G. Grubb

Sur la résolvante d'un problème aux limites pseudo-différentiel

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 14, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

SUR LA RESOLVANTE D'UN PROBLEME AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIEL

par G. GRUBB

Exposé n° XIV

14 Mars 1978

Les propriétés spectrales des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété sans bord Ω ont été étudiées par plusieurs auteurs. Notamment, pour les o.ps.d. classiques, Seeley [12] a donné l'estimation principale du comportement asymptotique des valeurs propres (quand Ω est compacte) ; Hörmander [9] a donné une estimation très précise de la fonction spectrale pour un o.ps.d. scalaire (en remarquant que les résultats s'étendent aux systèmes où les valeurs propres du symbole principal sont distincts) et Duistermaat-Guillemin [4] ont étendu cette étude aux systèmes où les v.p. du symbole principal sont de multiplicité constante. Récemment, Robert [11] a obtenu des résultats pour certains o.ps.d. appartenant aux classes de Beals. Signalons aussi que Kozevnikov [10] a trouvé l'estimation principale du comportement asymptotique des v.p. d'une système d'o.ps.d., elliptique au sens de Douglis et Nirenberg, sur une variété compacte sans bord.

Comme conséquence importante de ces travaux, on obtient des estimations spectrales pour les problèmes aux limites différentiels, étudiés d'ailleurs par Agmon [1], Agmon-Kannai [2] et beaucoup d'autres. Dans une étude des problèmes aux limites pour les systèmes (différentiels) elliptiques de Douglis-Nirenberg, nous avons rencontré la nécessité d'étudier les propriétés spectrales des <u>problèmes aux limites pseudo-différentiels</u> [7], [8], [6]. Peu de choses semblent avoir été faites dans cette direction ; à notre connaissance il y a un résultat particulier (qui ne s'applique pas aux o.ps.d. fortement elliptiques) de Bui An Ton [14], et il y a des résultats pour le problème de Dirichlet dans [11].

§ 1. <u>RAPPELS DE LA THEORIE DE BOUTET DE MONVEL</u> [3]

Nous considérons des problèmes aux limites qui entrent dans la théorie de Boutet de Monvel [3], que nous allons rappeler rapidement.

Soit $\bar{\Omega}$ une variété compacte C^∞ de dimension $n \geq 1$, de bord Γ et d'intérieur Ω ; et soit Σ une variété C^∞ ouverte de dimension n contenant $\bar{\Omega}$ et muni d'une densité dx. Soit $\tilde{E}$ un fibré vectoriel C^∞ de dimension $q \geq 1$ sur Σ, muni d'une norme hermitienne, et soit $E = \tilde{E}|_{\bar{\Omega}}$. On peut alors définir les espaces L^2 et de Sobolev de sections dans $\tilde{E}$, E ou $E|_\Gamma$ (notés $L^2(\tilde{E})$, $H^s(\tilde{E})$ etc...). Il est convenable de choisir une coordonnée normale x_n telle que les points de $\bar{\Omega}$ près de Γ sont représentés par $x = (x', x_n) \in \Gamma \times [0,1[$.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel classique dans $\widetilde{E}$; i.e. le symbole de P a un développement asymptotique (en coordonnées locales)

$$\sigma(P)(x,\xi) \sim \sum_{j=o}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

où les p_j sont des fonctions $q \times q$-matricielles C^∞ sur $U \times \mathbb{R}^n$ (U ouvert $\subset \mathbb{R}^n$) homogènes de degré $\ell - j$ en ξ ; l'entier ℓ étant l'ordre de P. Le symbole principal $p_o(x,\xi)$ sera noté $p(x,\xi)$. Définissons l'opérateur P_Ω sur Ω par

$$P_\Omega = r^+ Pe^+ \quad , \text{ où } e^+u = \begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Sigma\setminus\Omega \end{cases}$$

et r^+ est la restriction $v \mapsto v|_\Omega$. (Nous utilisons plus tard les mêmes notations avec $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ au lieu de Ω, Σ). Alors P_Ω est continu de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-\ell}(\Omega)$ pour $s > -\frac{1}{2}$, si P a la <u>propriété de transmission</u> ([3]) : dans des coordonnées locales (x', x_n, ξ', ξ_n) près de Γ (où $\{x_n = 0\}$ représente Γ) on a pour tout α, β, tout (x', ξ') avec $\xi' \neq 0$ que $D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(P)(x', 0, \xi', \xi_n)$ est dans H par rapport à ξ_n. Ici H désigne le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions $f(t)$ tels qu'il existe un entier p pour lequel $(1+z)^p f(\frac{1}{i}\frac{1-z}{1+z})$ est C^∞ sur le cercle $\{|z| = 1\}$ entier.

Avec P_Ω on considère un système d'opérateurs

$$\text{(1)} \qquad A = \begin{pmatrix} P_\Omega + G & K \\ T & Q \end{pmatrix} = \begin{matrix} C^\infty(E) \\ \times \\ C^\infty(F_1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(E) \\ \times \\ C^\infty(F_2) \end{matrix}$$

où F_1 et F_2 sont des fibrés vectoriels sur Γ de dimension N_1 resp. N_2 . T désigne un opérateur de trace ("allant de Ω en Γ"), K un opérateur de Poisson (allant de Γ en Ω), Q un o.ps.d. sur Γ, et G un <u>opérateur de Green singulier</u> (allant de Ω en Ω), opérateur du genre $\Sigma K_j T_j$ où les K_j resp. T_j sont des opérateurs de Poisson resp. de trace. L'opérateur entier A est appelé un opérateur <u>de Green</u> .

On associe à A le symbole principal <u>intérieur</u>

$$\sigma_\Omega^o(A)(x,\xi) = p(x,\xi), \text{ fonction matricielle sur } T^*(\bar{\Omega})\setminus 0,$$

et le symbole principal <u>au bord</u>

$$\sigma^o_\Gamma(A)(x',\xi') = \begin{pmatrix} \sigma^o_\Gamma(P)(x',\xi') + \sigma^o_\Gamma(G)(x',\xi') & \sigma^o_\Gamma(K)(x',\xi') \\ \sigma^o_\Gamma(T)(x',\xi') & \sigma^o(Q)(x',\xi') \end{pmatrix}$$

famille <u>d'opérateurs en une dimension</u> paramétrisée par $(x',\xi') \in T^*(\Gamma)\backslash 0$. Dans [3], ces derniers opérateurs (dites "de Wiener-Hopf") opèrent sur H^+, un certain sous-espace de H qui peut être défini par

$$H^+ = \mathcal{F}(e^+ \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+))$$

(où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier, et $\mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+) = r^+ \mathcal{S}(\mathbb{R})$). Nous préférons travailler avec la famille d'opérateurs qu'on obtient de $\sigma^o_\Gamma(A)(x',\xi')$ après une transformation de Fourier inverse. Alors en effet $\sigma^o_\Gamma(P)(x',\xi')$ sera (en chaque (x',ξ')) remplacé par l'opérateur $p(x',\xi',D_{x_n})_\Omega$, où $p(x',\xi',D_{x_n})$ est l'o.ps.d. sur $\mathbb{R}$ à symbole (en ξ_n) $p(x',0,\xi',\xi_n)$, et $p(x',\xi',D_{x_n})_\Omega = r^+p(x',\xi',D_{x_n})e^+$. De manière analogue, si T est un opérateur de trace classique $T = \Sigma\, t_j(x',D_{x'})\gamma_j$ (où $\gamma_j u = (D^j_{x_n} u)|_{x_n=o}$), alors son symbole au bord devient dans notre terminologie $t(x',\xi',D_{x_n}) = \Sigma\, t_j(x',\xi')\gamma_j$ (où $\Sigma\, t_j(x',\xi')\xi^j_n$ est le symbole principal de $\Sigma\, T_j(x',D_{x'})D^j_{x_n}$). Le symbole principal au bord entier sera remplacé par un opérateur (pour chaque (x',ξ')):

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} p(x',\xi',D_{x_n})_\Omega + g(x',\xi',D_{x_n}) & k(x',\xi',D_{x_n}) \\ t(x',\xi',D_{x_n}) & q(x',\xi') \end{pmatrix} : \begin{matrix} \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^q \\ \times \\ \mathbb{C}^{N_1} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)^q \\ \times \\ \mathbb{C}^{N_2} \end{matrix} .$$

On dit que $A = \begin{pmatrix} P_\Omega + G & K \\ T & Q \end{pmatrix}$ est <u>elliptique</u> si

(i) $p(x,\xi)(=\sigma^0_\Omega(A)(x,\xi))$ est inversible pour chaque $(x,\xi)\in T^*(\bar\Omega)\backslash 0$,

(ii) $\begin{pmatrix} p_\Omega + g & k \\ t & q \end{pmatrix}(x',\xi',D_{x_n})$ (ou $\sigma^0_\Gamma(A)(x',\xi')$) est inversible pour chaque $(x',\xi')\in T^*(\Gamma)\backslash 0$.

Quand A est elliptique, il a une paramétrixe

$$\tilde A = \begin{pmatrix} \tilde P_\Omega + \tilde G & \tilde K \\ \tilde T & \tilde Q \end{pmatrix}$$

où $\tilde P$ est une paramétrixe de P (sur Σ) et $\tilde A$ est encore un opérateur de Green.

Il est important de remarquer qu'on opère sur trois niveaux :

1) les opérateurs sur Ω,
2) les symboles d'o.ps.d., fonctions (matricielles) de (x,ξ),
3) les symboles au bord, opérateurs sur $\mathbb{R}_+$ (paramétrisés par (x',ξ')).

Soulignons qu'il n'est nullement nécessaire que $N_1 = N_2$ dans (2). En effet, si P est un opérateur elliptique différentiel, on considère d'habitude des systèmes de la forme $\binom{P_\Omega}{T}$ avec T opérateur de trace classique ; alors la condition (ii) pour l'ellipticité est la condition habituelle de Shapiro-Lopatinski, qui entraîne l'existence d'une paramétrixe $(\tilde P_\Omega + \tilde G \quad \tilde K)$ (encore elliptique, à paramétrixe $\binom{P_\Omega}{T}$). Pour $\binom{P_\Omega}{T}$, $N_1 = 0$ et $N_2 = \frac{1}{2}\ell\, q$ dans le cas elliptique.

§ 2. LA RESOLVANTE D'UN PROBLEME AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIEL

Soit P un o.ps.d. elliptique dans $\tilde E$ ayant la propriété de transmission par rapport à Γ. Supposons pour simplifier que P est fortement elliptique (d'ordre $\ell = 2m > 0$) et auto-adjoint ; on peut alors supposer aussi que Σ est compact et P est positif et inversible sur Σ. Les problèmes spectraux que l'on doit poser pour les opérateurs de Green A (voir (1)) contenant P ne sont pas évidents. Un problème qui a un intérêt est l'étude des réalisations (dans $L^2(E)$) des opérateurs de la forme $P_\Omega + G$ (G d'ordre $\leq \ell$ et de classe $\leq \ell$ [3]) définis par des conditions au bord homogènes :

(3) $$D((P+G)_T) = \{u \in H^\ell(E) \mid Tu = 0\}$$

(T de classe $\leq \ell$). En effet, dans l'étude des systèmes différentiels de Douglis-Nirenberg [7], la réduction à un système d'un seul ordre nous conduisait exactement à ce genre d'opérateurs. On suppose que $\begin{pmatrix} P_\Omega + G \\ T \end{pmatrix}$ est elliptique et qu'il a une paramétrixe $(\tilde{P}_\Omega + G_T \;\; K_T)$, alors $\tilde{P}_\Omega + G_T$ est une sorte de paramétrixe de $(P+G)_T$.

Quand P est fortement elliptique, il existe des opérateurs de trace T tels que $\begin{pmatrix} P_\Omega \\ T \end{pmatrix}$ est elliptique, par exemple $T = \gamma = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}\}$. Pour l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres, on peut dire qu'il suffit de considérer la "réalisation de Dirichlet", P_γ, car nous avons, si G et T sont des opérateurs tels que $(P+G)_T$ est auto-adjoint positif,

$$P_\gamma^{-1} - (P+G)_T^{-1} = \tilde{P}_\Omega + G_\gamma - (\tilde{P}_\Omega + G_T) = G_\gamma - G_T ,$$

et les v.p. $\lambda_j(G_\gamma - G_T)$ de l'opérateur de Green singulier $G_\gamma - G_T$ se comportent comme s'il était un opérateur en dimension n-1 :

$$|\lambda_j(G_\gamma - G_T)| \leq C . j^{-\ell/(n-1)}$$

(les v.p. arrangés par module décroissante, comptés selon les multiplicités). Cela entraîne

Proposition 1 : Si $N(t, P_\gamma) = c_P t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\sigma)/\ell})$, alors $N(t,(P+G)_T) = c_P t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-\sigma')/\ell})$, où $\sigma' = \min(\sigma, \frac{\ell}{n+\ell})$.

Ici $N(t,S)$ désigne le nombre de v.p. de S inférieurs à t. Cette proposition permettra aussi de remplacer P par P^k (nous avons besoin de l'ordre $>$ n+1 plus tard) parce que $(P_\gamma)^k$ est de la forme $(P^k + G)_T$.

Pour l'étude de P_γ nous allons donner une construction de la résolvante $R_\lambda = (P_\gamma - \lambda)^{-1}$ comme somme d'une partie principale à symbole "homogène en λ" et un reste qui décroit plus vite pour $|\lambda| \to \infty$.

P_γ, défini par (3) avec $G = 0$, $T = \gamma$, coïncide avec l'extension de Friedrichs de $P_\Omega|_{C_0^\infty(\Omega, E)}$ au moins si P a la propriété de transmission par rapport aux surfaces parallèles à Γ près de Γ, et alors

$$R_\lambda = (P_\gamma - \lambda)^{-1}$$

existe pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et est de la forme

$$R_\lambda = \tilde{P}_{\lambda,\Omega} + G_\lambda ,$$

où $\tilde{P}_\lambda = (P - \lambda)^{-1}$ sur Σ, et G_λ est un opérateur de Green singulier, continu de $H^s(E)$ dans $H^{s+\ell}(E)$ pour $s \geq 0$. Les approximations de R_λ n'envoient pas nécessairement $L^2(E)$ dans $D(P_\gamma)$; donc il est avantageux de considérer le système "non-homogène"

$$\begin{pmatrix} P_\Omega - \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ avec son inverse } (R_\lambda \quad K_\lambda)$$

(ici $K_\lambda = (I - R_\lambda(P_\Omega - \lambda))\mathcal{K}_\lambda$, où $\mathcal{K}_\lambda$ est un inverse à droite de γ) ; ces systèmes opèrent entre des espaces de Sobolev complètes.

Le fait que P est pseudo-différentiel (voir Seeley [13] pour le cas différentiel) donne plusieurs problèmes. D'une part, quand $p(x,\xi)$ est un polynôme en ξ, alors $(p(x,\xi) - \lambda)^{-1}$ (noté $\tilde{p}_\lambda(x,\xi)$) est C^∞ en (ξ,λ) pour tout $(\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+)$; mais quand $p(x,\xi)$ n'est pas polynomial, on a (dans les coordonnées locales)

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \tilde{p}_\lambda(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta}(x)|\xi|^{\ell-|\beta|}(|\lambda|^{1/\ell} + |\xi|)^{-2\ell}$$

qui est $\leq c_{\alpha,\beta}(x)(|\lambda|^{1/\ell} + |\xi|)^{-\ell-|\beta|}$ seulement si $|\beta| \leq \ell$.

Donc pour l'o.ps.d. à symbole $\tilde{p}_\lambda(x,\xi)$, les bonnes estimations en λ permettent seulement des manipulations utilisant des dérivations en ξ jusqu'à l'ordre ℓ. (Quand $|\lambda| \to \infty$, on a besoin de l'homogénéité en ξ près de 0).

Il y a un autre problème : quand p est un polynôme, les racines en ξ_n de $\det(p(x',0,\xi',\xi_n)-\lambda)$ jouent un rôle important dans la construction explicite de G_λ. Quand P n'est pas différentiel, on n'a plus ces racines (cf. aussi [7, p.1117-1118])), ni les formules explicites, et il faut trouver un autre point de vue pour construire G_λ. Ici on va utiliser la <u>positivité</u> de la réalisation de Dirichlet de $p(x',\xi',D_{x_n})$.

Soit V un secteur de $\mathbb{C}$ disjoint de $\overline{\mathbb{R}}_+$, par exemple :

(4) $$V = \{re^{i\theta} \mid r \geq 1,\ 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < 2\pi\} .$$

Il est bien connu qu'on a pour $\lambda \in V$

(5) $$\|R_\lambda f\|_o \leq c|\lambda|^{-1}\|f\|_o \quad \text{pour } f \in L^2(E),$$

et (puisque R_o est un opérateur de Green) pour $s \geq 0$

(6) $$\|R_o f\|_{s+\ell} \leq c_s\|f\|_s \quad \text{pour } f \in H^s(E).$$

Définissant $H^{s,\mu}(E)$ comme l'espace $H^s(E)$ avec la norme $\|u\|_{s,\mu} = (\|u\|_s^2 + |\mu|^{2s}\|u\|_o^2)^{1/2}$, on déduit de (5) et (6)

(7) $$\|R_\lambda f\|_{s+\ell,\mu} \leq c_s'\|f\|_{s,\mu} \quad \text{pour } f \in H^s(E) ,$$

<u>uniformément en $\lambda \in V$</u>, où on a mis

(8) $$\mu = (-\lambda)^{1/\ell} \quad (\text{réel pour } \lambda \in \mathbb{R}_-)$$

Pour le symbole au bord nous définissons $H^{s,\xi',\mu}(\mathbb{R}_+)$ comme l'espace $H^s(\mathbb{R}_+)$ avec la norme $\|u\|_{s,\xi',\mu} = (\|u\|_s^2 + (|\mu|^2 + |\xi'|^2)^s\|u\|_o^2)^{1/2}$.

Soit :

(9) $$\begin{pmatrix} p(x',\xi',D_{x_n})_\Omega - \lambda \\ \gamma \end{pmatrix}^{-1} = (r_\lambda(x',\xi',D_{x_n})\ k_\lambda(x',\xi',D_{x_n})) ,$$

et notons que

(10) $$r_\lambda(x',\xi',D_{x_n}) = \tilde{p}_\lambda(x',\xi',D_{x_n})_\Omega + g_\lambda(x',\xi',D_{x_n}) ,$$

où g_λ est un op. de Green singulier sur $\mathbb{R}_+$. Alors on montre par analogie, que (en coordonnées locales) :

(11) $$\|r_\lambda(x',\xi',D_{x_n})f\|_{s+\ell,\xi',\mu} \leq c_s\|f\|_{s,\xi',\mu} \quad \text{pour } f \in H^s(\mathbb{R}_+)^q ,$$

uniformément en $(x',\xi',\lambda) \in U' \times \mathbb{R}^{n-1} \times V$ (U' relativement compacte dans $\mathbb{R}^{n-1}$). (Dans l'étude d'autres problèmes aux limites on pourrait prendre (11) comme hypothèse).

On aura également de bonnes estimations pour K_λ et k_λ.

Nous allons maintenant définir la partie principale de R_λ. Avec la notation habituelle pour les o.ps.d.

$$\mathrm{Op}(a(x,\xi))u = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

nous introduisons aussi la notation d'opérateur de Green (du type P_Ω, G ou T)

$$\mathrm{Opg}(a(x',\xi',D_{x_n}))u = (2\pi)^{-n+1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\xi'}a(x',\xi',D_{x_n})\hat{u}(\xi',x_n)d\xi' ,$$

avec une même notation Opk pour des opérateurs de Poisson.

<u>1er cas où $p(x',x_n,\xi) = p(x',0,\xi)$ au voisinage de Γ</u> .

Dans ce cas nous posons (à l'aide des localisations évidentes, voir [7])

$$R^o_\lambda \sim \begin{cases} \mathrm{Opg}(r_\lambda(x',\xi',D_{x_n})) \text{ au voisinage de } \Gamma , \\ \mathrm{Op}(p(x,\xi)) \text{ plus loin de } \Gamma, \end{cases}$$

$$K^o_\lambda \sim \begin{cases} \mathrm{Opk}(k_\lambda(x',\xi',D_{x_n})) & \text{au voisinage de } \Gamma, \\ 0 & \text{plus loin de } \Gamma . \end{cases}$$

On montre facilement que

(12) $$(R^o_\lambda \quad K^o_\lambda) : \begin{matrix} H^{s,\mu}(E) \\ \times \\ \prod_{j\leq m-1} H^{s+\ell-j-1/2,\mu}(E|_\Gamma) \end{matrix} \to H^{s+\ell,\mu}(E)$$

est continu pour $s \geq 0$, uniformément en $\lambda \in V$. Alors on peut obtenir :

<u>Théorème 2</u> :

$$(12') \qquad \begin{pmatrix} P_\Omega - \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} (R^o_\lambda \quad K^o_\lambda) = I - S_\lambda \ ,$$

où S_λ est continu de $H^{s,\mu}(E) \times \prod_{j \leq m-1} H^{s+\ell-j-1/2,\mu}(E|_\Gamma)$ dans $H^{s+1,\mu}(E) \times \prod_{j \leq m-1} H^{s+\ell-j+1/2,\mu}(E|_\Gamma)$ pour $s \geq 0$, uniformément en $\lambda \in V$.

Pour montrer ce théorème, on a besoin de montrer par exemple que :

$$\varphi \mathrm{Opg}(r_\lambda(x',\xi',D_{x_n}))\psi : H^{s,\mu}(E) \to H^{s+\ell+1,\mu}(E)$$

est continu (unif. en λ) si $\mathrm{supp}\,\varphi \cap \mathrm{supp}\,\psi = \emptyset$, et que, pour deux symboles au bord $a_{1,\lambda}$ et $a_{2,\lambda}$,

$$\mathrm{Opg}(a_{1,\lambda})\mathrm{Opg}(a_{2,\lambda}) = \mathrm{Opg}(a_{1,\lambda} \circ a_{2,\lambda}) + b_\lambda \ ,$$

où le reste est d'ordre inférieur (unif. en λ). Dans l'étude du noyau on a aussi besoin de montrer que

$$\mathrm{Opg}(r_\lambda)^* = \mathrm{Opg}(r^*_\lambda) + \text{reste d'ordre inférieur} \ .$$

Tout ceci est possible (comme dans [7]) grâce au résultat:

<u>Lemme 3</u> : Soit $s \geq 0$. Pour tout α', tout $|\beta'| \leq \ell$, on a (en coordonnées locales), pour $f \in H^s(\mathbb{R}_+)$,

$$\| D^{\alpha'}_{x'} D^{\beta'}_{\xi'} r_\lambda(x',\xi',D_{x_n}) f \|_{s+\ell+|\beta|,\xi',\mu} \leq C_{\alpha',\beta',s} \|f\|_{s,\xi',\mu}$$

uniformément en $(x',\xi',\lambda) \in U' \times \mathbb{R}^{n-1} \times V(\bar{U}'$ compact $\subset \mathbb{R}^{n-1})$.

Cela permet de faire des calculs analogues à ceux qu'on fait pour les o.ps.d. en $\mathbb{R}^{n-1}$. Ensuite nous avons :

<u>Corollaire 4</u> : Soit $s \geq 0$. Pour $\lambda \in V$, $|\lambda|$ suffisamment grand,

$$(13)\qquad (R_\lambda\ K_\lambda) = (R^o_\lambda\ K^o_\lambda)\sum_{k=o}^{\infty} S^k_\lambda$$

$$= (R^o_\lambda\ K^o_\lambda) + S'_\lambda\ ,$$

où S'_λ est continu de $H^{s,\mu}(E)\times \prod_{j\leq m-1} H^{s+\ell-j-1/2,\mu}(E|_\Gamma)$ dans $H^{s+\ell+1,\mu}$

uniformément en λ.

<u>2ème cas où $p(x,\xi)$ dépend de x_n près de</u> Γ .

Dans ce cas on choisit :

$$R^o_\lambda \sim \begin{cases} \mathrm{Opg}(r_\lambda(x',\xi',D_{x_n})) + \mathrm{Op}(\tilde{p}_\lambda(x,\xi) - \tilde{p}_\lambda(x',0,\xi))_\Omega & \text{près de } \Gamma \\ \mathrm{Op}(\tilde{p}_\lambda(x,\xi)) & \text{ailleurs ,} \end{cases}$$

et K^o_λ comme avant. Remarquons qu'on a <u>en tout cas</u>

$$R^o_\lambda \sim \tilde{P}^o_{\lambda,\Omega} + G^o_\lambda\ ,\quad \text{où}$$

$$(14)\qquad \tilde{P}^o_{\lambda,\Omega} = \mathrm{Op}(\tilde{p}_\lambda(x,\xi))_\Omega\ ,\quad \text{et}$$

$$G^o_\lambda = \mathrm{Opg}(g_\lambda(x',\xi',D_{x_n}))\ \text{près de } \Gamma,\ 0\ \text{ailleurs ,}$$

cf. (10). Le terme $\mathrm{Op}(p(x,\xi) - p(x',0,\xi))_\Omega$ donne des complications ; (12) déjà est moins facile à montrer, et dans la démonstration du théorème 2 on aura à traiter des termes où les $\mathrm{Opg}(a)$ et $\mathrm{Op}(b)_\Omega$ entrent en même temps ; on rencontre aussi des opérateurs de Green singuliers du genre $L(Q,Q') = (QQ')_\Omega - Q_\Omega Q'_\Omega$ (où Q et Q' sont des o.ps.-d sur Σ). Le théorème 2 est alors démontré à l'aide d'une analyse plus fine des symboles, qui permet d'utiliser encore des notions de [3].

§ 3. CONSEQUENCES

Nous supposons désormais que $\ell > n+1$ (cf. prop. 1). Alors le noyau $K(R_\lambda)(x,y)$ est une fonction (matricielle) continue sur $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$, et nous avons que

$$K(R_\lambda) = K(\tilde{P}^o_{\lambda,\Omega}) + K(G^o_\lambda) + K(S''_\lambda) \ ,$$

cf. (13)-(14). Regardons les trois termes pour $x=y$. Pour le premier terme nous avons, pour $x\in\bar{\Omega}$

$$K(\tilde{P}^o_{\lambda,\Omega})(x,x) = K(\tilde{P}^o_\lambda)(x,x) = c_o(x)(-\lambda)^{-1+n/\ell} \ ,$$

où

(15) $$c_o(x) = (2\pi)^{-n}\int (p(x,\xi)+1)^{-1}\, d\xi \ .$$

Pour le troisième terme nous utilisons un théorème d'Agmon (cf. e.g.[1]) plus le fait que S''^*_λ est, comme S''_λ, continu de $L^2(E)$ dans $H^{\ell+1,\mu}(E)$ (unif. en $\lambda\in V$), ce qui donne

(16) $$|K(S''_\lambda)(x,x)| \leq c_1|\lambda|^{-1+(n-1)/\ell}, \ \forall x\in\bar{\Omega},\ \lambda\in V \ .$$

Finalement, le noyau de G^o_λ a un comportement plus étrange. En utilisant l'homogénéité du symbole de $g_\lambda(x',\xi',D_{x_n})$ on trouve que :

(17) $$K(G^o_\lambda)(x,x) = \varphi(x)K_G(x',x_n,\lambda) \ ,$$

où φ est à support près de Γ, $\varphi=1$ au voisinage de Γ, et K_G est une fonction continue de (x',x_n,λ) avec la propriété, pour $(x',x_n)\in\Gamma\times\bar{\mathbb{R}}_+$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ et $t>0$,

(18) $$K_G(x',x_n,t\lambda) = t^{n-\ell}K_G(x',tx_n,\lambda).$$

Donc pour $x_n = 0$, $K(G^o_\lambda)(x,x)$ est de la forme

(19) $$K(G^o_\lambda)(x',0,x',0) = c'_o(x')(-\lambda)^{-1+n/\ell}$$

(comme $K(\tilde{P}^o_\lambda)$), mais pour $x_n > 0$, $K(G^o_\lambda)$ n'a pas cette homogénéité .
Par le théorème d'Agmon, on a facilement :

$$|K(G^o_\lambda)(x,x)| \le c_2|\lambda|^{-1+n/\ell} \tag{20}$$

pour $x \in \bar{\Omega}$, $\lambda \in V$, mais on peut en effet montrer (comme dans [7], utilisant que $\ell > n+1$) ,

$$\left|\int_\Omega K(G^o_\lambda)(x,x)dx\right| \le c_3|\lambda|^{-1+(n-1)/\ell} \quad \text{pour } \lambda \in V . \tag{21}$$

Donc nous avons

<u>Théorème 5</u> : Quand $\ell > n+1$, le noyau de R_λ est de la forme, pour $x = y$,

$$K(R_\lambda)(x,x) = c_o(x)(-\lambda)^{-1+n/\ell} + K(G^o_\lambda)(x,x) + \mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-1)/\ell}) \tag{22}$$

pour $x \in \bar{\Omega}$, $\lambda \in V$, cf. (15). Ici le terme $K(G^o_\lambda)(x,x)$ a les propriétés (17)-(21), tel que

$$\int_\Omega K(R_\lambda)(x,x)dx = c_o(-\lambda)^{-1+n/\ell} + \mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-1)/\ell}) \quad \text{pour } \lambda \in V, \tag{23}$$

avec $c_o = \int_\Omega c_o(x)dx$.

L'estimation (23) entraîne, par un théorème taubérien de Hardy et Littlewood, une estimation du comportement asymptotique des v.p. de P_γ , qui reste valable aussi si $\ell \le n+1$ et si P_γ est remplacé par $(P+G)_T$, grâce à la proposition 1 :

<u>Corollaire 6</u> : Soit $(P+G)_T$ une réalisation positive et auto-adjointe dans $L^2(E)$ (G et T étant d'ordre et de classe $\le \ell$) telle que l'inverse $(P+G)_T^{-1}$ est un opérateur de Green d'ordre $-\ell$. Alors

$$N(t,(P+G)_T) = c_P t^{n/\ell} + o(t^{n/\ell}) \text{ pour } t \to \infty , \tag{24}$$

où

$$c_P = \frac{1}{n(2\pi)^n}\int_\Omega \int_{|\xi|=1} \operatorname{tr}[p(x,\xi)^{-n/\ell}]\,d\omega\,dx.$$

Cette estimation a été prouvée d'abord pour certains o.ps.d. de symbole rationnel dans [7] (prop. 3.6, th.5.7) ; le cas général est esquissé dans [8]. Pour le problème de Dirichlet, une estimation du même genre a été obtenue dans [11] pour certains opérateurs dans les classes de Beals.

§ 4. REMARQUES ULTERIEURES

Le développement (22) diffère de celui de Agmon-Kannai [2] dans ce qu'il est uniforme en $x \in \bar{\Omega}$ (mais λ parcourt un secteur V seulement). Le deuxième terme $K(G^o_\lambda)(x,x)$ ne figure pas dans [2]. En effet, dans le cas où P est un opérateur différentiel, on peut montrer (voir Seeley [13]) que $K(G^o_\lambda)(x,x)$ est à décroissance exponentielle en $|\lambda|$ pour $x \in$ compact de Ω.

De plus, Seeley a donné dans [13] un développement asymptotique de la résolvante R_λ d'un problème différentiel, qui implique pour le noyau dans le cas $\ell > n$,

$$(25) \qquad K(R_\lambda)(x,x) = \sum_{j=o}^{N-1} (K(\tilde{P}^j_\lambda)(x,x) + K(G^j_\lambda)(x,x)) + K_N(x,\lambda) ,$$

avec $K_N(x,\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-N+1)/\ell})$ pour tout N, uniformément en $x \in \bar{\Omega}$ et $\lambda \in V$. Ici les $\tilde{P}^j_\lambda$ et G^j_λ sont des opérateurs pseudo-différentiels, resp. de Green singuliers (définis près de Γ), à symboles homogènes. Il est montré dans [13] que $K(\tilde{P}^j_\lambda)$ et $K(G^j_\lambda)$ sont $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-j+1)/\ell})$ sur $\bar{\Omega}$, et que $K(G^j_\lambda)$ est à décroissance exponentielle en $|\lambda|$ dans l'intérieur de Ω. On voit facilement que $K(\tilde{P}^j_\lambda)(x,x) = c_j(x)(-\lambda)^{-1+(n-j)/\ell}$ ($c_j(x)$ continue sur $\bar{\Omega}$), et nos méthodes permettent en plus d'améliorer le reste K_N à être $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-N)/\ell})$, et de démontrer que $K(G^j_\lambda)$ est $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-j)/\ell})$ sur $\bar{\Omega}$, son intégrale sur $\bar{\Omega}$ étant $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-j-1)/\ell})$. (Voir aussi Eskin [5] pour le cas scalaire). Pour les problèmes pseudo-différentiels on obtiendrait, en poussant plus loin l'étude du terme S_λ dans (12'), un développement (25) pour $N \leq \ell$, avec les estimations que nous venons de décrire, sauf que $K(G^j_\lambda)$ serait seulement $\mathcal{O}(|\lambda|^{-1+(n-\ell)/\ell})$ dans l'intérieur de Ω.

Les estimations données ici sont valables pour λ dans un secteur V, et il est naturel de chercher des estimations pareilles plus près de $\mathbb{R}_+$, ce qui entraînerait des estimations du reste dans (24). Nous avons une méthode pour ce problème qui paraît donner une estimation du reste par $\mathcal{O}(t^{(n-\sigma)/\ell})$ pour tout $\sigma < \frac{1}{2}$ (et pas plus). (Remarquons que les estimations plus fines de [9] et [4] ne sont pas prouvés pour les systèmes généraux, et surtout pas avec des conditions aux limites. Pour les problèmes <u>différentiels</u>, Agmon a fait la remarque dans [1] que ses estimations, où $\sigma < \frac{1}{2}$, s'étendent aux systèmes sans difficultés).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. Arch. Rat. Mech. Anal. 28 (1968), 165-183.

[2] S. Agmon et Y. Kannai : On the asymptotic behaviour of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, Israel J. Math. 5 (1967), 1-30.

[3] L. Boutet de Monvel : Boundary problems for pseudo-differential operators, Acta Math. 126 (1971), 11-51.

[4] J. J. Duistermaat et V. W. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bi-characteristics, Inv. Math. 29 (1975), 39-79.

[5] G. Eskin : Asymptotics near the boundary of spectral functions of elliptic self-adjoint boundary problems, Israel J. Math. 22 (1975), 214-246.

[6] G. Grubb et G. Geymonat : The essential spectrum of elliptic systems of mixed order, Math. Ann. 227 (1977), 145-194.

[7] G. Grubb : Spectral asymptotics for Douglis-Nirenberg elliptic and pseudo-differential boundary problems, Comm. Part. Diff. Equ. 2 (1977), 1071-1150.

[8] G. Grubb : Sur les valeurs propres des problèmes aux limites pseudo-différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978), 199-201.

[9] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator, Acta Math. 121 (1968), 193-218.

[10] A. N. Kozevnikov : Spectral problems for pseudo-differential systems elliptic in the Douglis-Nirenberg sense, and their applications, Mat. Sb. 92 (134)(1973), 60-89 = Math. USSR Sb. 21 (1973), 63-90.

[11] D. Robert : Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels, thèse, à paraître dans Comm. Part. Diff. Equ.

[12] R. Seeley : Complex powers of an elliptic operator, Proc. Symp. Pure Math. 10 (1967), 288-307.

[13] R. Seeley : The resolvent of an elliptic boundary problem, Amer. J. Math. 91 (1969), 889-920.

[14] B. A. Ton : On the asymptotic behavior of the spectral function of elliptic pseudo-differential operators, Ill. J. Math. 14 (1970), 452-463.