Y. MEYER

Nouvelles estimations pour les opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 10, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

NOUVELLES ESTIMATIONS POUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par Y. MEYER

Exposé n° X

21 Février 1978

Nous allons d'abord rappeler quelques résultats classiques puis indiquer, sans démonstration, comment ces résultats peuvent être améliorés. Les démonstrations paraîtront dans un prochain volume d'Astérisque.

On rappelle que $S^m_{1,0}$, $m \in \mathbb{R}$, est l'ensemble des fonctions $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ on puisse trouver une constante $C_{\alpha,\beta}$ pour laquelle on ait

(1) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} .$$

A l'aide d'un symbole $\sigma(x,\xi) \in S^m_{1,0}$, on définit un opérateur $\sigma(x,D) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

(2) $$[\sigma(x,D)f](x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi .$$

Les deux problèmes principaux sont

(3) à quoi servent les opérateurs $\sigma(x,D)$?

(4) sur quels espaces sont-ils continus ?

La réponse à la question (3) est bien connue : les opérateurs pseudo-différentiels classiques servent à inverser les opérateurs elliptiques inversibles. Mais comme les pionniers (Calderón, Zygmund, Hörmander...) l'ont observé, il n'est pas nécessaire d'enmployer la classe $S^m_{1,0}$ pour cela : les symboles admettant des développements asymptotiques suffisent.

Une très belle justification de la classe générale $S^m_{1,0}$ est fournie par le théorème suivant de R. Beals.

Théorème 1 : Soient V une variété C^∞ compacte, s_1 et s_2 deux nombres réels, $H^{(s_1)}$ et $H^{(s_2)}$ les espaces de Sobolev correspondants sur V et $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ un opérateur linéaire continu.
Alors les deux propriétés suivantes de T sont équivalentes
(a) T est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre $s = s_1 - s_2$.
(b) $T : H^{(s_1)} \to H^{(s_2)}$ est continu et, pour toute suite $X_1, X_2, \ldots$ de champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur V, les commutateurs $T_1 = [T,X_1]$, $T_2 = [T_1,X_2], \ldots, T_j = [T_{j-1},X_j], \ldots$ sont continus de $H^{(s_1)}$ dans $H^{(s_2)}$.

Un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre m sur V est défini par un noyau K(x,y), C^∞ hors de la diagonale de $V\times V$ et la condition que $Tf(x) = \int_V K(x,y)f(y)dy$ quand $x \notin$ Support f. Si, au contraire x appartient à un voisinage assez petit du support de f pour que l'on puisse utiliser des coordonnées locales, on demande que T soit défini par un symbole de $S^m_{1,0}$.

Pour répondre à la question n° (4), on appelle Λ_m l'opérateur d'intégration (ou dérivation) fractionnaire dont le symbole est $(1+|\xi|^2)^{m/2}$. De sorte que $\sigma(x,D) \in S^m_{1,0}$ équivaut à $\sigma(x,D)\circ\Lambda_{-m} \in S^0_{1,0}$.

L'opérateur Λ_m agit de façon très simple sur les espaces fonctionnels classiques (Lipschitz, Sobolev, Besov,...). Il suffit donc d'étudier l'action des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0.

C'est ce que nous allons faire après avoir introduit quelques définitions.

<u>Définition 1</u> : <u>Un noyau de Calderón-Zygmund est une fonction</u> $K(x,y) : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ <u>possédant les quatre propriétés suivantes</u>

(5) K(x,y) <u>est continue sur l'ouvert</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ <u>défini par</u> $y\neq x$ <u>et il existe une constante</u> C <u>telle que</u> $|K(x,y)| \le C|y-x|^{-n}$.

(6) <u>les gradients</u> $\nabla_x K(x,y)$ <u>et</u> $\nabla_y K(x,y)$, <u>pris au sens des distributions, sont, en fait, des fonctions localement bornées dans</u> Ω <u>et il existe une constante</u> $C>0$ <u>telle que</u> $|\nabla_x K(x,y)| \le C|y-x|^{-n-1}$ <u>et</u> $|\nabla_y K(x,y)| \le C|y-x|^{-n-1}$.

(7) <u>pour toute</u> fonction $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|y-x|\ge\varepsilon} K(x,y)\varphi(y)dy$$

<u>existe pour presque tout</u> $x\in\mathbb{R}^n$.

(8) <u>en posant</u> $\psi = T(\varphi)$, <u>il existe une constante</u> C <u>telle que</u> $\|T(\varphi)\|_2 \le C\|\varphi\|_2$ <u>pour toute</u> $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

La norme L^2 est définie de façon usuelle. La plus petite constante C telle que (5), (6), (7) et (8) aient lieu sera notée $\|K\|^*$ et appelée la norme de Calderón-Zygmund du noyau K.

Pour les applications, il est nécessaire de "compléter" l'ensemble des opérateurs définis par les noyaux de Calderón-Zygmund de la façon suivante.

Définition 2 : Un opérateur linéaire $T : C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund s'il existe une constante $C > 0$ et une suite K_j de noyaux de Calderón-Zygmund telles que $\|K_j\|^* \leq C$ et que, pour toute fonction $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|T_j(f) - T(f)\|_2 \to 0$ $(j \to +\infty)$; on a appelé T_j l'opérateur associé à K_j par (8).

Calderón et Zygmund ont démontré les résultats suivants, complétés par E. Stein et C. Fefferman.

Théorème 1 : Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors T est borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$ et envoie L^∞ dans BMO.

Par ailleurs le lieu entre opérateurs pseudo-différentiels classiques et opérateurs de Calderón-Zygmund est le suivant.

Théorème 2 : Tout opérateur pseudo différentiel classique d'ordre 0 est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Nous allons maintenant montrer que les opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0 sont bornés sur l'espace Λ_δ des fonctions hölderiennes d'exposant δ quand $\delta \notin \mathbb{N}$. Nous nous limiterons au cas où $0 < \delta < 1$; le cas général s'en déduit immédiatement.

On utilise les trois lemmes suivants :

Lemme 1 : Soit $F(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé, $x \to F(x,y)$ appartienne à Λ_δ et que l'application ainsi définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$ appartienne elle-même à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n, \Lambda_\delta(\mathbb{R}^n))$.

Alors $F(x,y)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et, en particulier $F(x,x)$ appartient à $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$.

C'est évident et laissé au lecteur.

Lemme 2 : Toute fonction $f \in \Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$ peut s'écrire $f = b(x) + \sum_0^\infty f_j(x)$ où

(9) le support de $\hat{b}(\xi)$ est contenu dans $|\xi| \le 1$

(10) le support de $\hat{f}_j(\xi)$ est contenu dans $\frac{1}{3} 2^j \le |\xi| \le 3.2^j$

(11) $\|b\|_\infty \le C$ et $\|f_j\|_\infty \le C 2^{-j\delta}$.

Réciproquement une telle série où (9), (10) et (11) sont satisfaites définit toujours une fonction de $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 3 : Soit $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $|\partial^\alpha m(\xi)| \le C(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \le n$. Alors si $f \in \Lambda_\delta$ et si $\hat{g}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$, on a $g \in \Lambda_\delta$.

En d'autres termes, l'opérateur pseudo-différentiel $m(D)$ est borné sur $\Lambda_\delta(\mathbb{R}^n)$.

La preuve du lemme 3 repose sur le lemme 2 (classique) et sur la remarque suivante : pour tout $j \ge 0$ il existe une fonction $\lambda_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

(12) $$\|\lambda_j\|_1 \le C' \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_j(\xi) = m(\xi) \quad \text{si } \frac{1}{3} 2^j \le |\xi| \le 3.2^j .$$

(On fait le changement de variable $\xi = 2^j\eta$ et l'on applique le théorème d'injection de Sobolev à la fonction $m(2^j\eta)$ dont les dérivées sont uniformément bornées).

On appelle L_j l'opérateur dont le symbole est λ_j et M l'opérateur dont le symbole est $m(\xi)$ et l'on a

$$M(f) = M(b) + \sum_0^\infty M(b_j) = M(b) + \sum_0^\infty L_j(f_j) .$$

Or $\|L_j(f_j)\|_\infty \le C'\|f_j\|_\infty \le CC'2^{-j\delta}$ et la transformée de Fourier de $L_j(f_j)$ est $m(\xi)\hat{f}_j(\xi)$; son support est contenu dans $1/3\, 2^j \le |\xi| \le 3.2^j$.

Donc $M(f) \in \Lambda_\delta$.

Pour terminer, on pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$F(x,y) = \int e^{ix.\xi}\, \sigma(y,\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi$$

de sorte que $F(x,x) = \sigma(x,D)f(x)$.

Il suffit de remarquer qu'un symbole $\sigma \in S^0_{1,0}$ définit canoniquement une application de $\mathbb{R}^n$ dans l'algèbre des symboles ne dépendant pas de x ; cette application est indéfiniment dérivable.

Chemin faisant, on a prouvé davantage

Théorème 3 : Soit $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C_α telle que l'on ait

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)(1+|\xi|)^{|\alpha|}| \leq C_\alpha$$

et

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h,\xi)(1+|\xi|)^{|\alpha|} - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)(1+|\xi|)^{|\alpha|}| \leq$$

$$C_\alpha |h|^\delta \ ; \ h \in \mathbb{R}^n \ , \ 0 < \delta < 1 \ .$$

Alors $\sigma(x,D) : \Lambda_\delta \to \Lambda_\delta$ est borné.

Nous pouvons maintenant reprendre l'énoncé du théorème 1, en y remplaçant les espaces de Sobolev par les classes de Lipschitz.

Théorème 4 : Soient V une variété C^∞ compacte, s_1 et s_2 deux nombres réels positifs n'appartenant pas à $\mathbb{N}$ et $\Lambda_{s_1}(V)$ et $\Lambda_{s_2}(V)$ les espaces de Hölder correspondants. Alors les deux propriétés suivantes d'un opérateur linéaire continu $T : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ sont équivalentes

(a) T est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre $s = s_1 - s_2$.

(b) $T : \Lambda_{s_1}(V) \to \Lambda_{s_2}(V)$ est continu et, pour toute suite $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$ de champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur V, les commutateurs $T_1 = [T, X_1], \dots, T_j = [T_{j-1}, X_j], \dots$ sont continus de $\Lambda_{s_1}(V)$ dans $\Lambda_{s_2}(V)$.

Pour finir, désignons par $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue, croissante, concave et telle que $\omega(0) = 0$. Nous définissons une classe $\Sigma_\omega \supset S^0_{1,0}$ de symboles par les conditions

$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{-|\alpha|}$ et $|\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha \omega(h)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$; $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

C'est-à-dire, par rapport à la variable ξ, on impose les conditions habituelles ; en x on ne demande presqu'aucune régularité.

<u>Théorème 5</u> : <u>Les trois conditions suivantes sont équivalentes</u>

(13) $\sum\limits_{1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}) < +\infty$

(14) <u>Tout opérateur pseudo-différentiel</u> $\sigma(x,D)$ <u>dont le symbole</u> $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$ <u>est borné sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(15) <u>Tout opérateur pseudo-différentiel</u> $\sigma(x,D)$ dont <u>le</u> symbole $\sigma(x,\xi) \in \Sigma_\omega$ <u>est borné sur</u> $L^p(\mathbb{R}^n)$ <u>si</u> $1 < p < +\infty$.