\, \gamma'(i/N_\nu) = 0 \quad 0 \leq i \leq N_\nu\}$; des mesures gaussiennes μ_ν sur $(\mathbb{R}^q)^{N_\nu-1} \times E_\nu$; des poids $f_\nu^{1/2}(\theta)$ sur $\mathbb{R}^+$; une mesure

$$a(t,\theta,d\gamma) \in S^{-1\ +q/2\ +f/2}_{(\mathcal{a}),\rho}(\mathbb{R}^+_* \times \Omega(M) \times \mathbb{R}^+_*)$$

telle que :

$$e(t,x,y)|_{]0,+\infty[} = \int_0^{+\infty} d\theta \int_{(\Omega(M))_{x,y}} e^{i\theta(E^{1/2}(\gamma)-t)}\, a(t,\theta,d\gamma).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Albeverio, R. J. Høegh-Krohn : Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics, Inventiones Math. Juin 1977.

[2] Y. Colin de Verdière : Paramétrix de l'équation des ondes. Applications à la formule de Poisson. Indices de Morse et Maslov. Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1974-1975.

[3] J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Inventiones Math. vol. 29 (1975).

[4] J. J. Duistermaat, L. Hörmander : Fourier Integral Operators II. Acta Math. 128 (1972).

[5] L. Hörmander : Fourier Integral operators I. Acta Math. 127 (1971).

[6] B. Lascar : Operateurs pseudo-différentiels en dimension infinie. Applications à l'hypoéllipticité et la résolubilité dans des classes de fonctions höldériennes et de distribution pour des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques. A paraître.

[7] J. Milnor : Morse theory. Annals of Math. Studies n° 51. Princeton.

[8] L. Schwartz : Radon measures on arbitray topological spaces and cylindrical measures. Oxford University Press.

[9] S. I. Sobolev : On a certain class of pseudo-differential operators with an infinite number of variables whose symbols depend on a quadratic form. Vestnik Moskvoskogo Universiteta Mat. vol. 29 n°3 p.22-31 1974.