Y. Colin de Verdière

Spectre conjoint d'opérateurs différentiels qui commutent

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

SPECTRE CONJOINT D'OPERATEURS DIFFERENTIELS QUI COMMUTENT

par Y. COLIN DE VERDIERE

Exposé n° XII

21 Février 1978

§ 0. INTRODUCTION

Soit X une variété compacte C^∞ de dimension d ; on suppose qu'on a k opérateurs pseudo-différentiels P_1, $P_2,\dots,P_k$ d'ordre 1, autoadjoints par rapport à une mesure dx et qui commutent entre eux. On note $p=(p_1,\dots,p_k)$ le symbole conjoint des P_i et Ω l'ouvert conique, supposé dense, où p est une submersion. On a $k \le d$, car $\{p_i,p_j\} \equiv 0$; le cas où $k = d$ sera appelé par analogie avec la mécanique classique, "intégrable". On suppose, en outre, que l'opérateur $Q=P_1^2+\dots+P_k^2$ est elliptique, ou, ce qui revient au même, que p ne s'annule pas. Il est alors facile de montrer qu'il existe une base orthonormée de $L^2(X,dx)$ formée de fonctions φ_α qui sont propres pour chacun des P_i, $P_i\varphi_\alpha = \lambda_i^\alpha\,\varphi_\alpha$, on note Λ le sous-ensemble (avec multiplicité) de $\mathbb{R}^k$ formé des $\lambda=(\lambda_i^\alpha,\dots,\lambda_k^\alpha)$: c'est le spectre conjoint de $P_1,\dots,P_k$. Le but est d obtenir des informations sur Λ.

§ 1. EXEMPLES

Dans la plupart des exemples, on a un opérateur P_1 dont on désire étudier le spectre et on fabrique des opérateurs $P_2,\dots,P_k$ qui permettent de faire "éclater" un peu ce spectre. Il y a deux classes d'exemples qui sont assez motivantes pour entreprendre ce travail :

A. Le cas où X est une variété riemannienne compacte, $P_1=\sqrt{\Delta}$ avec Δ laplacien de X et on suppose en outre qu'on a une action d'un groupe de Lie G par isométries sur X, alors tout élément de l'algèbre de Lie de G, ou, plus généralement tout polynôme de tels éléments, permet de fabriquer un opérateur différentiel qui commute avec P_1. Par exemple si $G = SO(3)$, on peut prendre pour P_2 l'opérateur de Casimir (dans le cas de l'action usuelle de SO(3) sur $\mathbb{R}^3$, c'est la partie angulaire du laplacien); en mécanique quantique, cet opérateur s'appelle "carré du moment cinétique". On peut prendre alors (dans ce cas) pour P_3 l'opérateur associé à un vecteur quelconque de l'algèbre de Lie de SO(3) que l'on appelera composante " par rapport à Oz" du moment cinétique. Le spectre conjoint de P_1 et P_2 permet d'étudier les représentations irréductibles de SO(3) qui apparaissent dans les divers espaces propres de P_1 : si $(\lambda,k(k+1))$ est un élément du spectre de (P_1,P_2) cela signifie que la représentation irréductible de SO(3) dans les harmoniques sphériques de degré k apparaît dans l'espace propre E_λ de P_1.

Un exemple voisin est celui où $X = K\backslash G/H$ est un espace localement symétrique de rang k ; l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H, G-invariant est commutative de rang k ; ces opérateurs peuvent se définir sur X. Dans le cas où la courbure est négative ou nulle, le spectre conjoint a été étudié de près notamment dans la thèse de Kolk ([K]) à l'aide de la formule de traces de Selberg.

B. <u>L'équation de Schrödinger</u> $\Delta + V$ sur une variété riemannienne compacte. Différentes évaluations asymptotiques sont concevables :

i) Guillemin, Kazhdan et Weinstein ont étudié l'asymptotique des <u>grandes valeurs propres</u> lorsque X est un espace symétrique compact de rang 1 (sphère ou espace projectif). L'idée de Weinstein est qu'on peut dans ce cas introduire un opérateur pseudo-différentiel $\hat{V}$ d'ordre 0 dont le symbole principal est la moyenne de V sur les géodésiques (toutes périodiques) de X. De plus $[\Delta, \hat{V}] = 0$ et le spectre de $\Delta + V$ ressemble beaucoup à celui de $\Delta + \hat{V}$. On est ramené à l'étude du spectre conjoint de Δ et $\hat{V}$.

ii) On peut aussi étudier l'asymptotique lorsque <u>la constante de Planck tend vers</u> 0 : on veut étudier l'asymptotique ("<u>quasi-classique</u>") du spectre de $H = \frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ lorsque $\hbar \to 0$. Pour cela il est commode d'introduire sur $X \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, les deux opérateurs $P_1 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{V}{T^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $P_2 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ où T est une constante > 0. Si $\lambda_1(\hbar) \leq \ldots \leq \lambda_n(\hbar) \leq \ldots$ est le spectre de H, le spectre conjoint de P_1 et P_2 est formé des $\{((\frac{p}{T})^2 \lambda_n(\frac{T}{p}), p) \mid p \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N}\}$. On peut ainsi obtenir grâce à des estimations uniformes quand $T \in [1,2]$ des renseignements sur la limite "quasi-classique".

§ 2. <u>RESULTATS DANS LE CAS NON "INTEGRABLE"</u> $(k \leq d)$

On peut étudier ce cas par une adaptation des méthodes de Hörmander ([H]) et Duistermaat-Guillemin ([D.G]) dans le cas $k = 1$.

On note Γ l'image de $T^*X \setminus 0$ par p et par W l'ensemble des valeurs critiques de p ; on peut alors prouver les quatre théorèmes suivants :

<u>Théorème 1</u> : <u>Si</u> $u = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \varphi_\lambda$ <u>est une distribution sur</u> X <u>telle que</u> $a_\lambda = 0$ <u>pour</u> $\lambda \notin C$, C <u>cône de</u> $\mathbb{R}^k$, <u>alors</u> $WF(u) \subset p^{-1}(C)$, <u>en particulier si</u> $C \cap \Gamma = \{0\}$, $C \cap \Lambda$ <u>est fini</u>.

Théorème 2 : Soit $Z(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-i\langle t|\lambda\rangle}$, alors $WF(Z) \subset \{(t,\tau) \in T^* \mathbb{R}^k \mid \exists\, \lambda \in T^*X\backslash 0, \varphi_t(\lambda) = \lambda$ et $\tau + p(\lambda) = 0\}$ où φ_t est le flot composé des champs de vecteurs H_{p_i}, gradients symplectiques des p_i.

Théorème 3 : Soit C un cône de $\mathbb{R}^k\backslash 0$ à bord C^1 par morceaux tel que $bC \cap W = \emptyset$ et $q \in C^\infty(\mathbb{R}^k\backslash 0, \mathbb{R}^*_+)$ une fonction homogène de degré 1 alors, Cardinal $\{\lambda \in C \cap \Lambda \mid q(\lambda) \leq \tau\} = (2\pi)^{-d} \mathrm{vol}\{p^{-1}(C \cap h\, q \leq \tau\} + O(\tau^{d-1})$.

Lorsque $k = 1$, on retrouve le résultat de Hörmander ([H]).
Lorsque $k = 2$, $X = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ et $P_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Si on prend $C = \mathbb{R}^2$ et $q = \sqrt{x^2+y^2}$, on retrouve l'estimation :

$$\mathrm{Card}\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m^2 + n^2 \leq \tau^2\} = \pi\tau^2 + O(\tau).$$

L'estimation précédente n'est pas la plus agréable lorsque le spectre de l'un des opérateurs (P_1 par exemple) est connu et de la forme $\{\mu_o\} + \mathbb{Z}$ (μ_o fixé) ; cela correspond au cas où le flot bicaractéristique de P_1 est 2π-périodique ; on fait de plus l'hypothèse qu'il est simplement périodique ;

Théorème 4 : Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3 et en supposant de plus que $C \cap \{x_1 = 1\}$ est compact, on a :

$$\mathrm{Cardinal}\{\lambda \mid (q+\mu_o, \lambda) \in \Lambda \cap C\} = (2\pi)^{-d} \widetilde{\mathrm{vol}}(p^{-1}(C \cap (\{q+\mu_o\} \times \mathbb{R}^{k-1})) + O(q^{d-2})$$

avec $\widetilde{\mathrm{vol}} = \mathrm{vol}/dp_1$.

Les démonstrations détaillées de ces théorèmes sont écrites dans [CV1].

§ 3 APPLICATIONS A L'EQUATION DE SCHRÖDINGER

i) Equation de Schrödinger sur les espaces symétriques de rang 1 compacts.

En utilisant les mêmes notations que dans 1 ; notons en outre $\hat{\sigma}$ le symbole principal de $\hat{V}$:

$\hat{\sigma}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi_t(\lambda))dt$, où φ_t est le flot géodésique .

Notons $\Lambda = \{(k(k+\alpha),\mu_{k,\ell}) \mid k \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \le \ell \le d_k\}$ le spectre conjoint de Δ et $\hat{V}$, on a :

Théorème 5 (Weinstein) : le spectre de $\Delta + V$ est de la forme $\lambda_{k,\ell} = k(k+\alpha) + \mu_{k,\ell} + O(\frac{1}{k^2})$.

Théorème 6 : Soit μ la mesure sur $\mathbb{R}$ image par $\hat{\sigma}$ de la mesure canonique sur le fibré cotangent unitaire et

$$\mu_k = \frac{1}{d_k}\sum_{\ell=1}^{d_k} \delta(\mu_{k,\ell}),$$

alors μ_k tend vers $(2\pi)^{-d}\mu$ au sens suivant : si a,b ne sont pas des valeurs critiques de $\hat{\sigma}$

$$\mu_k([a,b]) = (2n)^{-d}\mu([a,b]) + O(k^{-1}).$$

Remarque : Weinstein a prouvé dans [W], un résultat analogue pour $\mu_k(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et conjecturé le résultat du théorème 6.

ii) Asymptotique quasi-classique.

Avec les notations de 1, on a :

Théorème 7 : Soit E une valeur non critique de V, on a :

$$\text{Cardinal}\,\{n \mid \lambda_n(\hbar) \le E\} = (2\pi)^{-d}\text{vol}\,\{\frac{\hbar^2}{2}\|x,\xi\|^2 + V(x) \le E\} + O(\hbar^{1-d}).$$

Remarque : Cette estimation doit pouvoir s'étendre à l'équation de Schrödinger dans $\mathbb{R}^d$ pour un potentiel C^∞ tendant assez vite vers 0 à l'∞, à condition de prendre $E < 0$, et donc d'être dans la partie discrète du spectre. L'estimation pour la partie principale est bien connue dans ce cas avec des hypothèses de régularité très faibles sur V.

§ 4. LE CAS INTEGRABLE

Dans le cas intégrable, on peut avoir des renseignements beaucoup plus précis sur Λ, soit $U = p^{-1}(\mathbb{R}^k \setminus W)$, U admet un feuilletage lagrangien par les fibres de p qui sont des tores. On peut alors étudier le spectre au moyen des conditions de Bohr-Sommerfeld-Maslov ; plus précisément, on obtient lorsque les symboles sous-principaux des P_i sont nuls, le résultat suivant :

Soit

$$\chi : T^*((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d) \supset (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d \times C_o \to V \subset T^*X \setminus 0$$

un système de coordonnées actions-angles, c'est-à-dire une transformation canonique homogène telle que $p_i \circ \chi = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ et soit $\mu_o \in \mathbb{Z}^d$ l'indice de Maslov de χ alors il existe une injection $\nu \mapsto \lambda_\nu$ de $C \cap \mathbb{Z}^d$ dans Λ où C est un cône à base relativement compacte de C_o et des symboles $F_i = f_i + r_i$ où r_i est d'ordre -1 tels que :

$$\lambda_\nu = (F_1(\nu + \frac{1}{4}\mu_o), \ldots, F_d((\nu + \frac{1}{4}\mu_o)) \quad :$$

$\Lambda \cap \mathbb{R}^k \setminus W$ est localement l'image d'un réseau de $\mathbb{R}^d$ par une application ayant le comportement d'un sysmbole.

On peut aussi étudier de manière un peu plus précise ce qui se passe au bord de U, là où le feuilletage dégénère, en faisant des hypothèses convenables : par exemple, on peut montrer que, dans le cas $d = 1$, les conditions de Bohr-Sommerfeld donne une bonne approximation même près des minimums de V à condition qu'ils soient de Morse. On peut aussi étudier de cette façon le spectre du laplacien associé à une métrique de résolution sur S^2 à condition que la méridienne n'ait qu'un extremum de Morse, on obtient alors qu'il existe une bijection $(k,\ell) \mapsto n_{k,\ell}$ de $\{(k + \frac{1}{2}, \ell) \,\big|\, |\ell| \leq k\}$ dans $\mathbb{N}$ et une fonction F, C^∞ homogène de degré 2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ telle que $\lambda_{n_{k,\ell}} = F(k + \frac{1}{2}, \ell) + O(1)$.

Cela permet dans ce cas d'obtenir des résultats très précis sur la répartition des valeurs propres.

Enfin signalons qu'on peut utiliser ces résultats pour retrouver les conditions de quantification le long des géodésiques fermées stables et améliorer un peu les résultats de Babich, Lazutkin, Voros,...
Tous ces résultats feront l'objet de l'article [CV 2] .

Bibliographie

[CV1] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs différentiels qui commutent, I. Le cas non-intégrable (preprint).

[CV2] Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs différentiels qui commutent, II. Le cas intégrable (preprint).

[D.G.] Duistermaat-Guillemin : Inventiones 29 (1975) p.39-79.

[G.K.] Guillemin-Kazhdan : Some spectral results on rank one symmetric spaces (preprint).

[H.] Hörmander : Acta Math. 121 (1968) p.193-218.

[K] Kolk : Thèse, Utrecht 1977.

[W] A. Weinstein : Asymptotic of eigenvalue clusters for the laplacien plus a potential.
