SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. CHAPERON

Modèles microlocaux pour certains opérateurs pseudodifférentiels fuchsiens

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 11, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

MODELES MICROLOCAUX POUR CERTAINS OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS FUCHSIENS

par M. CHAPERON

Exposé n° XI

21 Février 1978

INTRODUCTION

La classification microlocale des opérateurs pseudodifférentiels "fuchsiens" a été entreprise par Oshima [4] dans le cadre analytique, puis par Guillemin et Schaeffer [3] dans le cadre C^∞. Cet exposé utilise les méthodes de [3] - dues à Sternberg [5-6] - pour démontrer des théorèmes qui généralisent ceux de [3] et [4].

§ 0. NOTATIONS ET RAPPELS

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout ce qui suit s'entend dans le cadre holomorphe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dans le cadre analytique (C^ω) ou C^∞ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Comme nos résultats sont locaux (et même microlocaux), il n'y a aucune perte de généralité à se placer directement dans un espace vectoriel.

Soit donc $M = \mathbb{K}^{n+1}$, muni des coordonnées $x_o, \dots, x_n$; on note $\xi^o, \dots, \xi^n$ les coordonnées d'un élément du dual M^* dans la base duale. P^*M (resp S^*M si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) est le quotient de $T^*M \backslash 0$ (i.e. $M \times (M^* \backslash \{0\})$) par l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{K} \backslash \{0\}$ (resp. $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$) dans la fibre (i.e. le second facteur). On considère sur P^*M (resp. S^*M) les coordonnées locales $(x_o, \dots, x_n, p_i^o, \dots, \widehat{p_i^i}, \dots, p_i^n)$ définies dans $U_i = \{\xi^i \neq 0\}$ (resp. $U_i^\pm = \{\pm \xi^i > 0\}$) par $p_i^j = -\xi^j/\xi^i$, et la <u>structure de contact</u> (sous-fibré vectoriel de rang 1 de son cotangent) $\mathcal{C}$ dont une section locale est, dans U_i (resp. U_i^+, U_i^-) la 1-forme $dx_i - \sum_{j \neq i} p_i^j dx_j = c_i$ (resp. c_i^+, c_i^-).

Une <u>transformation de contact</u> est un difféomorphisme local $h : P^*M \circlearrowleft$ (resp. $S^*M \circlearrowleft$) tel que $h^*\mathcal{C} = \mathcal{C}$. Un <u>champ de Lie</u> est une transformation de contact infinitésimale, c'est-à-dire un champ de vecteurs X défini dans un ouvert de P^*M (resp. S^*M) et tel que $L_X \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$. Si π désigne la projection $T^*M \backslash 0 \to P^*M$ (ou S^*M), pour tout ouvert U de P^*M (ou S^*M) et toute transformation de contact h (resp. tout champ de Lie X) défini(e) dans U, il existe une unique transformation canonique "homogène" $\tilde{h}$ (resp. un unique champ symplectique $\tilde{X}$) défini(e) dans $\pi^{-1}(U)$ et tel(le) que $\pi \circ \tilde{h} = h \circ \pi$ (resp. $T\pi \circ \tilde{X} = X \circ \pi$), et réciproquement. En particulier, si $F(x,\xi)$ est une fonction homogène (resp. positivement) de degré 1 en ξ, définie dans un ouvert conique $\pi^{-1}(U)$ de $T^*M \backslash 0$, et si l'on note H_F le champ symplectique de hamiltonien F, il existe un unique champ de Lie $\mathcal{V}_F$ tel que $T\pi \circ H_F = \mathcal{V}_F \circ \pi$.

Pour être plus précis, supposons (ce à quoi l'on peut toujours se ramener localement par une transformation canonique homogène consistant à "permuter les indices des coordonnées") que nous sommes dans $V = U_o$ (resp. U_o^+). Notant $x_o = t$, $\xi^o = \tau$, $p_o^i = p^i$ et $c = c_o$ (resp. c_o^+), on a $F = \tau f(t,x,-\frac{\xi}{\tau}) = \tau f(t,x,p)$. Dans les coordonnées (t,x,p), $\mathcal{V}_F = X$ s'écrit

$$(1) \qquad X = -\sum_{i=1}^{n} f_{p^i}\frac{\partial}{\partial x_i} + (f - \langle p, f_p\rangle)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}(f_{x_i} + p^i f_t)\frac{\partial}{\partial p^i}$$

On dit que f est le <u>hamiltonien de contact</u> de X par rapport à c. Il est caractérisé par la relation $\langle c, X\rangle = f$.

Si 0 est valeur régulière de f, $E = f^{-1}(0)$ est une sous-variété de codimension 1 de V. Soit i l'inclusion de E dans V. Si X s'annule en tout point d'une sous-variété S de V, S est incluse dans E ; notant j cette inclusion, on vérifie que l'application $(i^*c)\circ j$ (i^*c étant considérée comme une application de E dans T^*E) est identiquement nulle ; en particulier, $j^*i^*c = 0$, d'où il résulte que S est de dimension au plus n.

Un champ de vecteurs sur un ouvert U de V s'identifie à une application X de U dans V. Sa <u>partie linéaire en un point</u> A <u>de</u> U où il s'annule est $DX(A) \in \mathcal{GL}(V)$.

§ 1. <u>GEOMETRIE</u>

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> X <u>un champ de Lie nul sur une sous-variété</u> S, <u>de dimension</u> n-k, <u>de</u> V, <u>et dont le hamiltonien de contact</u> f <u>a</u> 0 <u>pour valeur régulière</u> ; <u>soit</u> A <u>un point de</u> S <u>où les valeurs propres de la partie linéaire</u> X_o <u>de</u> X <u>vérifient les conditions suivantes</u> :

(i) 0 <u>est valeur propre d'ordre</u> n - k ;

(ii) <u>l'enveloppe convexe des autres valeurs propres ne contient pas l'origine</u> ;

(iii) <u>Celles-ci sont "aussi distinctes que possibles" c'est à dire au nombre de 2k+1.</u>

<u>Il existe alors une transformation de contact</u> $h : V \circlearrowleft$, <u>définie dans un voisinage de</u> A, <u>de même classe de différentiabilité que</u> X, <u>envoyant</u>

A sur l'origine, et telle que $h_* X$ ait par rapport à c un hamiltonien de contact de l'un des types suivants :

1) Dans le cas holomorphe ,

(2) $$\sum_{j=1}^{k} (a_j(y)x_j + Q_j(y,x))p^j - (a_o(y)t + P(y,x)),$$

où

a) $x = (x_1,\ldots,x_k)$ et $y = (x_{k+1},\ldots,x_n)$.

b) Pour chaque j, $Q_j(y,x)$ est un polynôme en x, à coefficients holomorphes en y, et ne comportant que des termes en $x_1^{\alpha_1}\ldots x_k^{\alpha_k}$ tels que :

(3) $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq 2 \text{ et } a_j(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i(0).$$

c) $P(y,x)$ est un polynôme en x, à coefficients holomorphes en y, et ne comportant que des termes en $x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$ tels que

(4) $$a_o(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i(0).$$

2) Dans les cas réels,

(5) $$\sum_{j=1}^{k_1} (a_j(y)x_j + Q_j(y,x,z,\bar{z}))p^j + \sum_{j=k_1+1}^{k-2m} ((a_o(y)/2)(x_j^2 + b_j(y)(p^j)^2)$$

$$+ 2\mathrm{Re}(R_j(y,x,z,\bar{z})(-\rho_j(y)x_j + b_j(y)p^j))) + \sum_{j=k-2m+1}^{k-m} 2\mathrm{Re}((a_j(y)z_j +$$

$$+ S_j(y,x,z,\bar{z}))r^j) - (a_o(y)t + P(y,x,z,\bar{z})),$$

où

a) $x = (x_1,\ldots,x_{k_1})$, $z_j = x_j + ix_{m+j}$, $z = (z_{k-2m+1},\ldots,z_{k-m})$,

$r^j = (p^j - ip^{m+j})/2$ et $y = (x_{k+1},\ldots,x_n)$.

b) Pour chaque j, $Q_j(y,x,z,\bar{z})$ est un polynôme en $(x,z,\bar{z})$, à valeurs réelles, à coefficients analytiques ou C^∞ en y, et ne comportant que des termes en $x^\alpha z^\beta \bar{z}^\gamma$ tels que

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geq 2 \quad \text{et}$$

(6)
$$a_j(0) = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i a_i(0) + \sum_{i=k-2m+1}^{k-m} (\beta_i a_i(0) + \gamma_i \overline{a_i(0)}),$$

et $a_1,\dots,a_{k_1}$ sont dans $]0,a_o/2[$.

c) $S_j(y,x,z,\bar{z})$ est, pour chaque j, un polynôme en $(x,z,\bar{z})$, à coefficients analytiques ou C^∞ en y, et ne comportant que des termes en $x^\alpha z^\beta \bar{z}^\gamma$ tels que (6) soit vérifiée, et $a_{k-2m+1}(0),\dots,a_{k-m}(0)$ ont leurs parties réelles dans $]0,a_o(0)/2[$, et sont imaginaires.

d) $b_j(y)$ est, pour chaque j, une fonction analytique ou C^∞, à valeurs réelles ; $\rho_j(y)$ est une des racines du polynôme $\lambda^2 - \lambda + b_j(y)$, supposées imaginaires (i.e. $b_j(y) > 1/4$), et $R_j(y,x,z,\bar{z})$ est un polynôme en $(x,z,\bar{z})$, à coefficients analytiques ou C^∞ en y, et ne comportant que des termes en $x^\alpha z^\beta \bar{z}^\gamma$ tels que (6) soit vérifiée, si l'on note $a_j(0) = a_o(0)\rho_j(0)$.

e) $P(y,x,z,\bar{z})$ est un polynôme en $(x,z,\bar{z})$, à valeurs réelles, à coefficients analytiques ou C^∞ en y, et ne comportant que des termes en $x^\alpha z^\beta \bar{z}^\gamma$ tels que (6) soit vérifiée pour j = 0.

Remarques : 1) Pour k = 0, ce théorème a été démontré par Oshima ([4]) dans le cas analytique.

2) Pour k = n, ce théorème a été démontré par Oshima [4] dans le cadre analytique et par Guillemin-Schaeffer [3] dans le cadre C^∞, sous l'hypothèse supplémentaire qu'aucune des relations (3)-(4) ou (6) (j variant de 0 à n) ne soit vérifiée.

3) L'hypothèse (iii) n'est utile que si k < n (les racines d'un polynôme ne dépendent analytiquement de ses coefficients que là où elles sont simples).

4) L'hypothèse (ii) est inutile si k = n (voir le théorème 2 ci-dessous) ; elle est automatiquement vérifiée, si (i) l'est, pour k = 0 (il en va de même de (iii)) ; en revanche, dans les cas intermédiaires, elle est en général indispensable si l'on veut un h analytique ou C^∞ (qui sinon n'existerait pas formellement). Si l'on ne désire qu'un h $C^s (s \geq 1)$, on l'obtient en général, s dépendant du spectre de X_o (voir [1]).

Démonstration du théorème 1 : On note $q = (p^{k+1},\dots,p^n)$. On trouve dans Oshima [4] une démonstration du

Lemme 1 : *Les hypothèses et les notations étant celles du théorème, il existe une transformation de contact, de même classe de différentiabilité que X, et qui envoie A sur l'origine et S sur* $\{(x,t,p,q) = (0,0,0,0)\}$ *(notant* $p = (p^1,\dots,p^k)$*).*

Voici une autre démonstration de ce lemme, plus naturelle que celle d'Oshima : l'image de S dans le cotangent $\mathbb{K}^n \times (\mathbb{K}^n)^*$ par la projection $((x_i),t,(p^i)) \mapsto ((x_i),(p^i))$ est une variété isotrope régulière I, qui détermine complètement S dès que l'on connaît un point de S. Supposant que $A = 0$ (on s'y ramène par la transformation de contact $((x_i),t,p^i) \mapsto ((x_i - \alpha_i), t - \beta - \Sigma\gamma^i(x_i - \alpha_i), (p^i - \gamma^i))$, si $A = ((\alpha_i),\beta,(\gamma^i))$), I étant isotrope on peut choisir une base symplectique de $T^*\mathbb{K}^n$ telle que, dans ces nouvelles coordonnées, l'espace tangent à I en 0 soit défini par $(x,p,q) = (0,0,0)$; en relevant la transformation canonique "changement de base" dans V (voir la démonstration du lemme 2 ci-dessous), l'espace tangent à S en $A = 0$ est alors défini dans les nouvelles coordonnées par $(x,t,p,q) = (0,0,0,0)$. On peut donc exprimer localement S comme le graphe d'une application $y \mapsto (x(y),t(y),p(y),q(y))$.
Soit alors la transformation de contact fixant l'origine définie en relevant la transformation canonique

$$X = x - x(y), \quad P = p - p(y) \ , \quad Y = y \ ,$$

$$Q = q - q(y) + \langle p-p(y), x'(y)\rangle - \langle x - x(y), p'(y)\rangle \ ;$$

elle démontre le lemme. ∎

Nous supposerons donc désormais que A est l'origine et que $S = \{(x,t,p,q) = (0,0,0,0)\}$. Soit

$$\tilde{f} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} f_{\alpha\beta\gamma\delta}(y)\, x^\alpha t^\beta p^\gamma q^\delta \tag{7}$$

le "champ taylorien" de f le long de S (i.e. la famille à paramètre y des développements de Taylor des applications $(x,t,p,q) \mapsto f(x,y,t,p,q)$ à l'origine).

Il résulte aussitôt de (1) que $a_o(y) = -f_{0100}(y)$, et que seuls interviennent dans la détermination de X_o des termes du champ taylorien à l'ordre 2 de f le long de S ; de plus,

(8) $$f_{\alpha 000}(y) = f_{00\gamma 0}(y) = f_{000\delta}(y) = f_{0000}(y) = 0 \quad \text{pour } |\alpha| = |\gamma| = |\delta| = 1.$$

Le théorème comporte en particulier une "diagonalisation de la partie linéaire de X le long de S", qui va être notre première étape ; pour commencer, on a le

Lemme 2 : Soit X_1 un champ de Lie nul à l'origine, de hamiltonien de contact $f_1 = c_o t - Q(x,p)$ (on se place dans l'espace V_1 des jets d'ordre 1 d'applications de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}$), où Q est une forme quadratique. Si les 2k+1 valeurs propres de la partie linéaire de X_1 à l'origine sont distinctes, il existe une transformation de contact h_1 telle que $h_1^* X_1$ ait pour hamiltonien de contact $c_o t - \langle p, Lx\rangle$, où L est un opérateur linéaire diagonal dans la base standard.

Pour prouver le lemme 2, nous allons utiliser le fait élémentaire suivant : soit W le cotangent $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^k)^*$, muni de sa structure symplectique habituelle. Soit $g : (W,0) \to (W,0)$ une transformation canonique locale ; au voisinage de 0, g possède une fonction génératrice : si l'on note (x,p) les coordonnées à la source et (x',p') les coordonnées au but, il existe deux partitions $\{1,\dots,k\} = I \cup J = I' \cup J'$ et une fonction $u((x_i)_{i\in I}, (p^j)_{j\in J}, (x'_i)_{i\in I'}, (p'^j)_{j\in J'})$ telles que le graphe de g soit donné localement par

(9) $$p^i = u_{x_i} \text{ si } i \in I, \quad x_j = -u_{p^j} \text{ si } j \in J, \quad p'^i = -u_{x'_i} \text{ si } i \in I',$$

$$x'_j = u_{p'^j} \text{ si } j \in J'.$$

Soit $\tilde{g}$ la transformation dont le graphe dans $V_1 \times V_1$ est défini, si l'on note (x,u,p) les coordonnées à la source et (x',u',p') les coordonnées au but, par les formules (9) et par

(10) $$t' = t - u + \sum_{j\in J} p^j u_{p^j} + \sum_{j\in J'} p'^j u_{p'^j}.$$

$\tilde{g}$ est une transformation de contact, telle que $g \circ s = s \circ \tilde{g}$, en notant s la projection naturelle de V_1 dans W. Si $u(0,0,0,0) = 0$, $\tilde{g}$ laisse fixe l'origine.

Notant p comme un vecteur-ligne et x comme un vecteur-colonne, supposons que $Q(x,p) = {}^t xBx/2 + pCx + pD{}^t p/2$, où B, C et D sont des matrices (k,k), B et D symétriques.

X_1 se projette par s sur un champ Y linéaire dans W, de matrice

$$\begin{pmatrix} C & D \\ -B & c_o I - {}^t C \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, les valeurs propres de Y sont distinctes. Si v_i est un vecteur propre de Y associé à la valeur propre c_i $(i = 1,2)$ et que $c_1 \neq c_2$ et $c_1 + c_2 \neq c_o$, v_1 et v_2 sont orthogonaux pour la forme canonique de W. Notant celle-ci F, on vérifie en effet que
$F(v_1,Yv_2) + f(Yv_1,v_2) = (c_1 + c_2)F(v_1,v_2) = c_o F(v_1,v_2)$.

Il existe donc k vecteurs propres $v_1,\dots,v_k$ de Y deux à deux orthogonaux, et k autres vecteurs propres $w_1,\dots,w_k$ de Y, deux à deux orthogonaux, et que l'on peut choisir de manière que $F(w_i,v_j) = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker) ; si $Yv_i = c_i v_i$, $Yw_i = (c_o - c_i)w_i$.

Si g désigne l'automorphisme (canonique) qui fait passer de la base standard de W à la base $((v_i),(w_i))$, $h_1 = \tilde{g}$ permet de démontrer le lemme. □

Corollaire : Dans le cas réel, sous les hypothèses du lemme 2, il existe une transformation de contact réelle h_2 telle que $h_2^* X_1$ ait pour hamiltonien de contact

$$c_o t - \Big(\sum_{j=1}^{k_1} c_j x_j p^j + \sum_{j=k_1+1}^{k-2m} c_o (x_j^2 + d_j (p^j)^2)/2 + \sum_{j=k-2m+1}^{k-m} 2\mathrm{Re}(c_j z_j r^j),$$

où z_j et r^j sont définis comme dans l'énoncé du théorème (2)a)).

(dans la formule ci-dessus, le premier groupe de termes correspond aux valeurs propres réelles $c_1,\dots,c_{k_1}$; le deuxième groupe correspond aux valeurs propres imaginaires de partie réelle $c_o/2$ (avec, donc, $d_j > 1/4$) ; le troisième groupe correspond aux valeurs propres imaginaires c_j et $\bar{c}_j$ de partie réelle $\neq c_o/2$).

Il reste à donner une version "à paramètre y" du résultat précédent :

Lemme 3 : On suppose que c_0 et Q, dans l'énoncé du lemme 2, dépendent de manière analytique ou C^∞ d'un paramètre $y \in K^{n-k}$, et que les hypothèses du lemme 2 sont vérifiées pour $y = 0$. Il est alors possible, dans la conclusion du lemme 2, de faire en sorte que h_1 et L soient des fonctions analytiques ou C^∞ de y pour y assez petit. La même remarque s'applique, mutatis mutandis, au corollaire du lemme 2.

(Pour y assez petit, avec les notations de la démonstration du lemme précédent, les valeurs propres de $Y(y)$ sont simples, et dépendent donc régulièrement de y ; si l'on fixe arbitrairement la base propre $((v_i(0)),(w_i(0)))$, on peut par exemple choisir, pour y assez petit, chacun des $v_i(y)$ de manière que sa composante suivant $v_i(0)$ dans la base précédente soit égale à 1 ; le $h_1(y)$ ainsi construit répond à la question).

Lemme 4 : Soit $h : (V_1,0) \to (V_1,0)$ un germe de transformation de contact laissant fixe l'origine. Si h est "assez proche de l'identité", elle possède une fonction génératrice, c'est-à-dire, notant (x,t,p) les coordonnées à la source et (x',t',p') les coordonnées au but, un germe de fonction $g(x,t,p')$ tel que le graphe de h soit donné par les formules

$$(11) \quad \begin{cases} t' = g(x,t,p') - \langle p', g_{p'}(x,t,p')\rangle \;; \\ x' = -g_{p'}(x,t,p') \;; p = -g_x(x,t,p')/g_t(x,t,p'). \end{cases}$$

Réciproquement, si ces formules définissent le graphe d'un germe d'application, cette application est une transformation de contact.
(se déduit de l'existence d'une fonction génératrice pour la transformation canonique homogène $\tilde{h}$ associée à h comme il est dit au paragraphe 0).

Remarque : On obtient en fait ainsi tous les germes de transformations de contact laissant fixe l'origine, à conjugaison par une "transformation de Legendre" (échangeant certains des x_i avec les p^i correspondants) près.

Nous arrivons au bout de la partie pénible de cette démonstration, avec le

Lemme 5 : Le théorème 1 est vrai "formellement le long de S" ; plus précisément, il existe pour tout entier s une transformation de contact de même classe de différentiabilité que X, définie dans un voisinage de l'origine, envoyant 0 sur 0, et transformant X en un champ de Lie ayant même "champ taylorien d'ordre s" que le champ de Lie qui a pour hamiltonien de contact (2) ou (5) (et de plus il existe un champ taylorien d'ordre infini de transformation de contact qui envoie le champ taylorien de X sur celui défini par (2) ou (5)).

(par champ taylorien, on entend "le long de S", au sens défini par la formule (7)).

La démonstration de ce lemme se fait en deux étapes : on commence par terminer la "diagonalisation à paramètre" commencée avec le lemme 3 (en utilisant le lemme 4), puis on utilise de nouveau le lemme 4 pour écrire explicitement l'équivalence entre champs tayloriens.

Première étape : On applique d'abord le lemme 2 avec (les notations étant celles de (7)) $c_0 = f_{0100}(0)$ et $-Q(x,p) = \sum_{|\alpha|+|\gamma|=2} f_{\alpha 0\gamma 0}(0)\, x^\alpha p^\gamma$.
Puis on étend la transformation de contact h_1 de V_1 définie par le lemme 2 en une transformation de contact de V, à savoir $(x,t,p,y,q) \to (h_1(x,t,p),y,q)$, et on remplace X par son image par cette transformation de contact.

On applique alors le lemme 3 à ce nouvel X (dont on note toujours f le hamiltonien de contact), ou plutôt à la famille à paramètre y de champs de Lie sur V_1 définie, avec les notations de (7) et du lemme 3, par $c_0(y) = f_{01000}(y)$ et $Q(y,x,p) = -\sum_{|\alpha|+|\gamma|=2} f_{\alpha 0\gamma 0}(y)\, x^\alpha p^\gamma$.
La construction utilisée pour démontrer le lemme 3 montre que la famille de transformations de contact obtenue est égale à l'identité pour la valeur 0 du paramètre (ne pas oublier la conjugaison déjà effectuée !). Pour y assez petit, le lemme 4 montre donc qu'il existe une famille $g(y,x,t,p')$ de fonctions génératrices de ces transformations de contact ; plus précisément, g est de la forme $t-\Phi(y,x,p')$, où Φ est une forme quadratique en x et p', dépendant régulièrement du paramètre y. Si l'on considère maintenant dans V la transformation de contact dont la fonction génératrice est $g-\langle q',y\rangle$, on constate qu'elle envoie X sur un champ de Lie nul sur S et dont le hamiltonien de contact est, à des termes d'ordre

supérieur à 1 en t et supérieur à 2 en (x,p,q) près,

$$- a_o(y)t + pA(y)x + qB(y)x + qC(y)^t p + \frac{1}{2}qD(y)^t q ,$$

où A, B, C et D sont des matrices à coefficients fonctions de y, A diagonale, D symétrique, et où l'on note les covecteurs comme matrices-lignes et les vecteurs comme matrices-colonnes.

Nous allons fabriquer une transformation de contact qui "tue" B, C et D, et que nous obtiendrons par le biais de la fonction génératrice de son inverse. Ecrivant celle-ci sous la forme

$$t' - (px' + q\,\beta(y')x' + q\gamma(y')^t p + \frac{1}{2}q\,\delta(y')^t q + qy'),$$

toujours "matriciellement" (!), on constate que, pour

$$\gamma = C(a_o I - A)^{-1} \quad , \quad \beta = BA^{-1} \quad \text{et} \quad \delta = a_o^{-1}(B^t\gamma + \gamma^t B + D) ,$$

elle met sous forme normale la partie linéaire
de X le long de S (nous n'avons traité à fond que le cas complexe, mais le cas réel s'en déduit aisément).

<u>Seconde étape</u> : Tout d'abord, on remarque que, si h est une transformation de contact et X un champ de Lie, l'image de X par h a pour hamiltonien de contact $(e \circ h^{-1})(f \circ h^{-1})$, si f est le hamiltonien de contact de X et si $h^* c = e.c$. Par conséquent, il s'agit de résoudre (pour l'instant, formellement)

$$(12) \qquad g_{t'}(x',y',t',p,q)f_o(x',y',t',-\frac{g_{x'}}{g_{t'}} - g_{y'}/g_{t'}) =$$

$$f(-g_p,-g_q,\; g - \langle p,g_p\rangle - \langle q,g_q\rangle ,p,q),$$

où f_o est le hamiltonien de contact de l'image de X par h-donné, dans le cas qui nous intéresse, par (2) ou (5) - et g la fonction génératrice de l'inverse de h ; naturellement, on suppose ici que X a déjà été "préparé" suivant la première étape.

Pour obtenir effectivement (2) ou (5), il est indispensable de se livrer au préalable à la manipulation suivante : dans les cas réels, on fait en sorte que les projections orthogonales sur l'axe réel des $a_i(0)$ soient comprises entre 0 et $a_o(0)/2$ pour $1 \leq i \leq n$. D'après l'hypothèse (ii) du théorème, $\Re a_i(0)$ ou $\Re(a_o(0) - a_i(0))$ est toujours compris entre 0 et $a_o(0)/2$; quitte à "échanger x_i et p^i" (par une transformation de Legendre), on ne perd rien à faire cette hypothèse. Dans le cas complexe, il suffit de remplacer l'axe réel par une droite issue de l'origine, telle que la projection orthogonale de l'enveloppe convexe des valeurs propres $a_o(0),\dots,a_n(0)$, $a_o(0) - a_1(0),\dots,a_o(0) - a_n(0)$ sur cette droite ne contienne pas l'origine et ait la projection de $a_o(0)$ pour point extrémal ; on fait alors la même manipulation.

Si

$$(13) \qquad g = t' - \langle x',p\rangle - \langle y',q\rangle + \sum_{2\beta+|\alpha|+|\gamma|+|\delta|>2} g_{\alpha\beta\gamma\delta}(y')x'^{\alpha}t'^{\beta}p^{\gamma}q^{\delta} ,$$

$$(14) \qquad f_o(x',y',t',p',q') = \sum_{j=1}^{k}(a_j(y')x'_j + Q_j(y',x'))p'^j - (a_o(y')t' + P(y',x'))$$

et

$$(15) \qquad f(x,y,t,p,q) = \sum_{j=1}^{k} a_j(y)x_jp^j - a_o(y)t + \sum_{2\beta+|\alpha|+|\gamma|+|\delta|>2} f_{\alpha\beta\gamma\delta}(y)x^{\alpha}t^{\beta}p^{\gamma}q^{\delta},$$

(12) s'écrit donc

$$(16) \qquad \sum_{2\beta+|\alpha|+|\gamma|+|\delta|>2} \Big(-\sum_{j=1}^{k} a_j(y')\alpha_j - a_o(y')\beta + \sum_{j=1}^{k} a_j(y')\gamma_j +$$

$$-a_o(y')(|\gamma| + |\delta| - 1)\Big)g_{\alpha\beta\gamma\delta}(y')x'^{\alpha}t'^{\beta}p^{\gamma}q^{\delta} =$$

$$P(y',x') - \sum_{j=1}^{k} Q_j(y',x') + \sum_{2\beta+|\alpha|+|\gamma|+|\delta|>2} \psi_{\alpha\beta\gamma\delta}(y')x'^{\alpha}t'^{\beta}p^{\gamma}q^{\delta} ,$$

où $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ne dépend que des données et des $g_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}(y')$ tels que

$$2\beta' + \alpha' + \gamma' + \delta' < 2\beta + \alpha + \gamma + \delta .$$

Par conséquent, $g_{\alpha\beta\gamma\delta}(y')$ est bien déterminé et régulier pourvu que

$$(17) \qquad \sum_{j=1}^{k}(\alpha_j a_j(y') + \gamma_j(a_o(y') - a_j(y'))) + (\beta + |\delta| - 1)a_o(y') \neq 0.$$

Ici intervient l'hypothèse (ii) : il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans S tel que toutes les relations (17) qui sont vérifiées pour $y' = 0$ soient vérifiées $\forall y' \in \mathcal{V}$. Restent les $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, en nombre fini, tels que (17) soit transgressée. Pour ceux-là, on pose $g_{\alpha\beta\gamma\delta}(y') \equiv 0$, et l'on choisit le terme correspondant de $P(y',x')$ ou de $Q_j(y',x')$ de manière à annuler le terme en $x^\alpha t^\beta p^\gamma q^\delta$ du second membre de (16). [(Grâce à (ii) et à la manipulation faite au début de la seconde étape, on vérifie que les $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ pour lesquels (17) est transgressée sont tels que $\beta = |\delta| = 0$, et $|\gamma| = 0$ (termes de P) ou 1 (termes des Q_j)]. Ceci termine la démonstration du lemme 5 . □

Passons à la partie "intelligente" de cette démonstration, dont l'idée est due à Sternberg [4] (l'original est dans la thèse de Poincaré).

Lemme 6 : Soit $E\times F$ un produit d'espaces de Banach sur $\mathbb{K}$, et soit $T = (T_1,T_2)$ un difféomorphisme C^∞, C^ω ou holomorphe, défini dans un voisinage de $S = E\times\{0\}$ et tel que $T|_S = \mathrm{id}$. On a donc

$$DT(0,0).(y,z) = (y, Az + By).$$

Supposons que le spectre de A soit intérieur au disque unité ; soit α un entier tel que

$$\rho\ \mathrm{spec}\,(A^{-1}).[\rho\ \mathrm{spec}\,(A)]^{\alpha+1} < 1,$$

et soit T_o un difféomorphisme de $E\times F$ défini dans un voisinage de (0,0), de même différentiabilité que T, et ayant le même champ taylorien à l'ordre α le long de S que T .

Au moins lorsque $T_o(y,z) = (y, U(y,z))$, il existe un difféomorphisme R, défini dans un voisinage de (0,0), égal à l'identité sur S, de même différentiabilité que T, et tel que

$$R\circ T = T_o\circ R$$

dans le domaine de définition de R.

De plus, si $E\times F$ est muni d'une structure de contact et si T et T_o sont des transformations de contact, il existe un tel R qui soit une transformation de contact.

Idée de la démonstration : On cherche un $R = (R_1, R_2)$ tel que

$$R = T_o^{-1} \circ R \circ T \quad ,$$

soit

$$\begin{cases} R_1 = R_1 \circ T \\ R_2 = W(R_1 \circ T, R_2 \circ T), \end{cases}$$

où

$$T_o^{-1}(y,z) = (y, W(y,z)).$$

Grâce à l'hypothèse faite sur le spectre de A, la suite $pr_1 \circ T^n$ converge vers un R_1 qui convient, si $pr_1 : E \times F \rightarrow E$ est la projection naturelle.

Grâce au choix de α, la suite $W^n(\mathbb{R}, pr_2 \circ T^n)$ converge dans chaque "variété stable" R_1 = constante vers un R_2 qui répond à la question (c'est le théorème de Sternberg [5]) et dépend régulièrement de R_1.

La convergence des deux suites précédentes est C^∞, et uniforme (ce qui suffit) dans le cas holomorphe, dont le cas C^ω se déduit.

Pour prouver la partie "contact" du théorème, on montre qu'en fait la suite $T_o^{-n}\, T^n$ converge vers (R_1, R_2) au sens C^1 (cela suffit pour que la limite soit une transformation de contact si c'est un difféomorphisme). □

Fin de la démonstration du théorème 1 : Soit Φ_θ le groupe à un paramètre de transformations de contact engendré par X (θ étant complexe si X est holomorphe). On restreint θ à une demi-droite réelle issue de O et sur laquelle Φ_θ satisfait pour tout θ aux hypothèses du lemme 6 (il en existe une grâce à l'hypothèse (ii)). Pourvu que l'on ait, grâce au lemme 5, "tué" assez de termes de X, Φ_θ a même champ taylorien d'ordre α le long de S que Ψ_θ, où Ψ_θ est le groupe à un paramètre dont le hamiltonien de contact est défini par (2) ou (5). Le difféomorphisme R qui conjugue Φ_θ à Ψ_θ est la limite quand $\theta \rightarrow \infty$ sur notre demi droite de $\Psi_{-\theta}\ \Phi_\theta$, et ne dépend donc pas de θ. En dérivant par rapport à θ l'identité $R\Phi_\theta = \Psi_\theta R$, on obtient le théorème 1. □

Corollaire : Lorsque S est "de dimension maximale" (i.e. maximale pour l'inclusion), le théorème 1 est vrai en dimension infinie, le modèle local de X étant alors le champ de Lie dont le hamiltonien de contact est $-a_o(x)t$.

Théorème 2 : (Oshima, Guillemin- Schaeffer). Si dans le théorème 1 on prend $k = n$, les hypothèses (i) et (ii) ne sont plus utiles pour en assurer la conclusion. En revanche, il est indispensable d'ajouter une condition de non résonance dans le cas C^∞ (cf. [3]), et une condition diophantienne assurant que l'on est "loin des résonances" (cf. [4]) dans les cas analytiques.

Remarques : 1) Les résonances à éviter sont celles qui obligent à conserver une infinité de termes dans la forme normale "formelle". En revanche, comme nous l'avons fait dans le théorème 1, il est toujours possible de donner des formes normales polynômiales (et utilisables!) lorsqu'il subsiste des résonances moins méchantes.

2) L'usage de fonctions génératrices simplifie la démonstration de Guillemin-Schaeffer (leur "théorème de prolongement de Whitney" pour les transformations de contact se réduit au théorème de Whitney habituel pour les fonctions).

3) Le théorème d'Oshima se déduit, ainsi que la (légère) généralisation qui en est donnée au 1), d'un théorème de Rüssmann (preprint, I.H.E.S., 1977), qui améliore d'ailleurs la condition diophantienne y figurant.

4) Dans le cas holomorphe, si ladite condition diophantienne est transgressée sans que le soit la condition de non résonance, il existe une transformation de contact C^∞ $V \to V$ qui conjugue X à sa forme normale (du moins lorsque 0 est intérieur à l'enveloppe convexe des valeurs propres) !

§ 2. OPERATEURS

Théorème 3 : Soit, au voisinage d'un point A de P^*M (resp. S^*M) un o.p.d. du 1er ordre B, dont le symbole principal iF est tel que $\mathcal{V}_F$ vérifie les hypothèses du théorème 1 (ou du théorème 2) ; il existe une transformation de contact quantifiée U (opérateur intégral de Fourier dans le cas C^∞), telle que (modulo un o.p.d. d'ordre $-\infty$ dans le cas C^∞) $U \circ B \circ U^{-1} = S'$, défini au voisinage de $(t,x,\tau,\xi) = (0,0,1,0)$ par

$$S' = (a_o(y)t + P(y,x))\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k}(a_j(y)x_j + Q_j(y,x))\frac{\partial}{\partial x_j} + b(y) \tag{18}$$

dans le cas complexe, et par

$$\begin{aligned} S' = {} & (a_o(y)t + P(y,x,z,z))\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k_1}(a_j(y)x_j + Q_j(y,x,z,z))\frac{\partial}{\partial x_j} + \\ & \sum_{j=k_1}^{k-2m}\left(\frac{a_o(y)}{2}\left(x_j^2\frac{\partial}{\partial t} + b_j(y)\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\right) + \right. \\ & 2\Re e(R_j(y,x,z,\bar{z}).(-\rho_j(y)x_j\frac{\partial}{\partial t} + b_j(y)\frac{\partial}{\partial x_j}))) + \\ & + \sum_{j=k-2m+1}^{k-m} 2\Re e\left((a_j(y)z_j + S_j(y,x,z,\bar{z}))\frac{\partial}{\partial z_j}\right) + b(y) \end{aligned} \tag{19}$$

dans les cas réels, les notations étant celles du théorème 1.

Si l'on appelle équivalence microlocale la conjugaison de deux o.p.d. par une transformation de contact quantifiée, modulo le produit par un o.p.d. elliptique (par exemple $(\frac{\partial}{\partial t})^{\alpha}$ si l'on est près de $\tau = 1$), on voit que les modèles microlocaux d'o.p.d. complexes présentant les singularités que nous venons d'étudier sont des opérateurs différentiels du premier ordre. Dans le cas réel, (19) montre que, si l'on désire un modèle différentiel, il arrive que l'on doive le prendre du second ordre (cas où il y a des valeurs propres de partie réelle $a_o(0)/2$).

Démonstration du théorème 3 : Soit h la transformation de contact construite dans le théorème 1 (ou le théorème 2). Il existe une transformation de contact quantifiée au-dessus de h qui conjugue B à un o.p.d. dont le symbole principal est celui de S'.

Supposant donc désormais que B et S' ont le même symbole principal F, nous allons démontrer le théorème en prouvant l'existence d'un o.p.d. elliptique d'ordre 0, U', tel que

$$U' \circ S' = B \circ U' \tag{20}$$

Soit G_o (resp. G'_o) le symbole sous-principal de B (resp. S'), et soit U_o le symbole principal de U'. D'après (20),

$$(21) \qquad \{F,U_o\} + (G_o - G'_o)\,U_o = 0 \ ,$$

où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Poisson. Si $U_o = e^{V_o}$, (21) s'écrit

$$(22) \qquad \{F,V_o\} + G_o - G'_o = 0 \ .$$

D'après les hypothèses d'homogénéité, $F = \tau f(t,x,-\frac{\xi}{\tau})$, $V_o = v_o(t,x,-\frac{\xi}{\tau})$, $G_o = g_o(t,x,-\frac{\xi}{\tau})$ et $G'_o = g'_o(t,x,-\frac{\xi}{\tau})$. Si l'on pose, comme précédemment, $p = -\frac{\xi}{\tau}$, (22) équivaut à

$$(23) \qquad X.v_o + g_o - g'_o = 0 \quad ,$$

où X est le champ de vecteurs

$$(24) \qquad X = -\Sigma f_{p^i} \frac{\partial}{\partial x_i} + (f - \Sigma p^i f_{p^i}) \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma (f_{x_i} + p^i f_t) \frac{\partial}{\partial p^i} \quad ,$$

c'est-à-dire $\mathcal{V}_F$.

Supposant (23) résolue, $U_o \circ S' - B \circ U_o$ est un o.p.d. de degré -1, ainsi que $S' - U_o^{-1} \circ B \circ U_o$.

Pour démontrer le <u>théorème 3</u> "formellement" et dans le cas C^∞, il faut prouver le

<u>Lemme 7</u> : <u>Soit</u> T <u>un o.p.d. d'ordre</u> 1, <u>tel que</u> $S' - T$ <u>soit d'ordre</u> $-k$ (k <u>entier</u> ≥ 1). <u>Il existe alors un o.p.d. de la forme</u> $1 + U_k$, <u>où</u> U_k <u>est homogène de degré</u> $-k$, <u>et tel que</u>

$$(1 + U_k)S' - T(1 + U_k)$$

<u>soit de degré</u> $-(k+1)$.

Soit en effet $G_k(t,x,\tau,\xi) = \tau^{-k} g_k(t,x,-\frac{\xi}{\tau})$ le symbole principal de $T - S'$. Il s'agit de résoudre

$$(25) \qquad \{F,U_k\} + G_k = 0 \ ,$$

soit encore

(26) $$X.u_k + kf_t u_k + G_k = 0,$$

avec les notations (24).

Lemme 8 : (23) et (26) ont des solutions, pourvu que $g_o - g'_o$ soit nulle pour $(t,x,p,q) = (0,0,0,0)$.

Nous ne démontrerons ce lemme que dans le cas du théorème 1 (celui du théorème 2 est dans [3] et [4]).

Soit Φ_θ le groupe à un paramètre engendré par X. Restreignons θ à une demi-droite réelle issue de l'origine comme à la fin de la démonstration du théorème 1. (23) équivaut à

(27) $$v_o = v_o \circ \Phi_\theta + \int_o^\theta (g_o - g'_o) \circ \Phi_\eta \, d_\eta \ .$$

$v_o = \int_o^\infty (g_o - g'_o) \circ \Phi_\eta d_\eta$ est bien définie et répond à la question.

De même, (26) équivaut, en posant $Y = f_t^{-1} X$ et $h_k = f_t^{-1} g_k$, à

(28) $$Y.u_k + ku_k + h_k = 0 \quad .$$

Formellement le long de $S = \{(x,t,p,q) = (0,0,0,0)\}$, la résolution de (28) ne présente aucune difficulté, et donne un unique champ taylorien solution le long de S. Par conséquent, on est ramené (par prolongement et soustraction) à résoudre (28) quand h_k est nulle ainsi que toutes ses dérivées le long de S. On vérifie que

(29) $$u_k = \int_o^\infty e^{k\theta} (h_k \circ \Psi_\theta) d\theta$$

a un sens et répond à la question.

On en déduit le théorème 3 dans le cas C^∞. Dans le cas analytique, la convergence résulte d'un résultat général d'Oshima ([4]). □

Remarque : Le lemme 8 est un cas particulier d'un "théorème de Cauchy-Kowalewska" démontré par Oshima [4] dans les cas analytiques. Ce théorème est nettement modifié dans les cas C^∞ correspondant aux hypothèses du théorème 2 (voir [1]).

CONCLUSION

Il n'est sans doute guère possible d'aller beaucoup plus loin dans la recherche de formes normales sans hypothèse particulière. Nous n'exposerons pas, faute de place (et faute de l'avoir fait oralement), des résultats analogues (voir [1]) pour les systèmes différentiels (et pour les familles d'o.p.d. qui commutent). Oshima [4] est bien loin d'avoir traité tous les cas, même "génériques", car il se limitait aux situations où la variété caractéristique est régulière.

Il faut remarquer que la recherche de formes normales pour les systèmes "fuchsiens" est nettement moins facile dans le cas C^{∞} que dans les cas analytiques (voir [1] : même pour des o.p.d. qui commutent, on doit "adapter" des résultats fins de Dumortier et Roussarie [2]).

Enfin, il nous paraît fort probable que les propriétés de propagation des singularités pour les opérateurs réels exclus du théorème 2 (mais tels que le champ X ait un zéro hyperbolique) ne seront pas bien différentes de celles des opérateurs auxquels ce théorème s'applique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chaperon : Singularités en géométrie de contact (à paraître au moins en partie dans Astérisque, Journées singulières, Dijon, Juin 1978).

[2] Dumortier-Roussarie : Singularités des actions de $\mathbb{R}^n$ (preprint, Dijon, 1977-78).

[3] Guillemin-Schaeffer (Duke M. J., 1977).

[4] Oshima (J. Fac. Sc. Univ. Tokyo 1974).

[5] Sternberg : Local contractions and a theorem of Poincaré (voir pour une bibliographie plus complète l'exposé de Bruhat au séminaire Bourbaki, 1960-61).